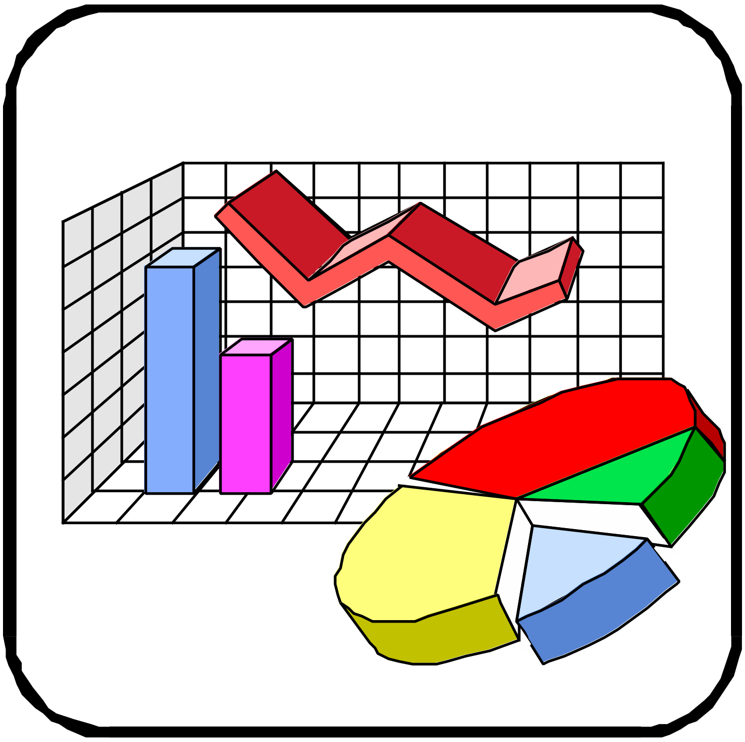
Werkstatt Multiplikation
Posten: **Matrixmultiplikation**

Informationsblatt für die Lehrkraft

Sc hn
ell e
M atr
ix- m
ult ipl



ikation

Thema: Matrixmultiplikation

Schultyp: Mittelschule, technische Berufsschule, Fachhochschule

Vorkenntnisse: Fähigkeiten im Umgang mit einem **Anwendungsprogramm** (Text, Grafik, Tabellen).
Matrixmultiplikation behandelt (wird kurz repetiert).
Begriffe **explizit** und **rekursiv.**

Bearbeitungsdauer: 80 - 90 Minuten + Präsentation in der Klasse (3 Minuten)

Fassung vom: 15.9.95

Schulerprobung: nein

Übersicht

Neben der bekannten Schulmethode gibt es noch andere Methoden um zwei Matrizen miteinander zu multiplizieren. Diese Methoden zielen darauf ab, die Anzahl der **Multiplikationen zu verringern**. Dabei steigt jedoch die Anzahl der Additionen und Subtraktionen.

Hier werden zwei **Multiplikationsverfahren** miteinander verglichen. Es handelt sich um

1. Die Schulmethode
2. Die Methode von Strassen

Die Unterschiede im Aufwand sind mit **mehreren Grafiken** darzustellen. Damit wird der **Einsatz** eines **Tabellenkalkulationsprogramms** geübt. Jeder Postenabsolvent präsentiert zwei seiner besten Grafiken der Klasse. Die Notation O(n) wird verwendet, aber nicht erklärt.

Lernziele

· Der Postenabsolvent übt sich im **Umgang mit** der Tabellenkalkulation **EXCEL**. Insbesondere mit der grafischen Darstellung von Daten. Sollte er später einmal Daten grafisch darstellen, muss er sich nicht erst mühsam einarbeiten, sondern kann die hier erworbenen Erfahrungen direkt umsetzen.

· Der Postenabsolvent kennt die *Methode von Strassen* zur schnellen Matrixmultiplikation.

· Der Postenabsolvent hat erkannt, dass manchmal ein **Umweg lohnender** ist, als der direkte Weg. So kann es sich lohnen mehr Additionen durchzuführen, wenn dafür Multiplikationen gespart werden können.

· Der Postenabsolvent kennt ein **Beispiel eines Forschungsgebietes** in der Mathematik.

Material

¥ *Theorie*: Die Matrixmultiplikation
¥ *Material:* EXCEL, oder eine andere Tabellenkalkulation mit Grafikfunktion
Folien für die Präsentation der Grafiken (Auftrag 4)
Farbdrucker (ev. direkt auf Folien)

Quellen

Fachred. d. Bibliograph. Ins.: *Duden "Die Mathematik"* Mannheim; Wien; Zürich (Bibliographisches Institut, 1982)

Volker Claus u. Andreas Schwill: *Duden «Informatik»: ein Sachlexikon für Studium und Praxis* Mannheim; Wien; Zürich (Dudenverlag, 1988)

V. Strassen: *Algebra and Complexity,*: Basel; Bosten; Berlin (First European Congress of Mathematics, Volume II, 1992, p. 429-445)

Don Coppersmith, Shmuel Winograd: *Matrix Multiplication via Arithmetic Progressions*; London, San Diego... (Journal of Symbolic Computation, Volume 9, Number 1, January 1990, p 251-280)

Victor Pan: *How to Multiply Matrices Faster*, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio (Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, 1984)

Hinweise, Lösungen

Lösung Auftrag 2

Auftrag: Matrixmultiplikation $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ einmal mit der *Schulmethode* und einmal mit der *Methode von Strassen*.

Schulmethode:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9\cdot 8+6\cdot 2 & 9\cdot 3+6\cdot 4 \\ 5\cdot 8+8\cdot 2 & 5\cdot 3+8\cdot 4 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 84 & 51 \\ 56 & 47 \end{pmatrix}$$

- 8 Multiplikationen
- 4 Additionen

Methode von Strassen:

$$\begin{aligned}
m_1 &= (-2)\cdot 6 &&= -12 \\
m_2 &= 17\cdot 12 &&= 204 \\
m_3 &= 4\cdot 11 &&= 44 \\
m_4 &= 15\cdot 4 &&= 60 \\
m_5 &= 9\cdot(-1) &&= -9 \\
m_6 &= 8\cdot(-6) &&= -48 \\
m_7 &= 13\cdot 8 &&= 104
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= m_1+m_2-m_4+m_6 &&= 84 \\
c_{12} &= m_4+m_5 &&= 51 \\
c_{21} &= m_6+m_7 &&= 56 \\
c_{22} &= m_2-m_3+m_5-m_7 &&= 47
\end{aligned}
\qquad C=\begin{pmatrix} 84 & 51 \\ 56 & 47 \end{pmatrix}$$

- 7 Multiplikationen
- 18 Additionen

Lehrer-Lernkontrolle / Test

Aufgabe 1 (schriftlich)

Ein Nachteil der *Methode von Strassen* ist der zusätzliche Speicheraufwand für die Zwischenresultate. **Wieviele Zahlen** müssen für die Multiplikation von zwei **44-Matrizen** zwischengespeichert werden? Zwischenspeicher für die Addition/Subtraktion kannst Du vernachlässigen. Gib das Resultat auch im Verhältnis zu dem für die Resultatmatrix benötigten Speicherplatz an.

Aufgabe 2 (mündlich)

Bevor ein Programm geschrieben wird, muss man sich einige Gedanken über den zu verwendenden Algorithmus machen. Hier geht es um ein Programm zur **Matrixmultiplikation.** Es soll Matrizen der Grösse von ca. 1010 bis 3030 Elemente verarbeiten. Die zwei Matrizen werden über Infrarot eingelesen; das Resultat der Matrixmultiplikation wird auf einem Drucker ausgegeben. **Welche Methode** schlägst Du vor? Die *Methode von Strassen* oder die *Schulmethode*? Gib eine kurze Begründung (1-2 Sätze) für Deinen Entscheid.

Lösungen und Taxierung

Aufgabe 1 (schriftlich)

Lösung: Zunächst werden **7 Zwischenmatrizen** der Grösse 22 generiert. Dafür werden 74= 28 Zahlenspeicher benötigt. **Jede** dieser **Zwischenmatrix** entsteht aus einer Matrixmultiplikation von zwei 22-Matrizen. Für diese 22-Matrixmultiplikation müssen 7 Zwischenspeicher für jeweils eine Zahl bereitgestellt werden. Allerdings nur einmal, da für jeder der 22-Matrixmultiplikation dieselben 7 Zahlenspeicher verwendet werden können. Total werden also 7+28= **35 Zahlenspeicher** benötigt. Die Resultatmatrix benötigt 16 Zahlenspeicher. Für die Zwischenresultate wird also **über doppelt soviel** (genau: 2.1875 mal soviel) Speicherplatz benötigt, wie für das Resultat.

Taxierung: Der Algorithmus muss nachvollzogen werden. Ich taxiere die Aufgabe als **K2**.

Aufgabe 2 (mündlich)

Lösung: Mit den im Auftrag angegebenen Zeitwerten liegen die Ausführungszeiten bei 3030-Matrizen unter 1.4s. Diese **Zeit** ist im Vergleich zur benötigten Zeit um die Werte einzulesen und zu Drucken **vernachlässigbar**. Da die *Schulmethode* **einfacher** zu implementieren ist und **weniger Speicher** für Zwischenresultate benötigt, ist sie vorzuziehen.

Taxierung: Der Verarbeitungsprozess muss analysiert werden um die zeitlichen Verhältnisse zu erkennen, welche für die Wahl der Methode ausschlaggebend sind. Ich taxiere die Aufgabe als **K4**.

Werkstatt Multiplikation Auftragsblatt
Posten: **Matrixmultiplikation**

Was soll ich hier tun?

An diesem Posten lernst Du eine neue Methode zur **Matrixmultiplikation** kennen. Du vergleichst den Rechenaufwand der neuen Methode mit demjenigen der Schulmethode. Diesen Vergleich stellst Du mit EXCEL graphisch dar.

Der Posten besteht aus den folgenden **vier Aufträgen**:

(1) Studiere die **Theorie** "Die Matrixmultiplikation"
(20 - 25 Minuten)

(2) Berechne "von Hand" das Produkt $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Einmal mit der *Schulmethode* und einmal mit der *Methode von Strassen.* Zähle dabei die Anzahl benötigter Multiplikationen und Additionen.

Deine Lösung ist gut, wenn Du die Berechnung mit den beiden Methoden durchgeführt hast, und wenn das Resultat korrekt ist.
(5 - 10 Minuten)

(3) Du arbeitest in einem Wetterlabor und musst oft Berechnungen mit vielen Matrixmultiplikationen durchführen. Es stehen Dir **zwei Computer** zur Verfügung. Beide können die Matrixmultiplikation nach der *Schulmethode* oder der *Methode von Strassen* durchführen. Allerdings unterscheiden sich die Computer in der Geschwindigkeit Ihrer Rechenwerke:

- Der **Computer A** benötigt für eine Multiplikation **25 mal** so viel Zeit wie für eine Addition/Subtraktion. Eine Addition/Subtraktion dauert **2s**. (1s= 10-6s)
- Der **Computer B** benötigt für eine Multiplikation **10 mal** so viel Zeit wie für eine Addition/Subtraktion. Eine Addition/Subtraktion dauert **3s**.

Stelle die Unterschiede im **Zeitaufwand** für verschiedene Matrixgrössen mit EXCEL graphisch dar. überlege Dir jeweils, **was** Du genau aufzeigen willst und versuche eine möglichst passende graphische Darstellung zu finden. Mögliche Ansatzpunkte sind:

- Ab welcher **Matrixgrösse** lohnt sich die *Methode von Strassen*?
- Um wieviele Prozent löst **Computer B** die Matrixmultiplikationen **schneller**?
- Kann über das Verhältnis **Additionen : Multiplikationen** etwas ausgesagt werden?

Ich **erwarte**, dass Du überlegst, welche der möglichen Grafiken (Balken, Linien, Kreis, Flächen...) sich eignen und **zwei** möglichst klare, aussagekräftige **Grafiken produzierst**.

Achtung: Wenn n keine Zweierpotenz ist, muss für die Matrixmultiplikation mit der *Methode von Strassen* die Matrix bis zur nächsten Zweierpotenz mit Nullen aufgefüllt werden!
(45 Minuten)

(4) Bereite Dich darauf vor, die beiden Grafiken aus Auftrag (3) der Klasse zu **präsentieren**. Dabei erwarte ich zwei bis drei Gründe, weshalb Du genau diese Darstellung gewählt hast. Eventuell musstest Du dafür einen Nachteil in Kauf nehmen. Dann erwarte ich auch, dass Du diesen Nachteil erwähnst.
(10 Minuten)

Die Aufträge sollte **jeder für sich** bearbeiten.

Die Matrixmultiplikation

In den nächsten Kapiteln wird die Matrixmultiplikation mit **verschiedenen Methoden** erklärt. Multipliziert wird jeweils die Matrix $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit der Matrix $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Das Resultat sei die Matrix $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ *mit* $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$

Es werden jeweils nur Matrizen behandelt, die gleich hoch wie breit sind; also gleichviele Elemente in der Höhe wie auch in der Breite besitzen. Diese Matrizen nennt man **quadratisch**. Alle oben aufgeführten Matrizen sind quadratisch: Sie haben 2 Elemente in der Breite und 2 Elemente in der Höhe.

Die Schulmethode

Es wird jede Zeile der Matrix A mit jeder Spalte der Matrix B multipliziert. Mit dem obigen Beispiel sieht das so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\cdot 0+(-2)\cdot(-3) & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 2 \\ 3\cdot 0+4\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+4\cdot 2 \end{pmatrix} \end{array}=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Jedes Element der Matrix C wird mit der Formel $c_{ik}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lk}$ berechnet. Dabei ist n die Anzahl Elemente in der Breite/Höhe der Matrix.

Wieviele Additionen/Subtraktionen[1] und Multiplikationen werden für diese Matrixmultiplikation benötigt?

Die Matrix C hat $n\cdot n=n^2$ Elemente. Jedes Element wird durch das Aufsummieren von n Produkten ($a_{il}b_{lk}$) gebildet. Benötigt werden also:

- $n^2 * n = n^3$ **Multiplikationen**. In unserem Beispiel (n=2): 8 Multiplikationen.
- $n^2 * (n-1) = n^3-n^2$ **Additionen**. In unserem Beispiel (n=2): 4 Additionen.

Die Additionen/Subtraktionen tragen zum gesamten Rechenaufwand viel weniger bei als die Multiplikationen. So wird beim **Vergleich des Rechenaufwands** oft nur die Grössenordnung der Anzahl der Multiplikationen angegeben. Bei der hier beschriebenen *Schulmethode* sind es $O(n^3)$ Multiplikationen.

Methode von Strassen

Der Mathematiker V. Strassen hat 1969 ein Verfahren zur schnellen Multiplikation von $n\times n$-Matrizen veröffentlicht. Multiplikationen sind im allgemeinen wesentlich zeitaufwendiger als Additionen. Deshalb hat er

1 **Subtraktionen** erwähne ich im folgenden Text nicht mehr extra. Sie entsprechen in der Ausführungszeit den Additionen.

die Anzahl **Multiplikationen reduziert** und dafür einen **Anstieg der** Anzahl **Additionen** in Kauf genommen.

Bei der Matrixmultiplikation nach der *Methode von Strassen* werden zuerst **7 Zwischenwerte** berechnet:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= (a_{12} - a_{22})\ (b_{21} + b_{22}) \\
m_2 &= (a_{11} + a_{22})\ (b_{11} + b_{22}) \\
m_3 &= (a_{11} - a_{21})\ (b_{11} + b_{12}) \\
m_4 &= (a_{11} + a_{12})\ b_{22} \\
m_5 &= a_{11}\ (b_{12} - b_{22}) \\
m_6 &= a_{22}\ (b_{21} - b_{11}) \\
m_7 &= (a_{21} + a_{22})\ b_{11}
\end{aligned}
$$

Daraus wird das **Resultat** gebildet:

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= m_1 + m_2 - m_4 + m_6 \\
c_{12} &= m_4 + m_5 \\
c_{21} &= m_6 + m_7 \\
c_{22} &= m_2 - m_3 + m_5 - m_7
\end{aligned}
$$

- Benötigt werden in unserem Beispiel (n=2): **7 Multiplikationen** und **18 Additionen**. Du kannst das leicht durch Nachzählen der Additionen und Multiplikationen in den obigen Formeln überprüfen.

Für **grössere Matrizen** wird das Verfahren **rekursiv** angewandt. Die a_{ij}, b_{ij}, m_i und c_{ij} sind dann nicht Zahlen, sondern selber Matrizen. So werden bei einer 2n2n-Matrixmultiplikation die Matrizen A, B und C in vier nn Untermatrizen unterteilt:

$$
A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ \hline 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \quad mit \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \ldots
$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}}_{B}
$$

Anstelle der Hilfswerte mi werden Hilfsmatrizen $M_1, \ldots M_7$ gebildet. Dabei gelten die gleichen - oben angegebenen - Formeln wie für die mi. Aber statt der “normalen” Multiplikation, Addition und Subtraktion werden die entsprechenden Matrixoperationen verwendet. Dabei ist die Matrixmultiplikation in den mi-Formeln natürlich wieder eine **Strassen-Matrixmultiplikation**. So wird die Matrixmultiplikation **rekursiv** in kleinere Matrixmultiplikationen aufgeteilt, bis nur noch 22-Matrizen zu multiplizieren sind.

Dies funktioniert natürlich nur, wenn sich die Ursprungsmatrizen auch immer schön vierteilen lassen. Dazu muss die **Anzahl Elemente** in der Breite (=n) der Ursprungsmatrizen eine **Zweierpotenz** sein. Also n=2, 4, 8, 16, 32...

Mit $n = 2^h, \quad h = 1,2,3,\ldots$ benötigt die **rekursive Methode von Strassen:**

- 7^h **Multiplikationen**. In unserem Beispiel (n=2, h=1): 7 Multiplikationen.
- $6\ (7^h - 4^h)$ **Additionen**. In unserem Beispiel (n=2, h=1): 18 Additionen.

Herleitung, nur für Interessierte:

Die **Anzahl Multiplikationen** lässt sich einfach herleiten:
M(n):= Anzahl Multiplikationen bei der Matrixmultiplikation von nn-Matrizen.

$$M(2^1) = 7; \quad M(2^{h+1}) = 7\ M(2^h)$$

Die **Anzahl Additionen** lassen sich wie folgt berechnen:
A(n):= Anzahl Additionen bei der Matrixmultiplikation von nn-Matrizen.
Für Matrizen mit der Grösse $n = 2^{h+1}$ benötigst Du **18 Matrixadditionen/-subtraktionen** mit Matrizen der Grösse $n/2 = 2^h$. Jede dieser Operation besteht aus $\left(2^h\right)^2 = 4^h$ elementaren Operationen. **Zusätzlich** werden noch **7 Matrixmultiplikationen** mit Matrizen der Grösse $n/2 = 2^h$ durchgeführt. Diese benötigen noch zusätzlich $A(2^h)$ Additionen. Zusammengefasst ergibt sich die rekursive Formel

$$A(2^0) = 0; \quad A(2^{h+1}) = 18\ 4^h + 7\ A(2^h)$$

Diese Formel lässt sich **explizit** schreiben als

$$A(h) = 6\ (7^h - 4^4)$$

Die **Anzahl Multiplikationen M** kennen wir nun in Abhängigkeit von h. Um die *Methode von Strassen* mit anderen Methoden vergleichen zu können, brauchen wir die Anzahl Multiplikationen in Abhängigkeit von n. Dies lässt sich durch einige Umformungen erreichen:

$$n = 2^h \qquad h = \log_2 n$$
$$M = 7^{\log_2 n} = n^?$$

Die Anzahl Multiplikationen M möchte ich in die Form n? bringen:

$$M = 7^{\log_2 n} = (2^{\log_2 7})^{\log_2 n} = (2^{\log_2 n})^{\log_2 7} = n^{\log_2 7} \approx n^{2807}$$

Damit sind für die *Methode von Strassen* $O(n^{2807})$ Multiplikationen nötig.

Die schnellste Methode

Die Methode, die am **wenigsten Multiplikationen** benötigt, wurde von *Coppersmith und Winograd* gefunden (Stand August 1995). Diese Methode benötigt nur $O(n^{2376})$ Multiplikationen.

Zusammenfassung: Matrixmultiplikation

Die Schulmethode

n= Höhe/Breite der quadratischen Matrix.

- n2 * n= n3 **Multiplikationen**. In unserem Beispiel (n=2): 8 Multiplikationen.
- n2 * (n-1)= n3-n2 **Additionen**. In unserem Beispiel (n=2): 4 Additionen.

Methode von Strassen

n= Höhe/Breite der quadratischen Matrix.

- $O(n^{2807})$ **Multiplikationen.** In unserem Beispiel (n=2): 7 Multiplikationen.
- $6\ (7^{\log_2 n} - 4^{\log_2 n})$ **Additionen**. In unserem Beispiel (n=2): 18 Additionen.