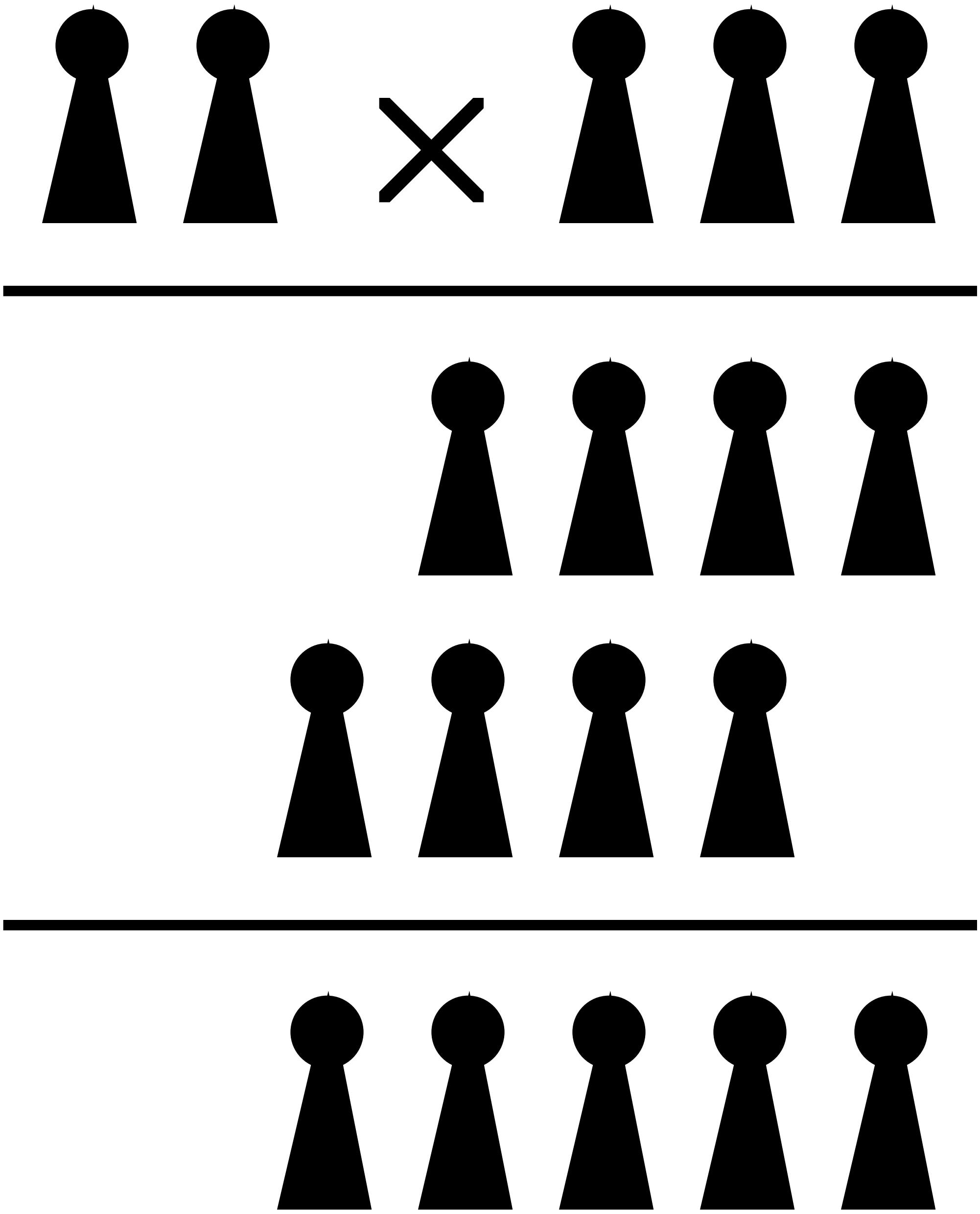
Russische Bauern-Multiplikation



Thema: Russische Bauernmultiplikation

Schultyp: Mittelschule, technische Berufsschule

Vorkenntnisse: Binäre Zahlen

Bearbeitungsdauer: 45 Minuten

Fassung vom: 8.9.95

Schulerprobung: Nein

Übersicht

Dieser Posten stellt ein einfaches Verfahren zur Multiplikation zweier natürlicher Zahlen vor. Dabei wird nur die ganzzahlige Division durch 2, die Multiplikation mit 2 und die Addition verwendet. Es basiert auf der binären Zerlegung der einen Zahl, gepaart mit der schrittweisen Verdoppelung der andern Zahl.

Dieser Posten sollte alleine bearbeitet werden.

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler lernen ein einfaches Multiplikationsverfahren kennen. Durch die Analyse der Funktionsweise erkennen sie die binäre Multiplikation von einer ganz anderen Seite. Dieser Posten kann zur Illustration der Computer-Arithmetik oder als Übung zum binären Zahlensystem dienen.

Material

- Theorie: Russische Bauernmultiplikation
- Taschenrechner (für Auftrag 2)

Quellen

Bolt B.: Die zweite mathematische Fundgrube. Stuttgart 1989, S. 91-92, 172 (Klett).

Hinweise, Lösungen

Lösung Auftrag 2:

Multiplikation von 13 und 17:

13	17	=>	17
6	34		
3	68	=>	68
1	136	=>	136
			221

Multiplikation von 166 und 125:

166	125		
83	250	=>	250
41	500	=>	500
20	1000		
10	2000		
5	4000	=>	4000
2	8000		
1	16000	=>	16000
			20750

Multiplikation von 64 und 51:

64	51		
32	102		
16	204		
8	408		
4	816		
2	1632		
1	3264	=>	3264
			3264

Lösung Auftrag 3:

a) Erklärung mit binären Zahlen:

Der Halbierungsvorgang gepaart mit der Auswahl der ungeraden Zahlen entspricht einer Umwandlung der ersten Zahl in die binäre Form:

$39 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 100111_2$

Die Markierung einer Zeile entspricht genau einer 1 der binären Zahl. Sie treten in der Berechnungstabelle in umgekehrter Reihenfolge auf.

Der Verdoppelungsvorgang berechnet das Produkt der zweiten Zahl mit allen benötigten Zweierpotenzen:

$79 = 2^0 \cdot 79$ $158 = 2^1 \cdot 79$ $316 = 2^2 \cdot 79$ .... $2528 = 2^5 \cdot 79$

Mit den obigen Formeln lässt sich die Berechnung nachvollziehen:

$$\begin{aligned} 39 \cdot 79 &= (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1) \cdot 79 \\ &= 2^5 \cdot 79 + 2^2 \cdot 79 + 2 \cdot 79 + 1 \cdot 79 \\ &= 2528 + 316 + 158 + 79 \\ &= 3081 \end{aligned}$$

b) Erklärung mit Rundungsfehlerkorrektur:

In jedem Schritt entsteht aus dem Zahlenpaar (x, y) in der nächsten Zeile (x div 2, y • 2). Ist x gerade, so gilt:

$x \cdot y = (x / 2) \cdot (y \cdot 2) = (x \text{ div } 2) \cdot (y \cdot 2)$

Ist x ungerade, so gilt:

$x \cdot y = (x-1) \cdot y + y = ((x-1) / 2) \cdot (y \cdot 2) + y = (x \text{ div } 2) \cdot (y \cdot 2) + y$

Das Produkt der beiden Zahlen eine Paares bleibt deshalb nur konstant, falls x gerade ist. Ist x ungerade, so geht in diesem Schritt ein y verloren. In der letzten Zeile steht das Paar (1, z). z ist nun genau das Produkt der obersten beiden Zahlen, falls in jedem Schritt die linke Zahl gerade war (Vergleiche mit dem Beispiel 64 • 51). Im allgemeinen Fall müssen aber zu z alle Zahlen rechts mit ungeradem linken Partner dazugezählt werden .

Lehrer-Lernkontrolle / Test

Aufgabe 1

An diesem Posten hast Du ein spezielles Multiplikationsverfahren kennengelernt. Berechne damit 77 • 38 und notiere wie im Theorieteil alle Zwischenschritte.

Aufgabe 2

Bei dem vorgestellten Verfahren steht die Zahl 2 im Zentrum. Entwickle eine analoge Multiplikation zweier Zahlen, das stattdessen die Zahl 3 verwendet. Beschreibe mit wenigen Sätzen das Vorgehen. Berechne damit 196 • 46 und kennzeichne wie im Theorieteil alle Zwischenschritte.

Aufgabe 3

Berechne nochmals 196 • 46, verwende aber diesmal die Zahl 10 als Basis. Kennzeichne wieder alle Zwischenschritte. Vergleiche dieses Verfahren mit der schriftlichen Multiplikation, das Du in der Primarschule kennengelernt hast. Beschreibe kurz Deine Beobachtung.

Lösungen und Taxierung

Aufgabe 1 [K1]

Multiplikation von 77 und 38:

77	38	=>	38
38	76		
19	152	=>	152
9	304	=>	304
4	608		
2	1216		
1	2432	=>	2432
			2926

Aufgabe 2 [K3]

Schreibe die beiden Zahlen, die multipliziert werden müssen nebeneinander. Dividiere die linke Zahl durch 3 und schreibe einen allfälligen Rest in Klammern dahinter. Verdreifache die rechte Zahl. Schreibe die beiden Ergebnisse je darunter und fahre fort, bis Du links bei 0 angelangt bist. Multipliziere auf allen Zeilen den Rest mit der Zahl rechts und schreibe das Ergebnis dahinter. Die Summe all dieser Zahlen ergibt das gesuchte Produkt.

Multiplikation von 196 und 46 mit dem Verfahren zur Basis 3:

196	(1)	46	=>	46
65	(2)	138	=>	276
21	(0)	414	=>	0
7	(1)	1242	=>	1242
2	(2)	3726	=>	7452
0				
				9016

Aufgabe 3 [K3]

Multiplikation von 196 und 46 mit dem Verfahren zur Basis 10:

196	(6)	46	=>	276
19	(9)	460	=>	4140
1	(1)	4600	=>	4600
0				
				9016

Bis auf die Notation ist dieses Verfahren mit der schriftlichen Multiplikation identisch.

Was soll ich hier tun?

Dieser Posten stellt ein einfaches Verfahren zur Multiplikation zweier natürlicher Zahlen vor. Dabei wird nur die ganzzahlige Division durch 2, die Multiplikation mit 2 und die Addition verwendet.

Funktioniert dieses Verfahren nun für alle Zahlen oder nur bei speziellen Beispielen?

Der Posten besteht aus den folgenden drei Aufträgen:

(1) Studiere die Theorie: Russische Bauernmultiplikation
(10 Minuten)

(2) Berechne mit dem gleichen Verfahren 13 • 17, 166 • 125 und 64 • 51 und überprüfe die Ergebnisse mit dem Taschenrechner.
(10 Minuten)

(3) Erkläre mit einigen Sätzen, warum diese Methode funktioniert. Zeige mit Hilfe von Gleichungen die Korrektheit des Resultates. Verwende dazu das konkrete Beispiel 39 • 79.
(25 Minuten)

Alle drei Aufträge sind allein zu bearbeiten.

Russische Bauernmultiplikation

Angeblich, so heisst es, wurde in grauer Vorzeit von russischen Bauern eine recht eigenwillige Multiplikationsmethode verwendet:

Schreibe die beiden Zahlen, die multipliziert werden müssen nebeneinander. Dividiere die linke Zahl durch 2 und ignoriere einen allfälligen Rest. Verdopple die rechte Zahl. Schreibe die beiden Ergebnisse je darunter und fahre fort, bis Du links bei 1 angelangt bist. Markiere nun alle Paare mit einer ungeraden Zahl links und addiere die entsprechenden Zahlen rechts. Das Summe ergibt das gesuchte Produkt.

Ein Beispiel

Multiplikation von 39 und 79:

39	79	=>	79
19	158	=>	158
9	316	=>	316
4	632		
2	1264		
1	2528	=>	2528
			3081

Beobachtungen

Rechnet man 39 • 79 nach, so ergibt das tatsächlich 3081. Ist das nun Zufall? Oder haben die russischen Bauern geschickt gemogelt? Oder steckt doch ein mathematisches Gesetz dahinter?