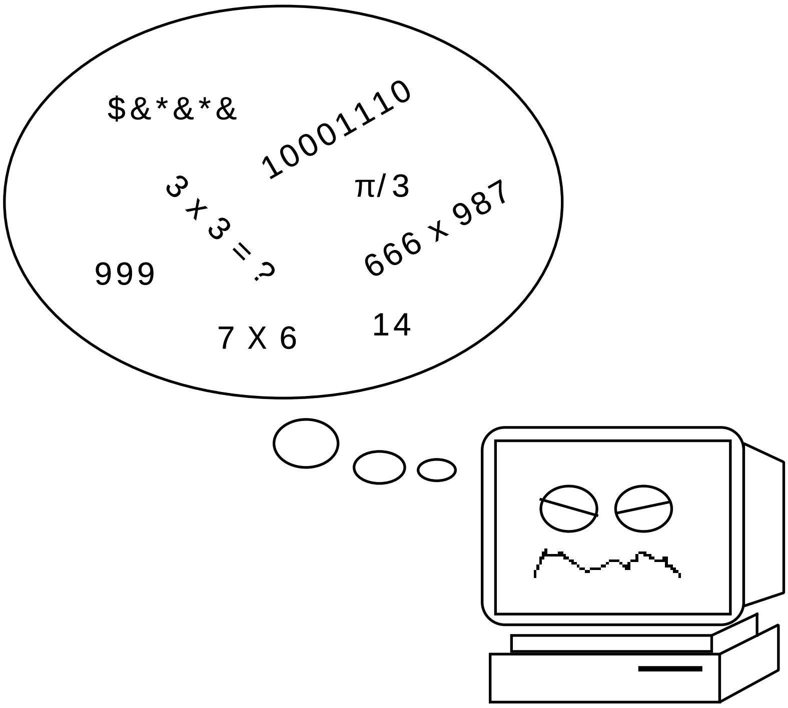
Schnelle Multiplikation



Thema:	Schnelle Multiplikation - Verfahren von Karatsuba
Schultyp:	Mittelschule, technische Berufsschule, Fachhochschule
Vorkenntnisse:	Elementare Programmierkenntnisse, Exponentialfunktion und Logarithmen
Bearbeitungsdauer:	45 - 60 Minuten
Fassung vom:	27.9.95
Schulerprobung:	nein

Übersicht

Wie schnell können zwei *n*-stellige Zahlen miteinander multipliziert werden? Die Schulmethode benötigt dafür n^2 einstellige Multiplikationen und einige Additionen. 1962 entwickelte Karatsuba ein Verfahren, das nur $O(n^{1.59})$ einstellige Multiplikationen benötigt.

Der Posten erklärt Karatsubas Verfahren und die ihm zugrunde liegende Programmiertechnik des "*Divide and Conquer*". Die Schülerinnen und Schüler studieren zuerst die Theorie. Dann lösen sie ein einfaches Beispiel "von Hand". Schliesslich "messen" sie die Effizienz des Algorithmus, indem sie mit einem Computer oder programmierbaren Taschenrechner $O(n^2)$ und $O(n^{1.59})$ vergleichen.

Lernziele

Grundoperationen wie die Multiplikation zweier Zahlen werden in einem Computerprogramm zu Tausenden ausgeführt. Es ist deshalb wichtig, dass solche Operationen *effizient* implementiert werden.

Nach Bearbeiten des Postens kennen die Schülerinnen und Schüler das Verfahren von Karatsuba für die Multiplikation von zwei *n*-stelligen Zahlen. Sie können das Verfahren an einfachen Beispielen selbst "von Hand" anwenden. Sie können auch darlegen, weshalb es der Schulmethode vom Aufwand her überlegen ist.

Ausserdem lernen sie die Programmiertechnik "*Divide and Conquer*" kennen. Sie können erklären, wie diese Technik funktioniert, und bei welchen Problemen sie angewandt werden kann.

Material

- *Theorie*: Schnelle Multiplikation - Das Verfahren von Karatsuba
- *Computer* oder *programmierbarer Taschenrechner* (für Auftrag 3)

Quellen

Dewdney A.K.: *The Turing Omnibus* - 61 Excursions in Computer Science. USA 1989 (Computer Science Press)

Hinweise, Lösungen

Lösung Auftrag 2

gesucht: Lösung nach Karatsuba für 7201 W 3819 = ?

(1) **n** = 4, **a** = 72, **b** = 1, **c** = 38, **d** = 19

(2) $\mathbf{x_1}$ = a W c [ebenfalls nach Karatsuba]

(2.1) n = 2, a = 7, b = 2 c = 3 d = 8

(2.2) x_1 = a W c = 21

(2.3) x_2 = b W d = 16

(2.4) x_3 = (a + b) W (c + d) = 99

(2.5) x_4 = x_3- (x_2+ x_1) = 62

(2.6) **(a W c)** = 2100 + 620 + 16 = **2736**

(3) $\mathbf{x_2}$ = b W d = **19** [analog (2)...]

(4) $\mathbf{x_3}$ = (a + b) W (c + d) = **4161**

(5) $\mathbf{x_4}$ = x_3- (x_2+ x_1) = **1406**

(6) **(x W y)** = 27360000 + 140600 + 19 = **27500619**

Rekursives Karatsuba Programm:

Die Methode von Karatsuba lässt sich elegant rekursiv programmieren. Voraussetzung ist jedoch das Rechnen mit grossen (z.B. 100 und mehr stelligen) Zahlen. Die folgende Lösungsskizze in Pseudo-Code verwendet den Datentyp "*BigNumber*" sowie eine Operation "*ShiftLeft*(x, n)" [die Zahl *x* um *n* Stellen nach *links* schieben - effiziente Multiplikation mit 10^n].

```
PROCEDURE Karatsuba(n: INTEGER; x, y: BigNumber): BigNumber;
VAR
  a, b, c, d, x1, x2, x3: BigNumber;
BEGIN
  IF n = 1 THEN
    RETURN (x * y)
  ELSE
    "Berechne a, b, c, d";
    x1 := Karatsuba(n DIV 2, a, c);
    x2 := Karatsuba(n DIV 2, b, d);
    x3 := Karatsuba(n DIV 2, a+b, c+d) - (x1 + x2);
    RETURN(ShiftLeft(x1, n) + ShiftLeft(x3, n DIV 2) + x2);
  END; (* IF *)
END Karatsuba;
```

Lehrer-Lernkontrolle / Test

Aufgabe 1

Du kennst das *Verfahren von Karatsuba* für die Multiplikation von zwei Zahlen. Löse damit folgende Rechnung: **2718 W 316 = ?** Notiere die *einzelnen Schritte*, welche zum Resultat führen. Allfällige Zwischenresultate musst Du nicht mit dem Karatsuba-Verfahren berechnen. Die Aufgabe ist dann gut gelöst, wenn aus den einzelnen Schritten ersichtlich ist, wie das Verfahren funktioniert. Der *Weg* ist wichtiger als das Resultat!

Aufgabe 2

Dr. Seltsam hat ein neues Verfahren für die Multiplikation von zwei Zahlen entwickelt. Um zwei n-stellige Zahlen zu multiplizieren benötigt es *T(n)* = $n^{1.2}$ + 100 W n + 317 *einstellige Multiplikationen*. [Zur Erinnerung: die Schulmethode benötigt n^2 einstellige Multiplikationen und die Methode von Karatsuba $n^{1.59}$.] Vergleiche die Verfahren von Karatsuba und Dr. Seltsam. Welches Verfahren ist wann vorzuziehen?

Lösungen und Taxierung

Aufgabe 1

(1)	**n** = 4	(hier muss das Maximum von 3 und 4 genommen werden!)				
	a = 27,	**b** = 18,	**c** = 3,	**d** = 16		
(2)	$\mathbf{x_1}$	=	a W c	=	81	
(3)	$\mathbf{x_2}$	=	b W d	=	288	
(4)	$\mathbf{x_3}$	=	(a + b) W (c + d)	=	855	
(5)	$\mathbf{x_4}$	=	x_3- (x_2+ x_1)	=	486	
(6)	**2718 W 316**	=	810000 + 48600 + 288	=	**858888**	

Die Aufgabe verlangt vom Schüler eine Anpassung des Gelernten an eine leicht geänderte Problemstellung. Hier soll eine 3-stellige mit einer 4-stelligen Zahl multipliziert werden. Die Aufgabe ist deshalb als mindestens **K2** zu taxieren.

Aufgabe 2

Das Verfahren von Karatsuba benötigt $O(n^{1.59})$, das von Dr. Seltsam $O(n^{1.2})$ einstellige Multiplikationen. Bei sehr hohen Werten für *n* wird also das neue Verfahren besser abschneiden. Bei tieferen Werten für *n* ist allerdings der hohe *lineare Term* 100 W n im neuen Verfahren ausschlaggebend. Hier ist das Verfahren von Karatsuba besser. Die Wende (Schnittpunkt der beiden Kurven) tritt bei n = 2664 ein. Das Verfahren von Dr. Seltsam eignet sich also nur für die Multiplikation von sehr grossen (2664-stelligen und grösseren) Zahlen besser als das Verfahren von Karatsuba.

Um die Aufgabe zu lösen, muss die Schülerin wiederum Teile des Gelernten abändern und auf eine neue Situation anwenden. Die Aufgabe ist als **K3** zu taxieren.

Was soll ich hier tun?

Du kennst die Schulmethode, zwei Zahlen miteinander zu multiplizieren, das "schriftliche Multiplizieren". Zum Beispiel:

```
3 1 2 4   W   4 2 0 7   =       1 6 8 2 8
                                  8 4 1 4
                                4 2 0 7
                            1 2 6 2 1
                            ---------------
                            1 3 1 4 2 6 6 8
                            ===============
```

Jede Ziffer der ersten Zahl wird mit jeder Ziffer der zweiten Zahl multipliziert, dann wird zusammengezählt. Ist n die Anzahl Ziffern der zu multiplizierenden Zahlen (hier: $n = 4$), dann benötigt dieses Verfahren n^2 einstellige Multiplikationen, um das Resultat zu berechnen. Geht das auch "*schneller*"?

Hier lernst Du das **Verfahren von Karatsuba** kennen. Es basiert auf dem Prinzip *Divide et Impera* (oder *Divide and Conquer* - "Teile und Herrsche") und benötigt nur $n^{1.59}$ einstellige Multiplikationen zur Berechnung des Resultats. Der Posten besteht aus den folgenden drei Aufträgen:

(1) Studiere die **Theorie** "*Schnelle Multiplikation: Das Verfahren von Karatsuba*" (20 - 30 Minuten)

(2) Löse "von Hand" folgende Multiplikation **7201 W 3819 = ?** Verwende das *Verfahren von Karatsuba* zur Berechnung des Resultats. Löse auch die in den Teilschritten (vgl. Theorie: *Zusammenfassung*) zu berechnenden Multiplikationen nach Karatsuba. Deine Lösung ist gut, wenn der Weg in etwa den Teilschritten im Theorieteil entspricht, und wenn das Resultat korrekt ist. (5 - 10 Minuten)

(3) Vergleiche die Methode von Karatsuba mit der Schulmethode. Programmiere auf dem Computer oder Taschenrechner folgende Funktion:

In:	**n**	Anzahl Stellen der zu multiplizierenden Zahlen
	$\mathbf{t_o}$	Zeit, die der Computer für eine einstellige Multiplikation benötigt. (z.B. 10^{-4} s)
Out:	$\mathbf{t_s}$	benötigte Zeit mit der Schulmethode
	$\mathbf{t_k}$	benötigte Zeit mit der Methode von Karatsuba

Diskutiere die berechneten Resultate! (10 - 15 Minuten)

Den Theorieteil sollte jeder für sich studieren. Die Aufträge (2) und (3) könnt Ihr, wenn Ihr wollt, auch in Gruppen (2 oder 3) bearbeiten.

Das Verfahren von Karatsuba

Grundoperationen wie die Multiplikation zweier Zahlen werden in einem grösseren Computerprogramm zu Tausenden ausgeführt. Es ist deshalb wichtig, dass solche Operationen *effizient* implementiert werden. Wie multipliziert man zwei *n*-stellige Zahlen? Die Schulmethode ("schriftliche Multiplikation") tut das so:

```
3 1 2 4   W   4 2 0 7   =       1 6 8 2 8
                           8 4 1 4
                         4 2 0 7
                      1 2 6 2 1
                      ---------------
                      1 3 1 4 2 6 6 8
                      ===============
```

Die Effizienz unserer Methode hängt davon ab, wieviele *Elementarschritte* zur Berechnung des Resultats nötig sind. Jede Ziffer der ersten Zahl wird mit jeder Ziffer der zweiten Zahl multipliziert. Wir benötigen mit der Schulmethode also n^2 einstellige (oder *elementare*) Multiplikationen und einige Additionen, um zwei Zahlen von je *n* Ziffern miteinander zu multiplizieren.

Eine einstellige Multiplikation wird aus Additionen zusammengesetzt. ("4 mal 5" wird berechnet, indem man viermal die Zahl fünf addiert.) Einstellige Multiplikationen sind also eher "teuer", einstellige Additionen eher "billig". In der Folge interessiert uns daher, wieviele *einstellige Multiplikationen* wir brauchen, um zwei *n*-stellige Zahlen miteinander zu multiplizieren. Diese Zahl, welche natürlich von der Anzahl Stellen *n* abhängt, nennen wir *T(n)*.

Divide et Impera!

"Teile auf und herrsche!" sprach schon der grosse Stratege Julius Caesar. Dieses Prinzip hat auch in der Informatik eine grosse Bedeutung. Wir teilen ein grosses Problem auf in kleinere Teilprobleme. Diese können wir auf einfachere Art lösen. Schliesslich "setzen wir die Teillösungen wieder zusammen" und erhalten die Lösung des ursprünglichen Problems.

Teilen wir unsere 4-stelligen Zahlen doch einfach in 2-stellige auf! 3124 wird zu $31 \; W \; 10^2 + 24$, 4207 zu $41 \; W \; 10^2 + 07$. Die Multiplikation mit 10^n verstehen wir auch als "um *n* Stellen nach links schieben". Wir teilen also die *n*-stelligen Zahlen x und y auf in

$$x = a \; W \; 10^{n/2} + b \quad \text{und}$$

$$y = c \; W \; 10^{n/2} + d.$$

Aus x W y wird dann:

$$x \; W \; y = (a \; W \; c) \; W \; 10^n + ((b \; W \; c) + (a \; W \; d)) \; W \; 10^{(n/2)} + b \; W \; d \qquad (1)$$

Und unsere Multiplikation wird berechnet als:

```
 [    |    ]   X   [    |    ]   =           a x d [ 02   17 ]
   a    b            c    d          a x c [ 13   02 | 01   68 ] b x d
                                             b x c [ 10   08 ]
                                           ______________________
                                             13   14   26   68
                                           ======================
```

Auf den ersten Blick haben wir nicht viel gewonnen. Wir haben eine Multiplikation von zwei *n*-stelligen Zahlen ersetzt durch vier Multiplikationen von Zahlen der Länge (n/2). Der Aufwand an elementaren Multiplikationen bleibt nämlich gleich! Denn 4W $(n/2)^2$ ist ja gleich n^2. Doch hier gibt es einen Trick! Es gilt nämlich:

$$(a + b) \text{ W } (c + d) \quad = \quad (a \text{ W } c) + (a \text{ W } d) + (b \text{ W } c) + (b \text{ W } d) \qquad (2)$$

Rechnen wir also zuerst (a W c) und (b W d) aus, dann erhalten wir die Summe (a W d) + (b W c) aus der Differenz (a + b) W (c + d) - ((a W c) + (b W d)). Diese Summe entspricht genau dem Koeffizienten von 10^n in der Formel (1)! Wir können also die Multiplikation von zwei *n*-stelligen Zahlen mit nur *drei* (n/2)-stelligen Multiplikationen und einigen "billigen" Additionen berechnen. Der Aufwand *T(n)* an elementaren Multiplikationen berechnet sich nun als

$$T(n) \;=\; 3 \text{ W } (n/2)^2 \;=\; 3/4 \text{ W } n^2$$

Ist das alles?! Wir sind zwar um ein Viertel "besser", aber viel lieber möchten wir doch die Potenz von *n* verringern! Was würde Caesar tun? Nun, Teilen und Herrschen natürlich! Berechnen wir doch die drei (n/2)-stelligen Multiplikationen auch wieder mit der neuen Methode! Das ergibt neun (n/4)-stellige Multiplikationen. Und diese teilen wir wieder... Wir teilen so lange, bis es nichts mehr zu teilen gibt, also bis wir nur noch einstellige Multiplikationen berechnen müssen! Und der Aufwand *T(n)*? Nun, wir haben also

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \text{ W } T(n/2) \\ &= 9 \text{ W } T(n/4) \\ &= 27 \text{ W } T(n/8) \\ &\;\;\ldots \\ &= 3^{\log_2(n)} \text{ W } T(1) \end{aligned}$$

Wir können nämlich $\log_2(n)$ mal teilen und erhalten genau so viele Zeilen in unserer Rechnung. Und T(1)? Das ist ja gerade der Aufwand für eine einstellige Multiplikation! Eine *n*-stellige Multiplikation benötigt also mit unserer (Caesar / Karatsuba) Methode $3^{\log_2(n)}$ einstellige Multiplikationen. Formen wir das noch ein bisschen um!

$$\log_2(n) \;=\; \log_3(n) / \log_3(2) \qquad 1.59 \text{ W } \log_3(n) \;=\; \log_3(n^{1.59})$$

$$T(n) \;=\; 3^{\log_3(n^{1.59})} \;=\; n^{1.59} \qquad (3)$$

Diese Methode zur Multiplikation zweier Zahlen wurde 1962 von A. Karatsuba und Y. Ofman veröffentlicht. Sie benötigt nur $n^{1.59}$ einstellige Multiplikationen und ist deshalb für eine Computer-Anwendung besser geeignet als die Schulmethode mit n^2 einstelligen Multiplikationen.

Zusammenfassung: Die Schnelle Multiplikation

Aufgabe:

multipliziere zwei *n*-stellige Zahlen x und y

Methode von Karatsuba:

(1) bestimme die Anzahl Stellen ***n*** und teile die Zahlen x und y auf in

$x = \mathbf{a}\ W\ 10^{(n/2)} + \mathbf{b}$ und $y = \mathbf{c}\ W\ 10^{(n/2)} + \mathbf{d}$

(2) berechne $\mathbf{x_1} = (a\ W\ c)$ [ebenfalls nach der Methode von Karatsuba!]

(3) berechne $\mathbf{x_2} = (b\ W\ d)$

(4) berechne $\mathbf{x_3} = (a + b)\ W\ (c + d)$

(5) berechne die Differenz $\mathbf{x_4} = \mathbf{x_3} - (\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})$

(6) Das Resultat x W y berechnet sich nun als:

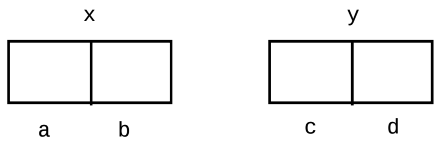
$$\mathbf{(x\ W\ y)} = \mathbf{x_1}\ W\ 10^n + \mathbf{x_4}\ W\ 10^{(n/2)} + \mathbf{x_2}$$

[Eine Multiplikation mit 10^n bedeutet "um *n* Stellen nach links schieben".]

Beispiel:

x = 3124, y = 4207, berechne x W y

(1) **n** = 4, **a** = 31, **b** = 24, **c** = 42, **d** = 7



(2) $\mathbf{x_1}$ = 31 W 42 = 1302

(3) $\mathbf{x_2}$ = 24 W 7 = 168

(4) $\mathbf{x_3}$ = (31 + 24) W (42 + 7) = 2695

(5) $\mathbf{x_4} = \mathbf{x_3} - (\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})$ = 1225

(6) **x W y** = 13020000 + 122500 + 168 = **13142668**