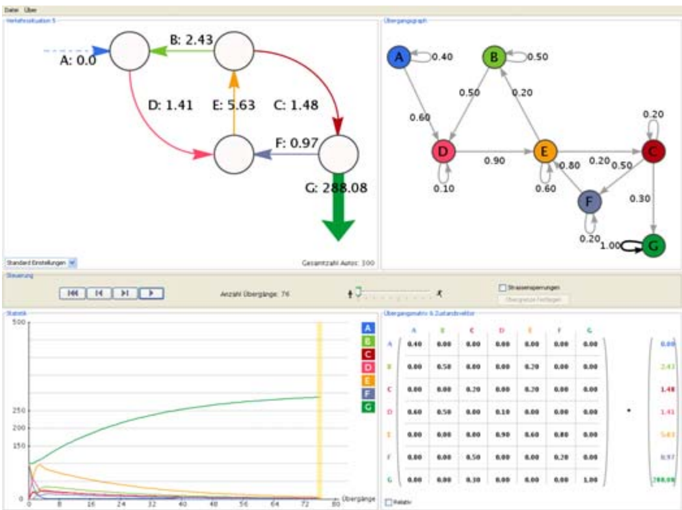
DynaTraffic – Modelle und mathematische Prognosen

Simulation der Verteilung des Verkehrs mit Hilfe von Markov-Ketten



Worum geht es?

- Modelle von Verkehrssituationen
- Graphen:
  - Kanten, Knoten
  - Matrixdarstellung
  - Vektordarstellung
- Markov-Ketten
  - Zustände, Übergangswahrscheinlichkeiten
  - Spezielle Zustände: Periodische, absorbierende oder transiente
  - Stationäre Verteilung
- Matrix-Vektor Multiplikation

⇨ DynaTraffic hilft beim Verstehen dieser Begriffe

Das Ziel: Verkehrssystem analysieren

Uns interessiert die Frage:

„Wie viele Autos befinden sich zu einer bestimmten Zeit auf einer Spur?"

Um über die Entwicklung eines Systems Aussagen machen zu können, brauchen wir ein Modell.
D.h. zuerst erstellen wir ein Modell und dann steuern und beobachten wir das Modell.

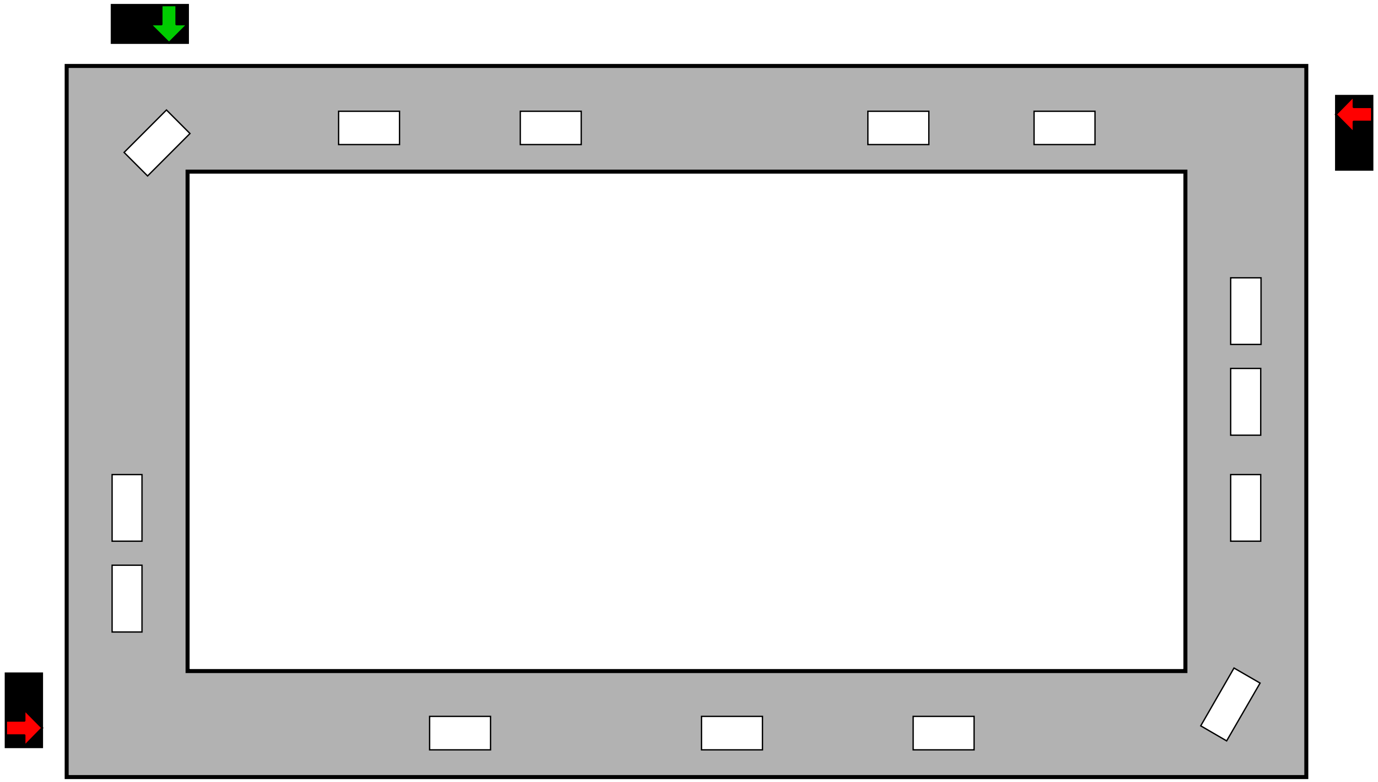
Mathematische Prognosen
Schritt 1

Modell einer Alltagssituation erstellen

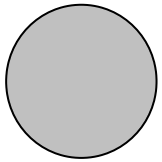
Photo aus der Seitenperspektive

Photo vom Aufriss

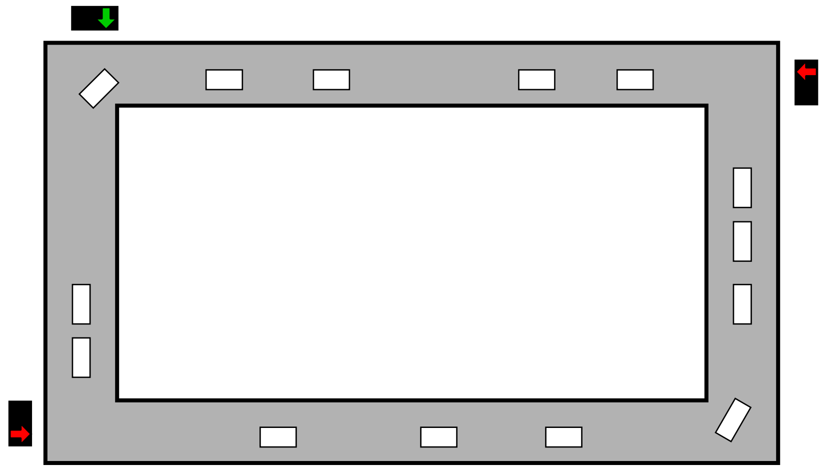
Modell vom Aufriss, mit Autos



Elemente für Modell ohne Autos

Knoten 

Pfeile 

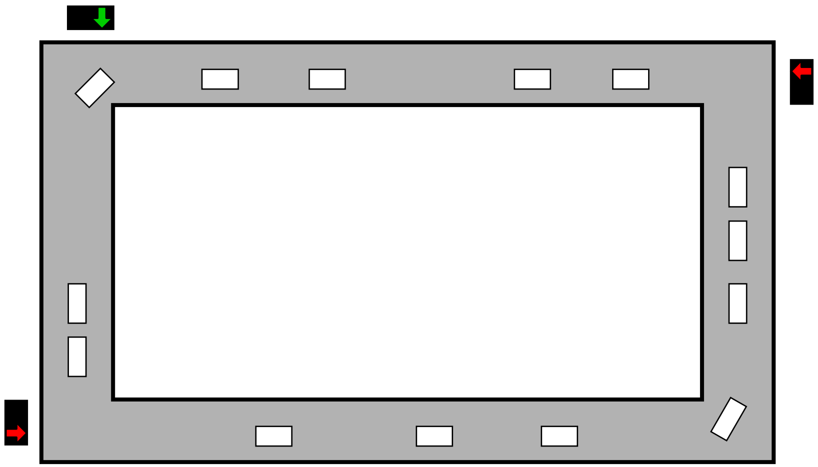


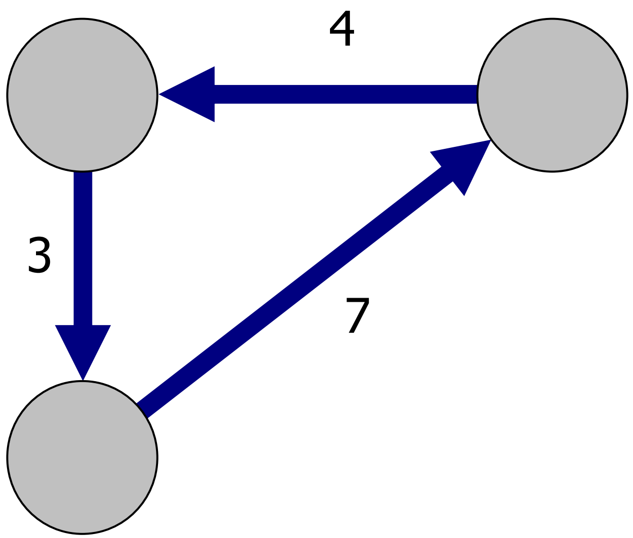
→ Wie sieht Dein Modell aus?

Modell vom Aufriss, ohne Autos

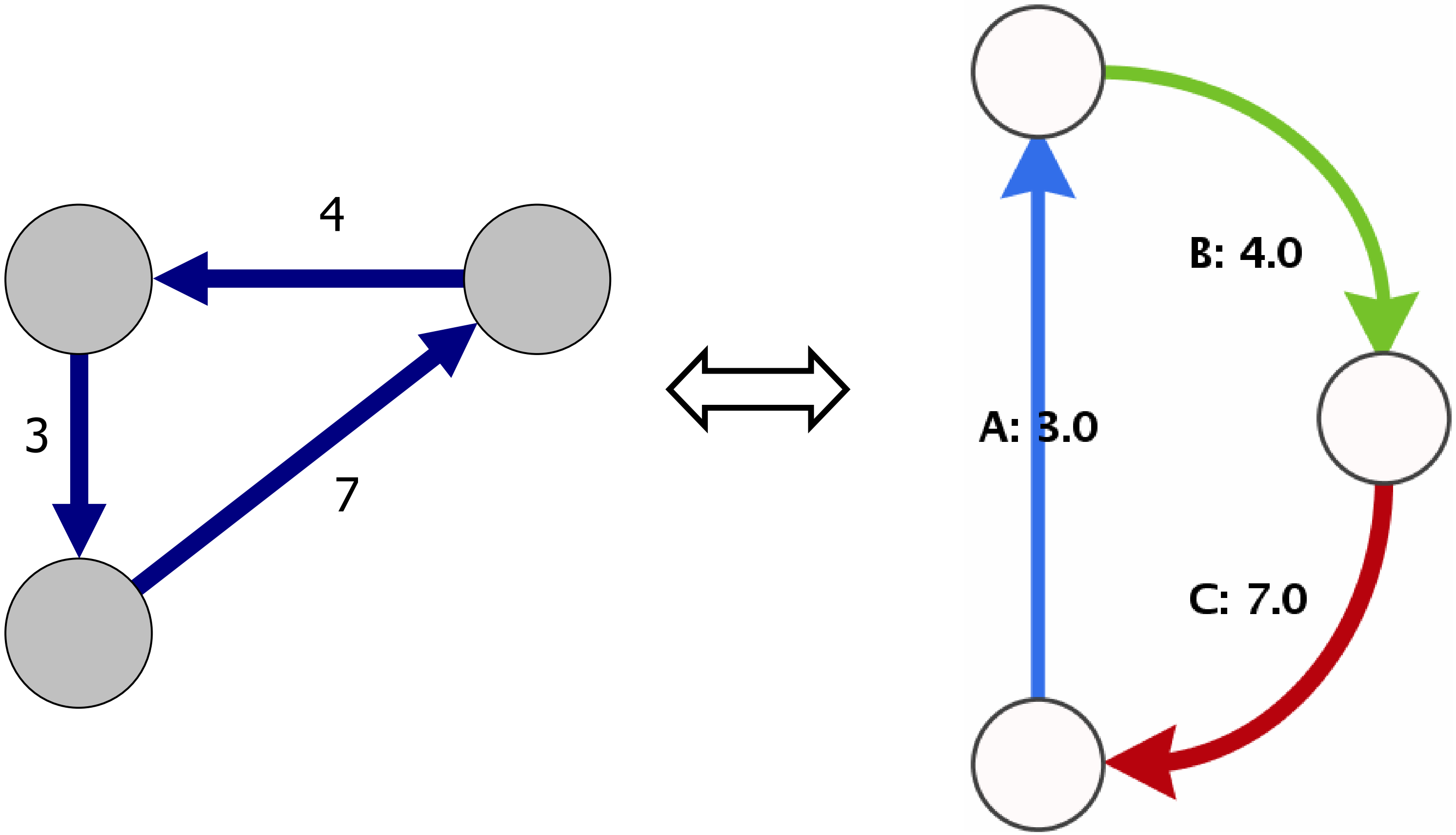
Stopp-Punkte ⇨ Knoten

Spuren ⇨ Kanten





Darstellung in DynaTraffic



- Buchstaben zur Beschriftung der Spuren
- Farbige Pfeile und etwas andere Anordnung

Modelle

- Warum macht man Modelle?
  - Um Systeme besser zu verstehen
  - Modelle sind Hilfsmittel, um ein System zu untersuchen

- Definition Modell: Ein vereinfachendes Abbild der Wirklichkeit. (Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Modell_(Begriff))
- Mathematische Modelle versuchen, die wesentlichen Parameter von natürlichen Phänomenen zu erfassen und diese zur Vorhersage des beobachteten Systems zu nutzen.
  (Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Modell)

Mathematische Prognosen
Schritt 2

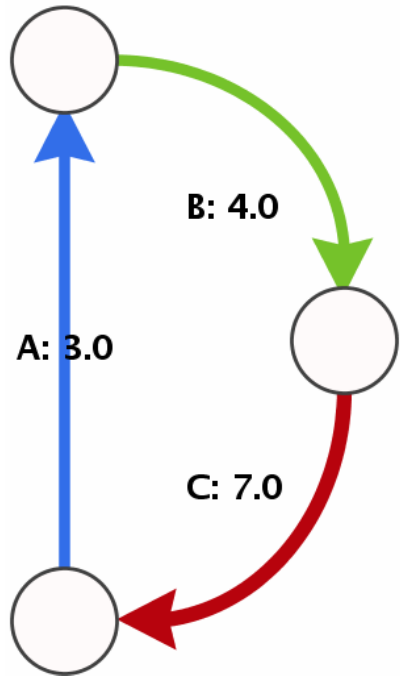
Umwandlung des Modells

Warum eine Umwandlungsmethode?

Wir betrachten den Verkehr auf den einzelnen Spuren und analysieren diesen mittels eines Markov-Modells.

⇨ Dazu müssen die Spuren Knoten sein

⇨ Umwandlung des Situationsgraphen!



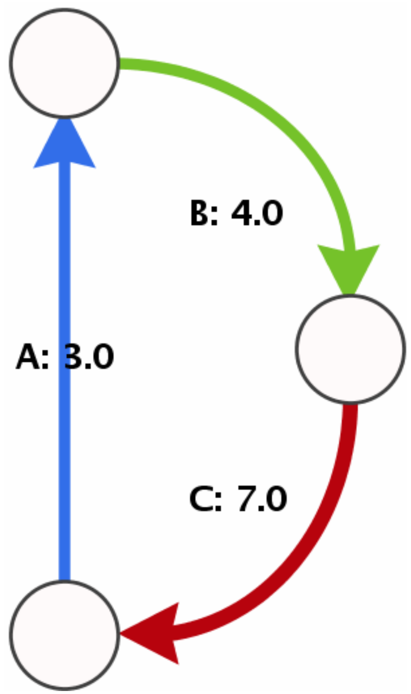
Umwandlungsrezept

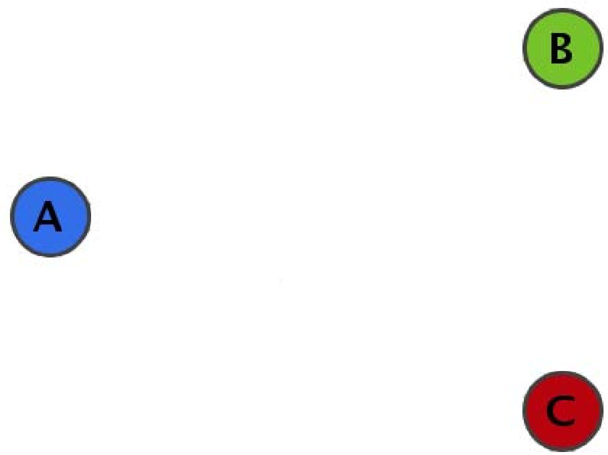
Umwandlung Situationsgraph in Kantengraph:

- Aus jeder Kante wird ein Knoten.
- Zwischen zwei Knoten gibt es eine Kante, falls man in der Verkehrssituation von der einen Spur auf die andere wechseln kann.
- Jeder Knoten hat eine Kante zu sich selbst.

Umwandlung Schritt a)

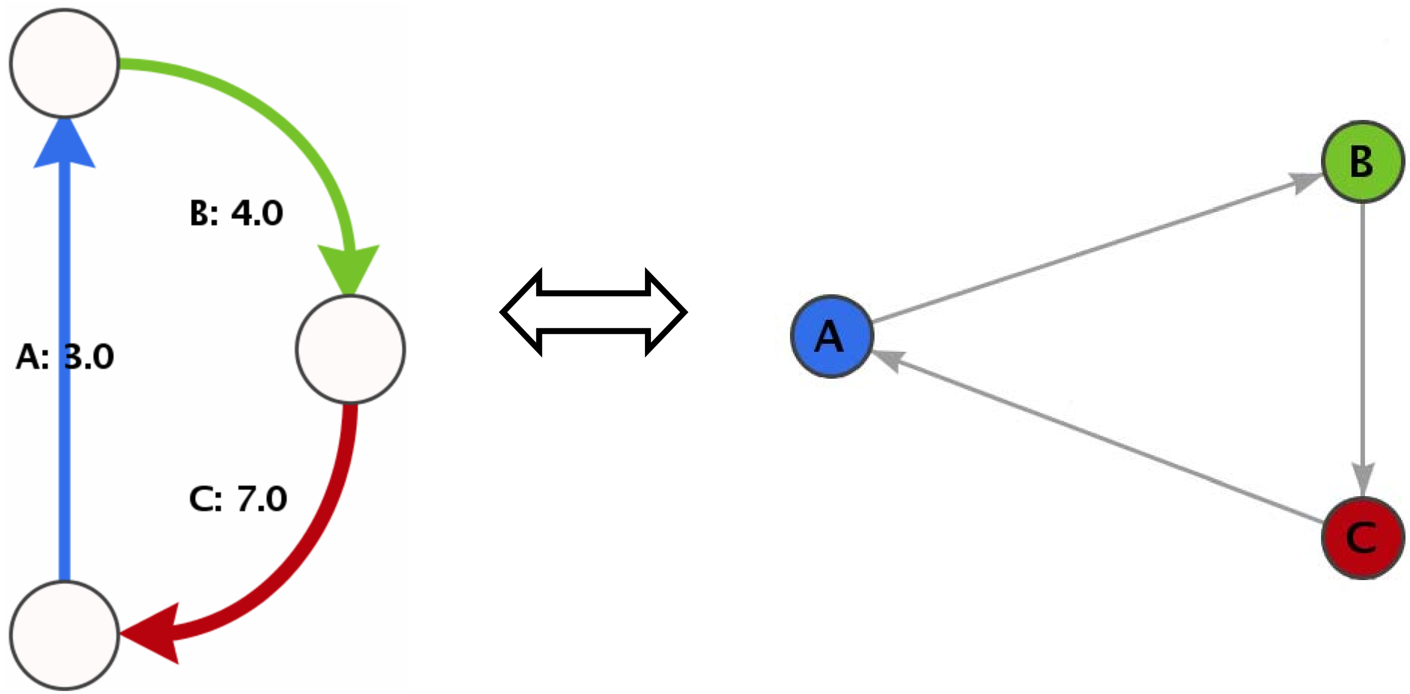
Aus jeder Kante wird ein Knoten.





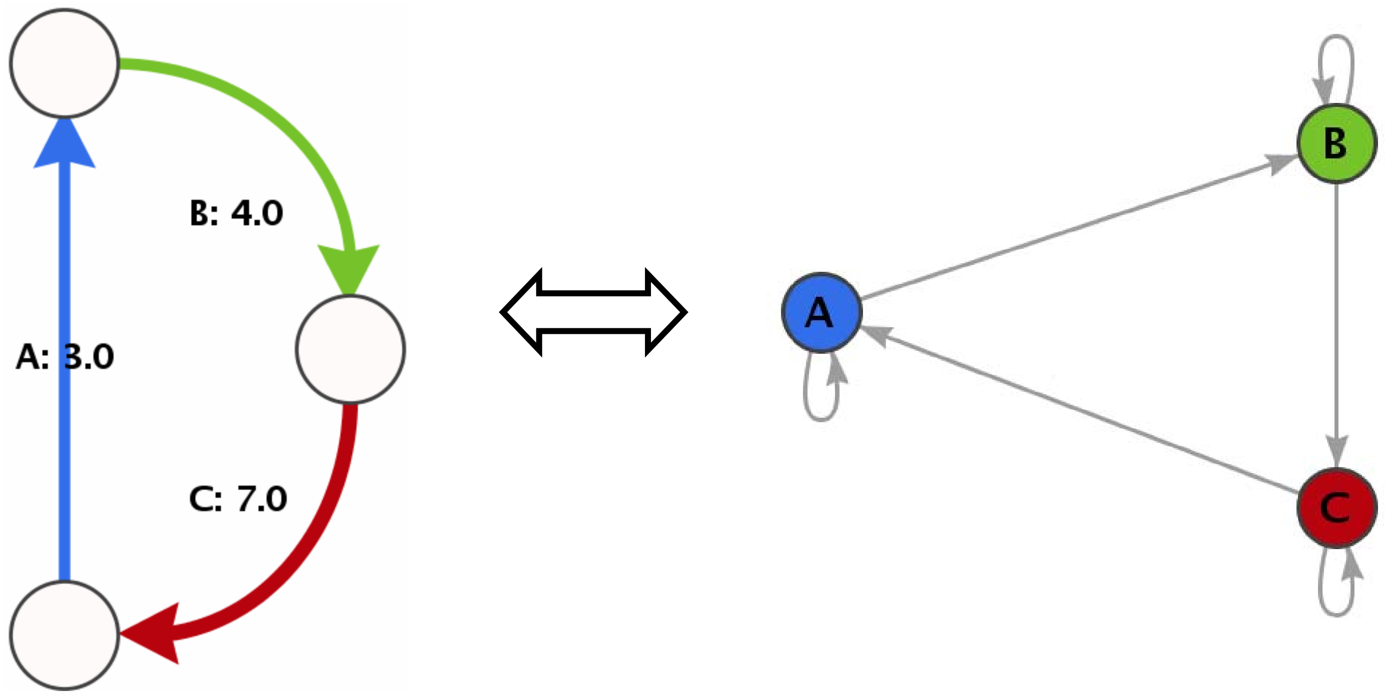
Umwandlung Schritt b)

Zwischen zwei Knoten gibt es eine Kante, falls man in der Verkehrssituation von der einen Spur auf die andere wechseln kann.



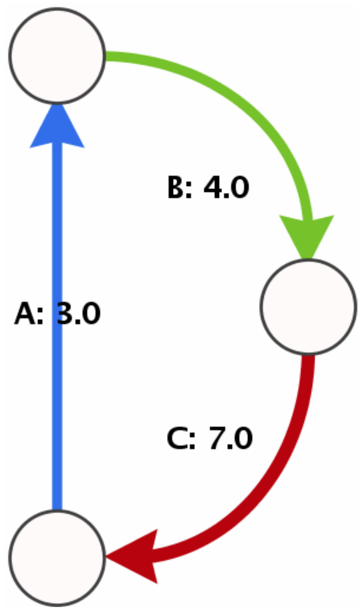
Umwandlung Schritt c)

Jeder Knoten hat eine Kante zu sich selbst.
D.h. ein Auto kann auch auf einer Spur bleiben!



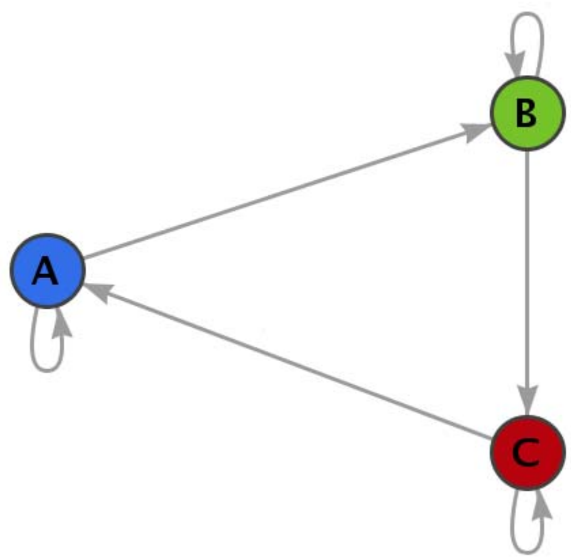
Die guten Neuigkeiten zur Umwandlung ☺

Diese Umwandlung müssen wir nicht selber machen, sie ist in DynaTraffic schon gemacht. Wir sollten sie jedoch verstehen…



Situationsgraph

$\Longleftrightarrow$



Kantengraph zum Situationsgraph

Mathematische Prognosen
Schritt 3

Annahmen treffen

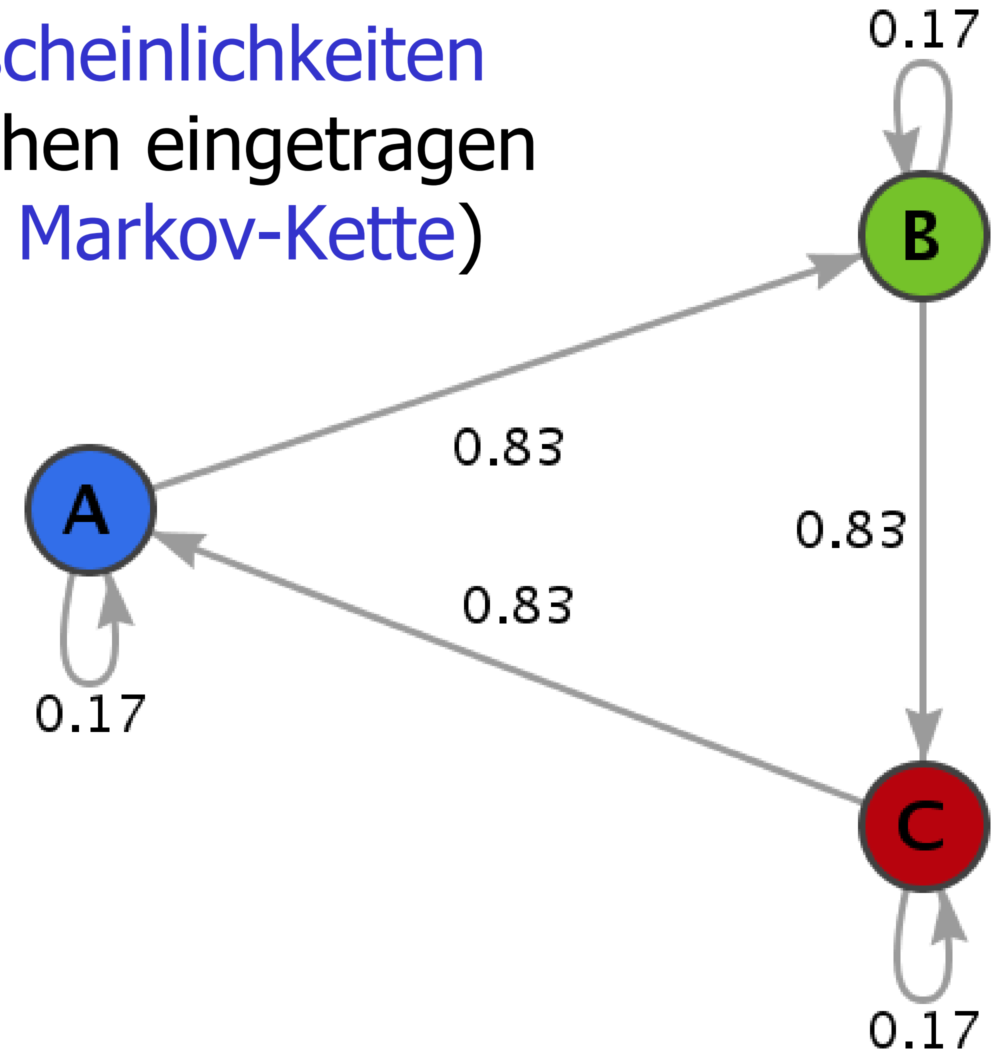
Ablauf definieren

- Jedes Auto trifft alle 10 Sekunden eine Entscheidung mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (sog. Übergangswahrscheinlichkeit):
  - „Ich fahre auf eine andere Spur"
  - „Ich bleibe auf dieser Spur"

- Die Umsetzung der Entscheidung nennt man einen Übergang: Autos wechseln ggf. ihren Zustand.

Der Übergangsgraph

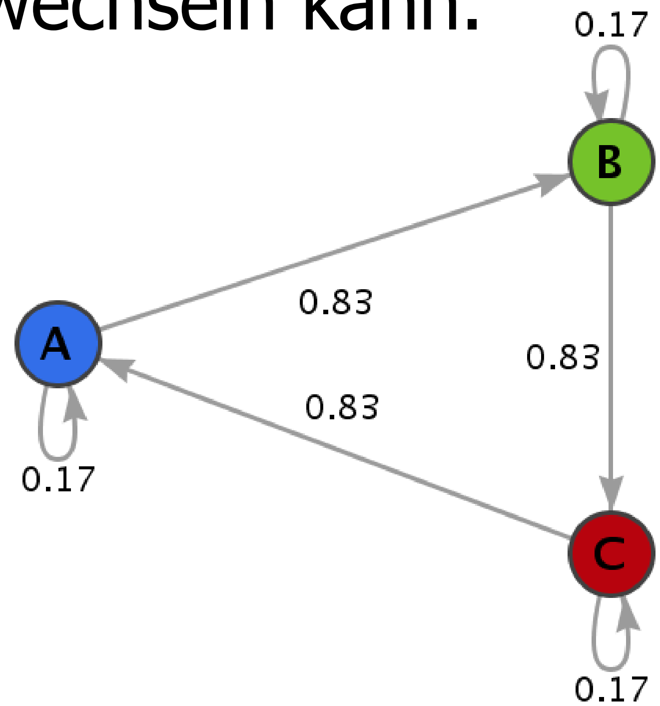
Diese Übergangswahrscheinlichkeiten werden im Kantengraphen eingetragen
⇨ Übergangsgraph (= Markov-Kette)



Unsere Markov-Kette

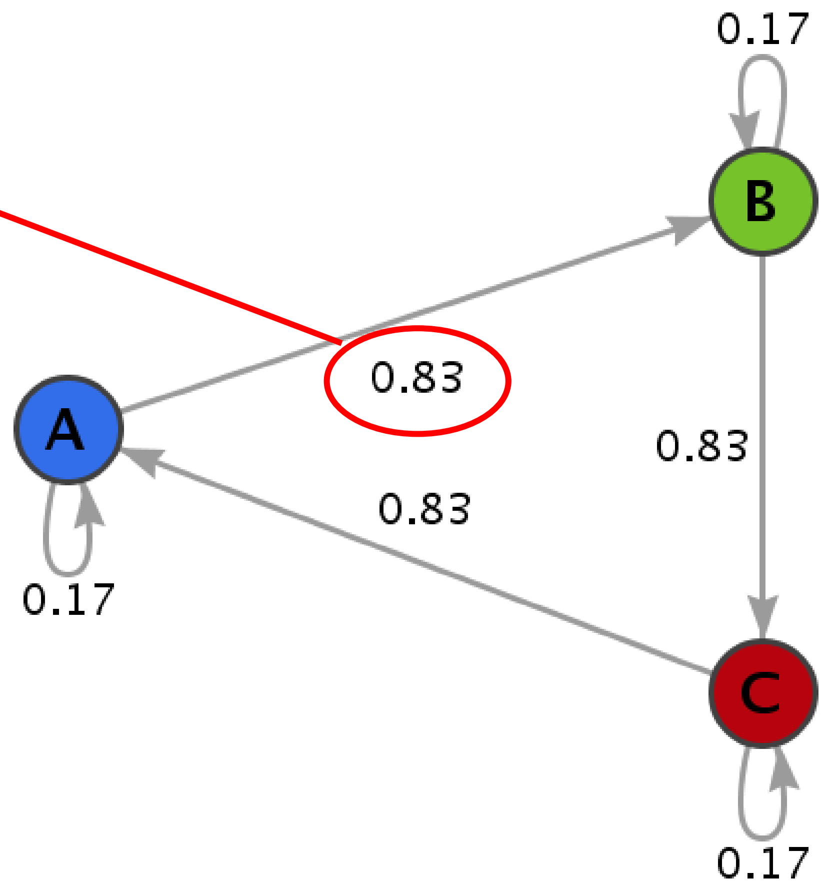
Die Knoten stehen für mögliche Zustände, also Spuren auf denen sich ein Auto befinden kann.

Die Kanten zeigen an, auf welche anderen Spuren ein Auto von einer Spur aus wechseln kann.



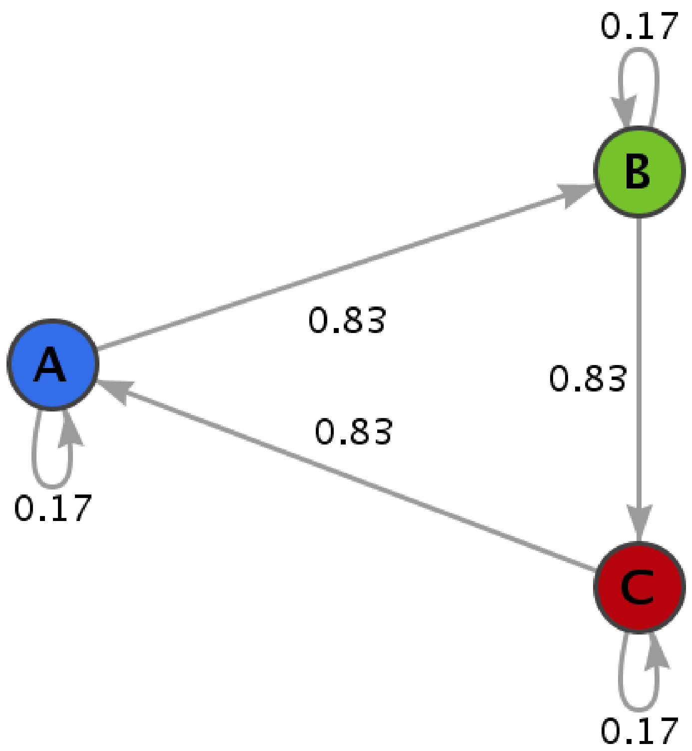
Bedeutung der Übergangswahrscheinlichkeit?

„Befindet sich ein Auto jetzt auf der Spur A wechselt es mit einer Wahrschein-lichkeit von 83% auf die Spur B."



Alternative Darstellung des Übergangsgraphen

Übergangsgraph



$\Leftrightarrow$

Übergangsmatrix

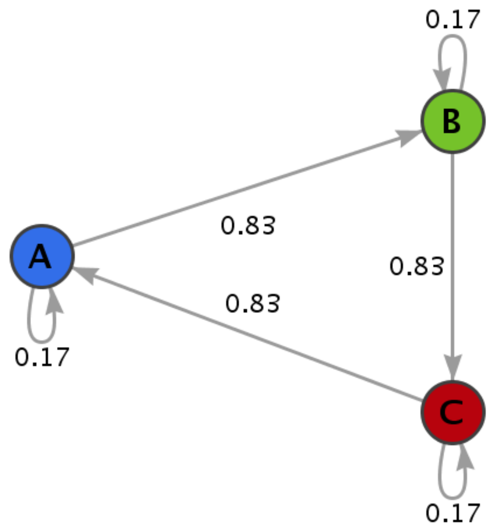
$$
\begin{array}{c|ccc}
 & A & B & C \\
\hline
A & & & \\
B & & \left(\begin{matrix} 0.17 & & 0.83 \\ 0.83 & 0.17 & \\ & 0.83 & 0.17 \end{matrix}\right) & \\
C & & &
\end{array}
$$

Wie liest man die Übergangsmatrix?

Von

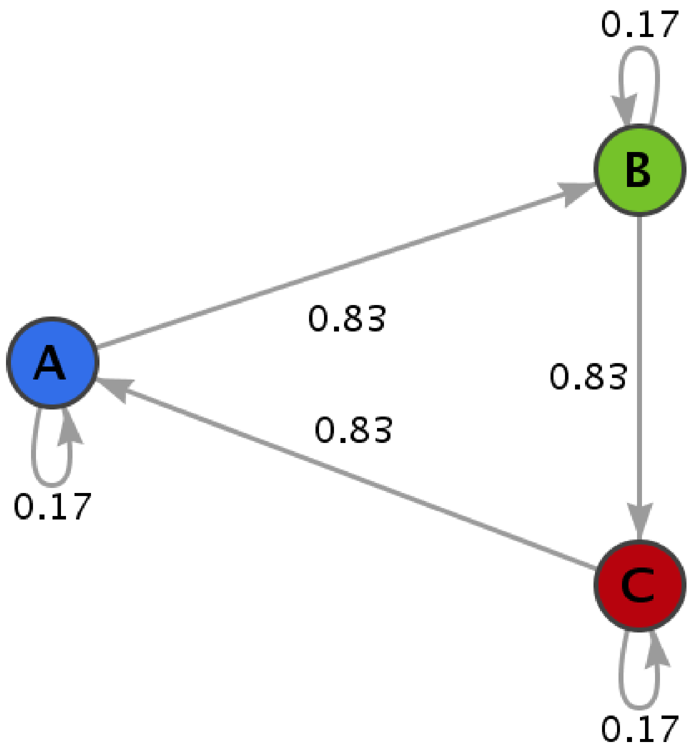
Nach

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad A \quad & \quad B \quad & \quad C \quad \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0.17 & & 0.83 \\ 0.83 & 0.17 & \\ & 0.83 & 0.17 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



Leere Einträge in der Übergangsmatrix?

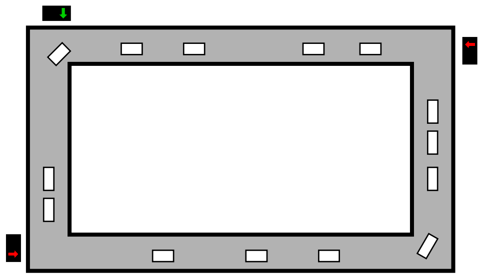
Existiert eine Kante nicht, steht eine 0 in der Übergangsmatrix.



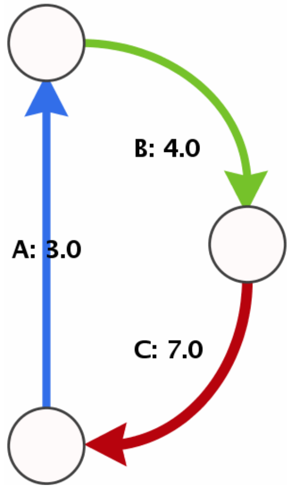
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0.17 & \boxed{0.00} & 0.83 \\ 0.83 & 0.17 & \boxed{0.00} \\ \boxed{0.00} & 0.83 & 0.17 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Zusammenfassung: Unser Verkehrsmodell

Photo



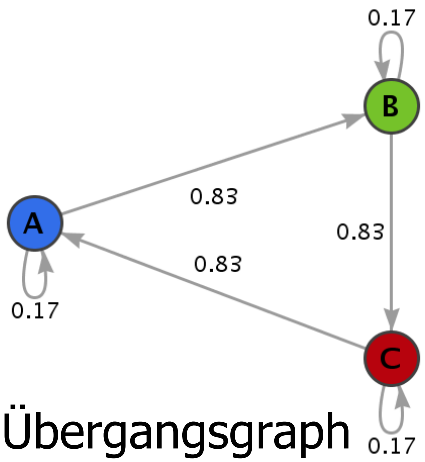
Modell mit Autos



Modell ohne Autos

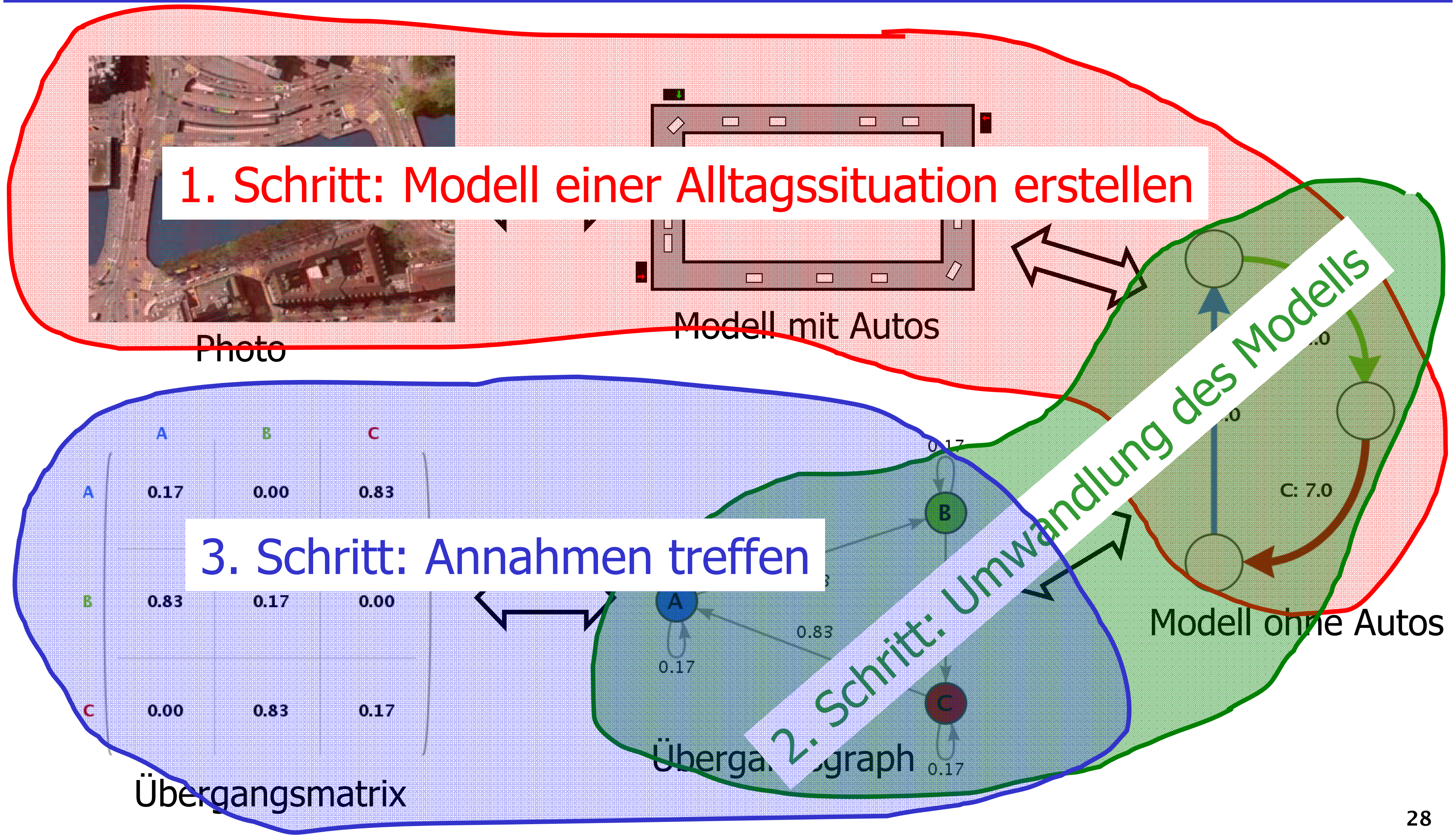
	A	B	C
A	0.17	0.00	0.83
B	0.83	0.17	0.00
C	0.00	0.83	0.17

Übergangsmatrix

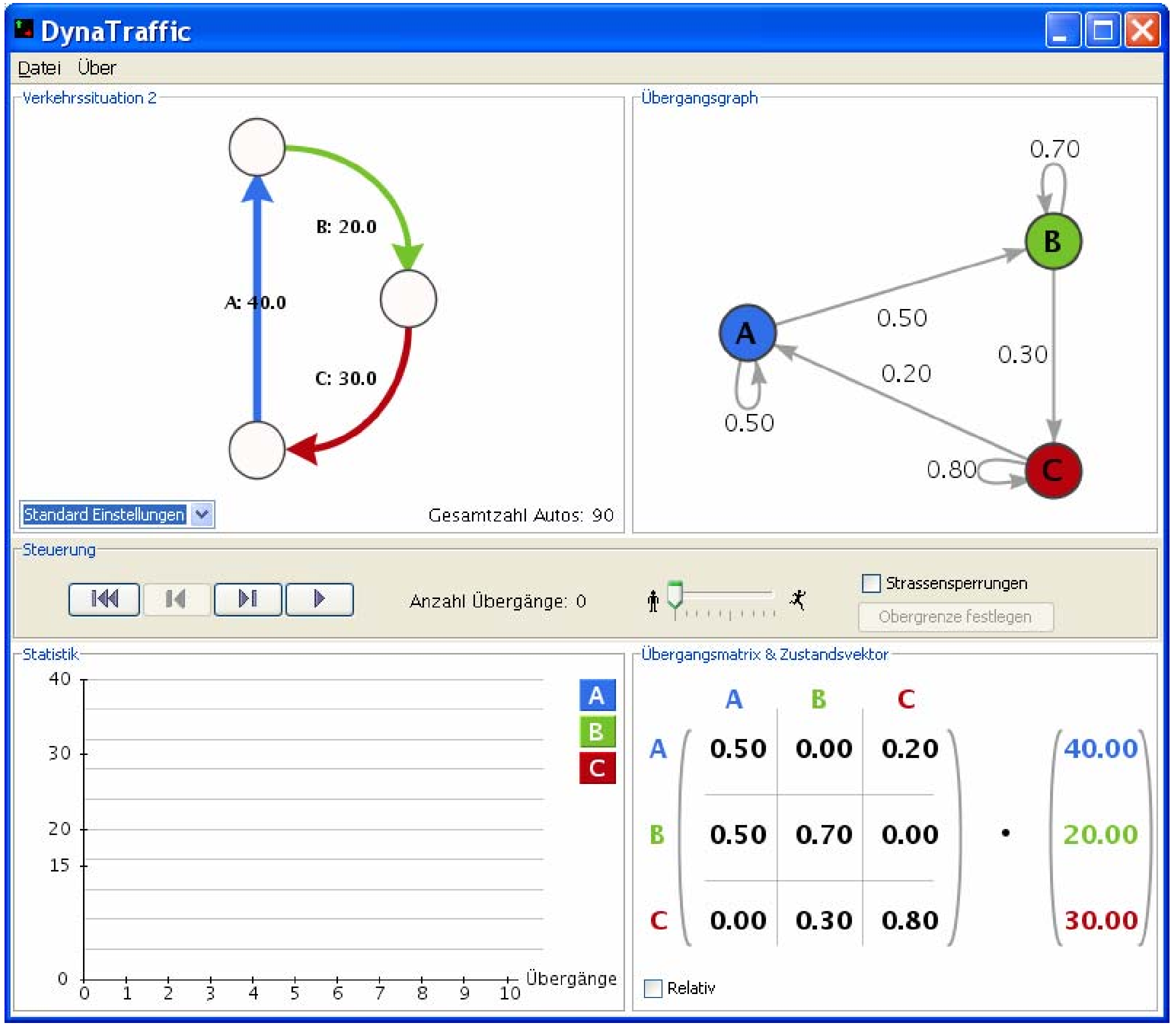


Übergangsgraph

Zusammenfassung: Unser Verkehrsmodell



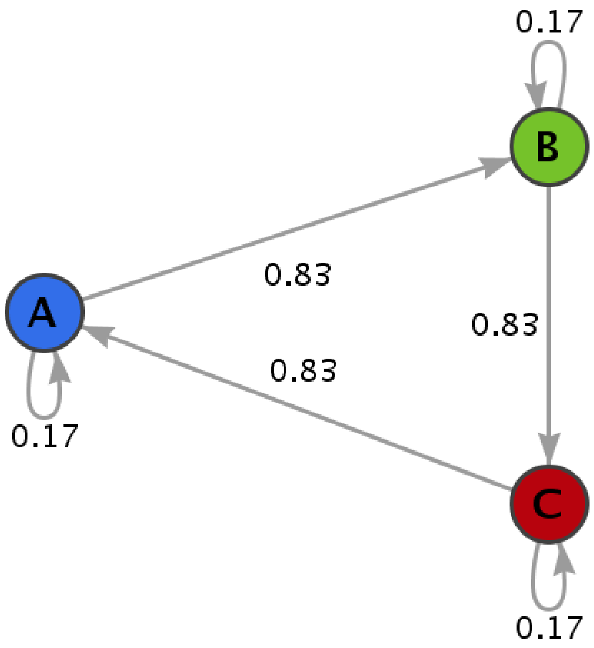
Demo DynaTraffic



Nochmals unsere Markov-Kette

Die Knoten stehen für mögliche Zustände, also Spuren auf denen sich ein Auto befinden kann.

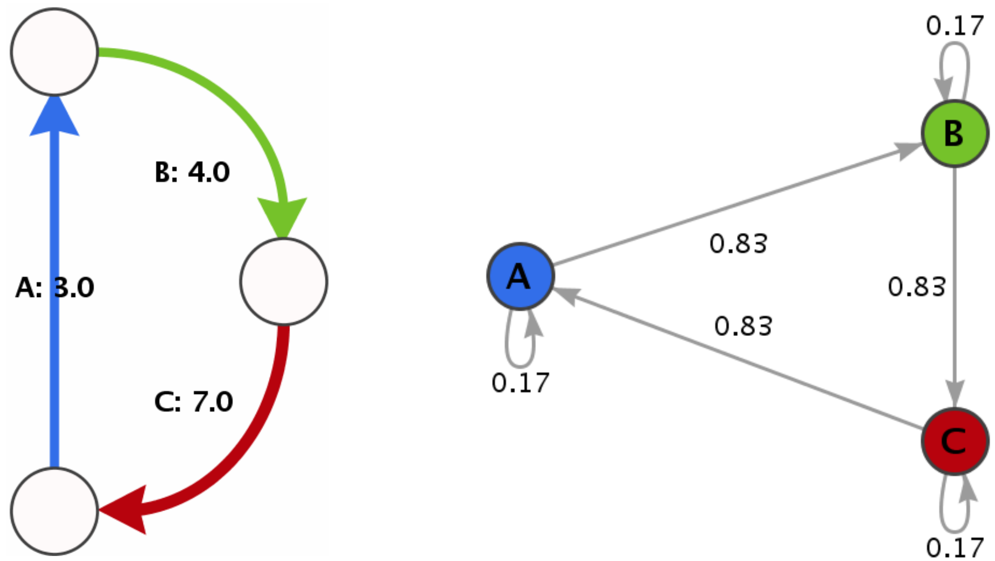
Die Kanten zeigen an, auf welche anderen Knoten ein Auto vom einer Knoten aus wechseln kann, und mit welcher Wahrscheinlichkeit das pro Übergang passiert.



„Einen Übergang machen“?

Um zu berechnen, wie viele Autos im nächsten Schritt auf einer Spur sein werden, braucht man:

- Die Anzahl Autos auf den einzelnen Spuren.
- Die Wahrscheinlichkeiten, die auf diese Spur führen.



Wie viele Autos befinden sich nach dem nächsten Übergang auf Spur A?

Autos auf den einzelnen Spuren:

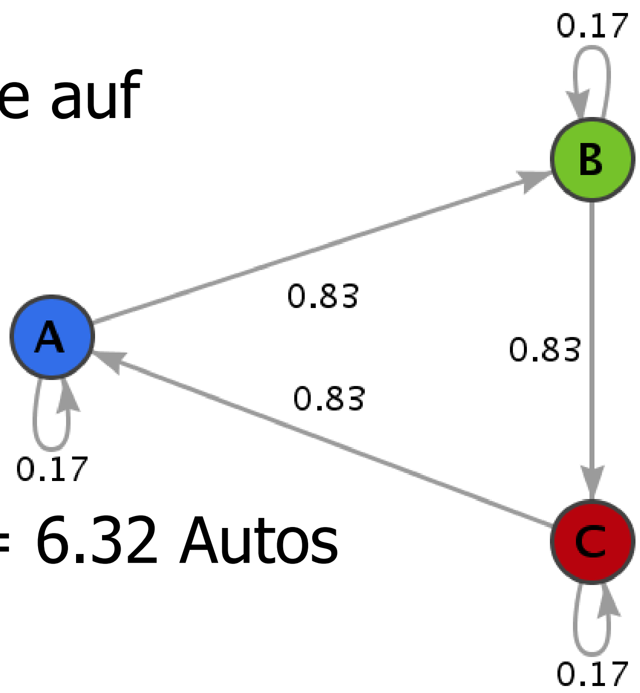
A: 3 Auto
B: 4 Autos
C: 7 Autos

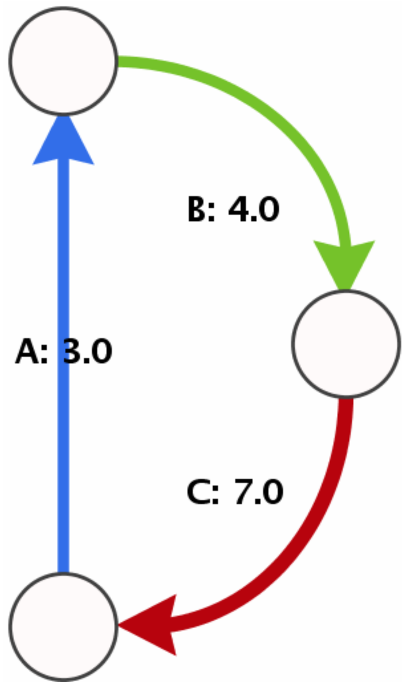
Wahrscheinlichkeiten die auf Spur A führen:

A → A : 0.17
C → A : 0.83

Rechnung:

$3 * 0.17 + 7 * 0.83 = 6.32$ Autos





Wahrscheinlichkeiten für Übergang

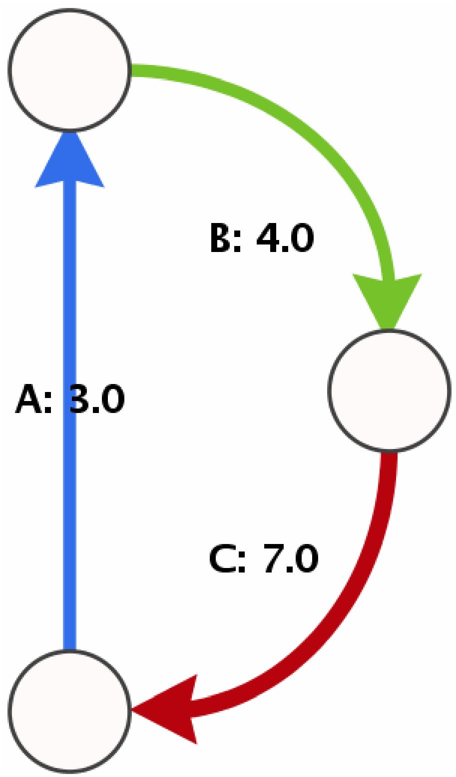
Die benötigten Wahrscheinlichkeiten kann man direkt aus der Übergangsmatrix ablesen!

$$3 * 0.17 + 7 * 0.83 = 6.32 \text{ Autos}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & \boxed{0.17 \quad 0.00 \quad 0.83} & & \\ B & 0.83 & 0.17 & 0.00 \\ C & 0.00 & 0.83 & 0.17 \end{array}$$

Zustandsvektor

Die Anzahl Autos pro Spur in Vektor-Schreibweise:



$$\begin{pmatrix} 3.00 \\ 4.00 \\ 7.00 \end{pmatrix}$$

Übergänge berechnen

Bereits gesehen: 1. Zeile der Übergangsmatrix multipliziert mit aktueller Anzahl Autos auf erster Spur (= 1. Eintrag des Zustandsvektors) ergibt neue Anzahl Autos auf erster Spur.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{0.17 \quad 0.00 \quad 0.83} \\ 0.83 \quad 0.17 \quad 0.00 \\ 0.00 \quad 0.83 \quad 0.17 \end{pmatrix} \end{array}
\cdot
\begin{pmatrix} \boxed{3.00} \\ 4.00 \\ 7.00 \end{pmatrix}$$

Übergänge kompakt berechnen

Mit einer Matrix–Vektor Multiplikation kann man für alle Spuren gleichzeitig einen Übergang berechnen!

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & & & \\ B & & & \\ C & & & \end{array}\quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 0.17 & 0.00 & 0.83 \\ 0.83 & 0.17 & 0.00 \\ 0.00 & 0.83 & 0.17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.00 \\ 4.00 \\ 7.00 \end{pmatrix}$$

Matrix – Vektor Multiplikation

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} &
\begin{pmatrix}
0.20 & 0.00 & 0.90 & 0.30 & 0.00 \\
0.10 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.70 & 0.40 \\
0.70 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.60
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{pmatrix}
1.00 \\ 100.00 \\ 50.00 \\ 200.00 \\ 1.00
\end{pmatrix}
$$

$$\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc = \bigcirc$$

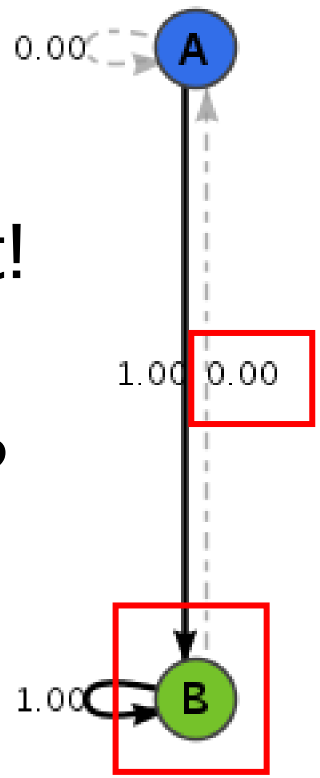
Eigenschaften des Übergangsgraphen

Aufgrund der Übergangswahrscheinlichkeiten kann man bestimmte Zustände eines Übergangsgraphen klassifizieren. Zustände können absorbierend, periodisch oder transient sein.

Im weiteren gibt es stationäre Verteilungen und irreduzible Übergangsgraphen.

Absorbierender Zustand

Ein Zustand, aus dem kein Übergang mit positiver Wahrscheinlichkeit herausführt



⇨ Mit der Zeit sammeln sich alle Autos dort!

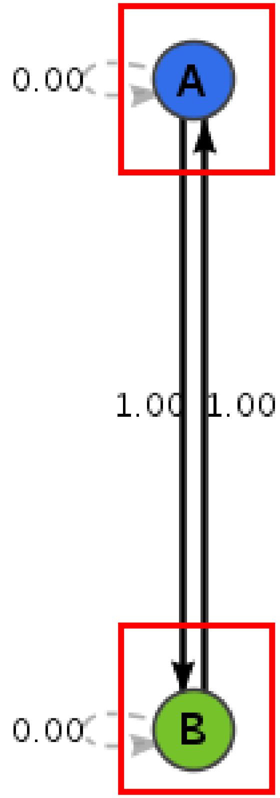
Wo passiert das im Alltag mit dem Verkehr?

- Schrottplatz
- Sackgasse mit Einbahnstrasse ;-)

Periodische Zustände

Zustände nehmen periodisch dieselben Werte an

⇨Der Verkehr pendelt zwischen bestimmten Zuständen hin und her.

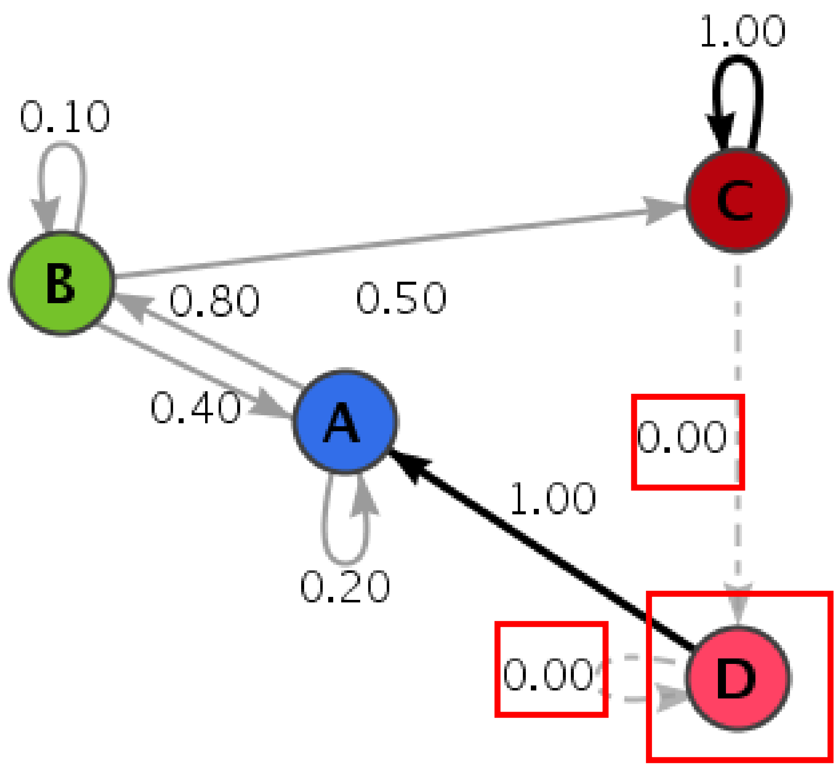


Wo gibt es solche Wegstrecken im Alltag?

- z.B. zwischen Arbeit und Zuhause

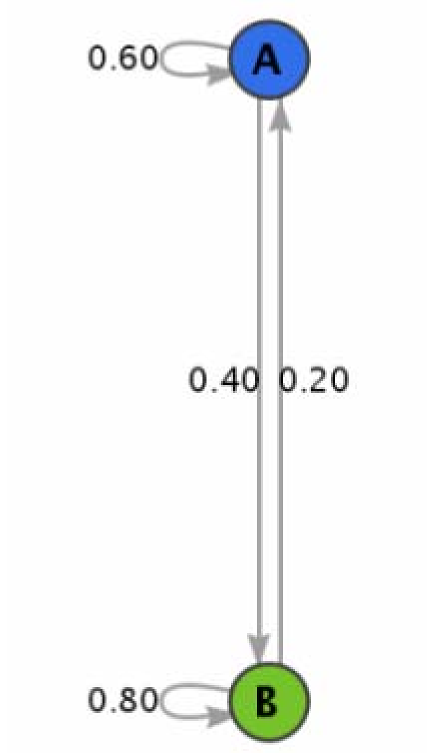
Transienter Zustand

Ein Zustand zu dem ein Auto nie zurückkehren kann.



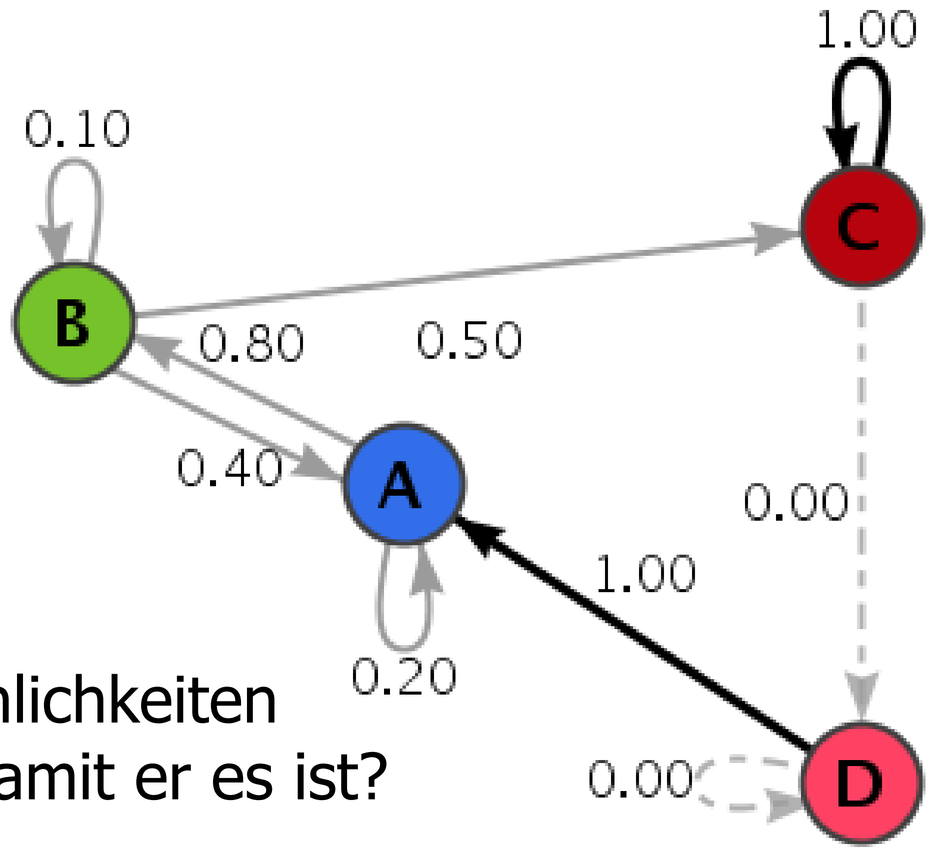
Irreduzibler Übergangsgraph

Jeder Zustand ist von jedem Zustand aus erreichbar.



Ist folgender Graph irreduzibel?

Nein! (Zustand D ist nicht von jedem andern Zustand aus erreichbar!)

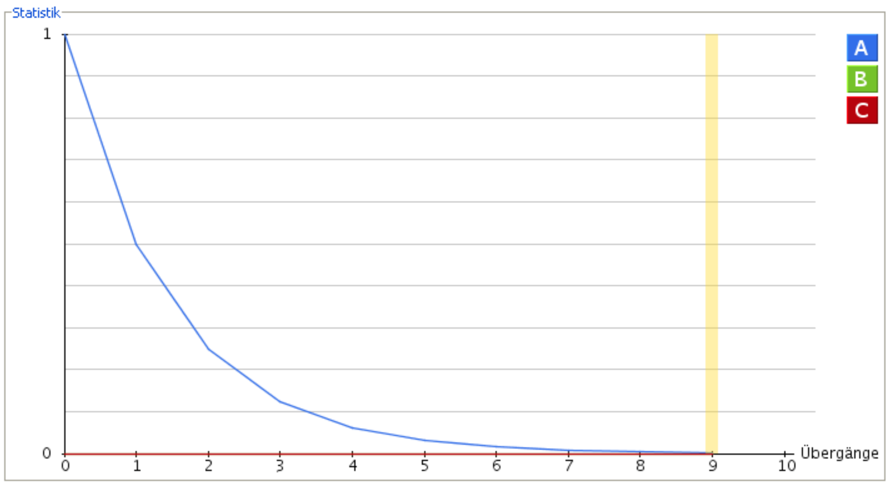


Welche Übergangswahrscheinlichkeiten könnten geändert werden, damit er es ist?

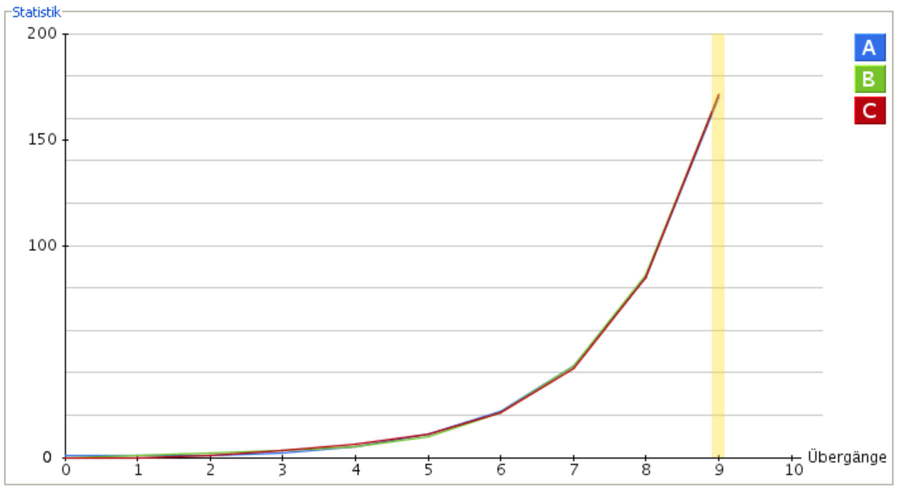
Eigenschaften der Übergangsmatrix

Kolonnensumme = 1: stochastische Matrix

Kolonnensumme ≠ 1:



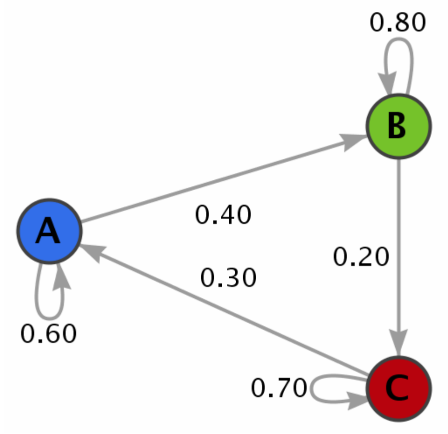
Kolonnensumme < 1:
Gesamtzahl Autos geht gegen 0

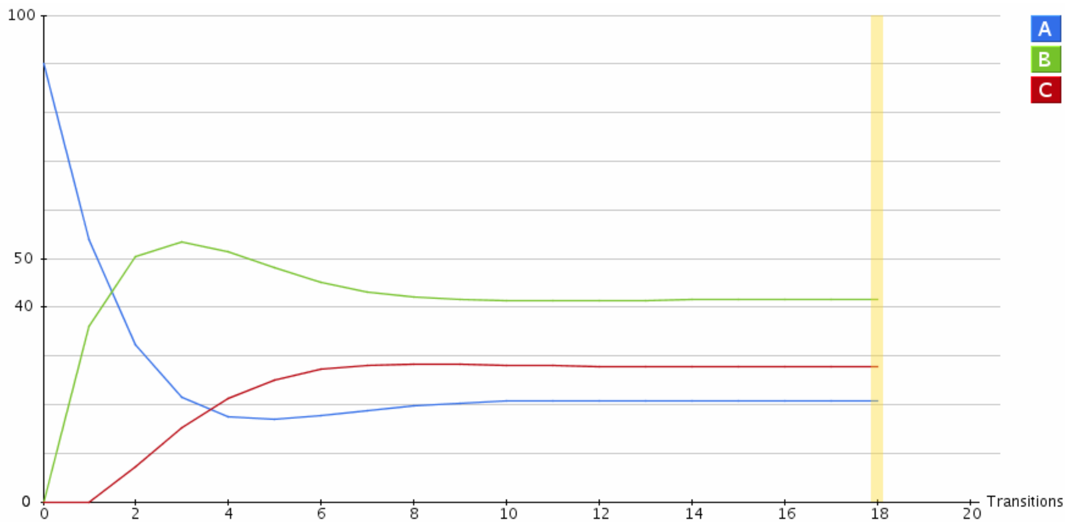


Kolonnensumme > 1:
Gesamtzahl Autos wächst unendlich

Stationäre Verteilung

Ist ein Übergangsgraph irreduzibel und hat er keine periodischen Zustände, pendelt sich das System unabhängig vom Startzustand in eine eindeutige stationäre Verteilung ein.





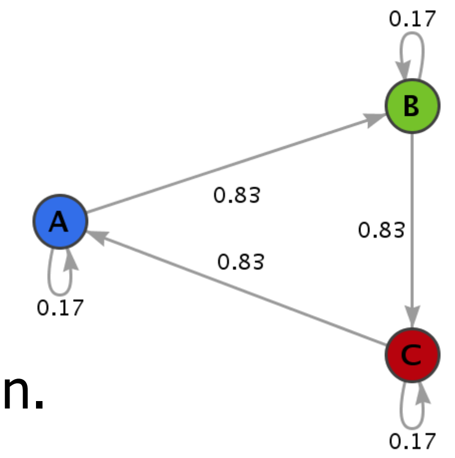
Schreibweise einer Übergangswahrscheinlichkeit

„Die Wahrscheinlichkeit, vom Knoten A in den Knoten B zu gehen ist 10%"

$$P(A, B) = 0.1$$

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.20 & 0.00 & 0.90 & 1.00 & 0.00 \\ 0.10 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.40 \\ 0.70 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Zusammenfassung



Eigenschaften von Zuständen:

- Periodisch: Autos wandern hin und her.
- Absorbierend: Alle Autos gehen mit der Zeit dorthin.
- Transient: Dorthin kehrt ein Auto nie mehr zurück.

Übergangsgraphen können irreduzibel sein: Autos kommen von jedem Zustand in jeden andern.

Verteilungen können stationär sein: System hat sich eingependelt.

Modelle und ihre Grenzen

In unserem Modell: Strassenspuren können unendlich viele Autos fassen. Das ist unrealistisch!

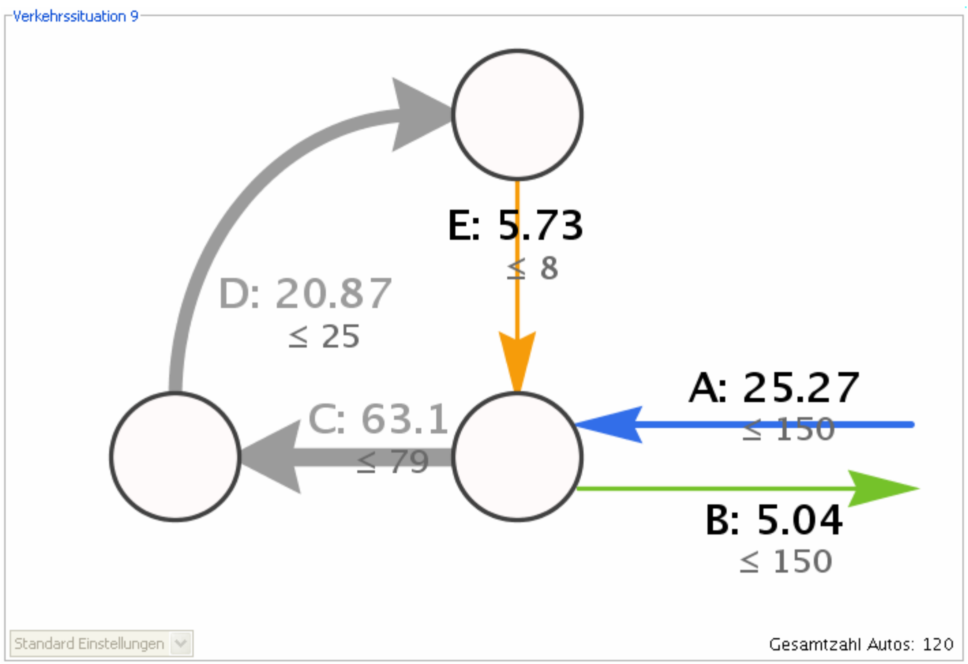
Deshalb:

- Simulation bricht ab, falls > 2000 Autos auf einer Spur.
- Im erweiterten Modus kann eine individuelle Obergrenze (< 2000) pro Spuren definiert werden.

Der erweiterte Modus

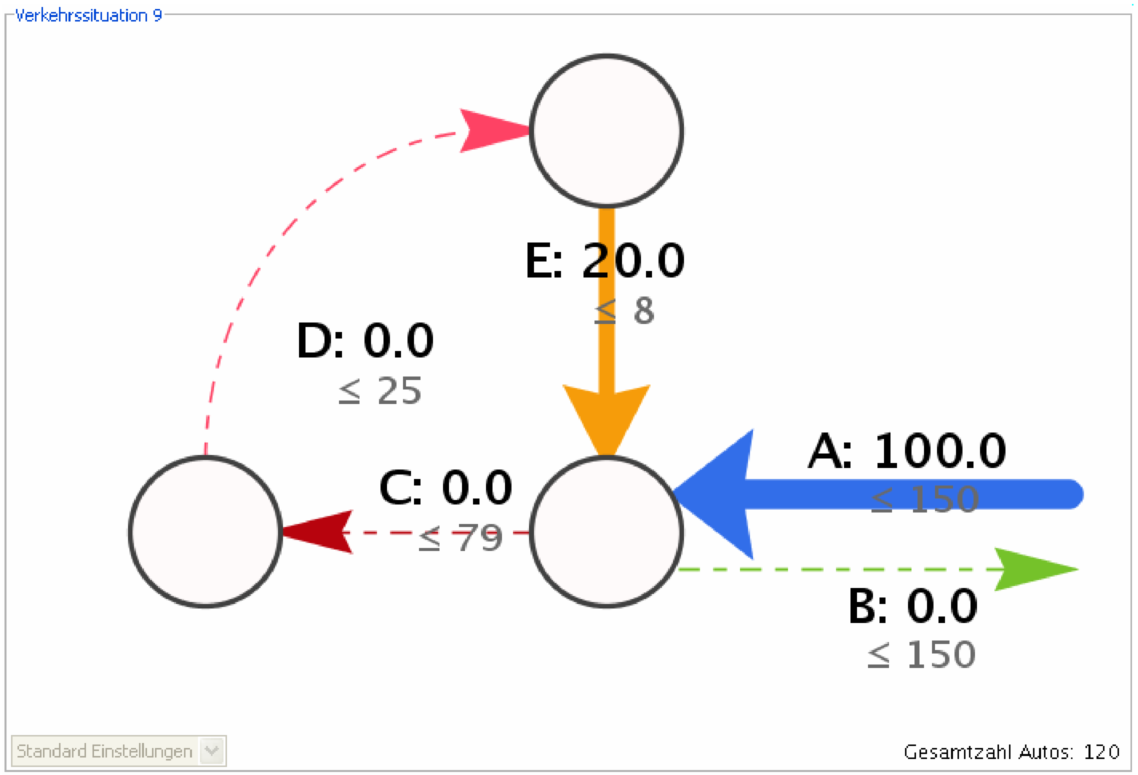
Mögliche Anwendung: Anordnung von Parkplätzen.

Autos sollen die drei Parkplätze C, D und E der Reihe nach füllen.



Anordnung von Parkplätzen in DynaTraffic

Obergrenzen der Spuren werden angezeigt.



Ablauf erweiterter Modus: Kapazitätsgrenze erreicht (Spur C)

Alle auf C einfallenden Kanten auf 0 setzen.

⇨ Es sollen keine neuen Autos ankommen.

Keine stochastische Matrix mehr!

⇨ Kolonnen muss normiert werden.

	A	B	C	D	E
A	0.60	0.40	0.00	0.00	0.00
B	0.00	0.60	0.00	0.00	0.20
C	0.40	0.00	0.90	0.00	0.20
D	0.00	0.00	0.10	0.90	0.00
E	0.00	0.00	0.00	0.10	0.60

	A	B	C	D	E
A	0.60	0.40	0.00	0.00	0.00
B	0.00	0.60	0.00	0.00	0.20
C	0.00	0.00	0.90	0.00	0.00
D	0.00	0.00	0.10	0.90	0.00
E	0.00	0.00	0.00	0.10	0.60

Ablauf erweiterter Modus: Sperrung wieder aufheben (Spur C)

Originalzeile der Spur wird wiederhergestellt

⇨ Es werden nur ausgehende Kanten wiederhergestellt: Für alle Knoten ok!

⇨ Kolonnensumme normieren.

	A	B	C	D	E
A	1.00	0.40	0.00	0.00	0.00
B	0.00	0.60	0.00	0.00	0.25
C	0.00	0.00	0.90	0.00	0.00
D	0.00	0.00	0.10	0.90	0.00
E	0.00	0.00	0.00	0.10	0.75

	A	B	C	D	E
A	1.00	0.40	0.00	0.00	0.00
B	0.00	0.60	0.00	0.00	0.25
C	0.40	0.00	0.90	0.00	0.20
D	0.00	0.00	0.10	0.90	0.00
E	0.00	0.00	0.00	0.10	0.75

	A	B	C	D	E
A	0.60	0.40	0.00	0.00	0.00
B	0.00	0.60	0.00	0.00	0.20
C	0.40	0.00	0.90	0.00	0.20
D	0.00	0.00	0.10	0.90	0.00
E	0.00	0.00	0.00	0.10	0.60

Worum geht es?

- Modelle von Verkehrssituationen
- Graphen:
  - Kanten, Knoten
  - Matrixdarstellung
  - Vektordarstellung
- Markov-Ketten
  - Zustände, Übergangswahrscheinlichkeiten
  - Spezielle Zustände: Periodische, absorbierende oder transiente
  - Stationäre Verteilung
- Matrix-Vektor Multiplikation

⇨ DynaTraffic hilft beim Verstehen dieser Begriffe

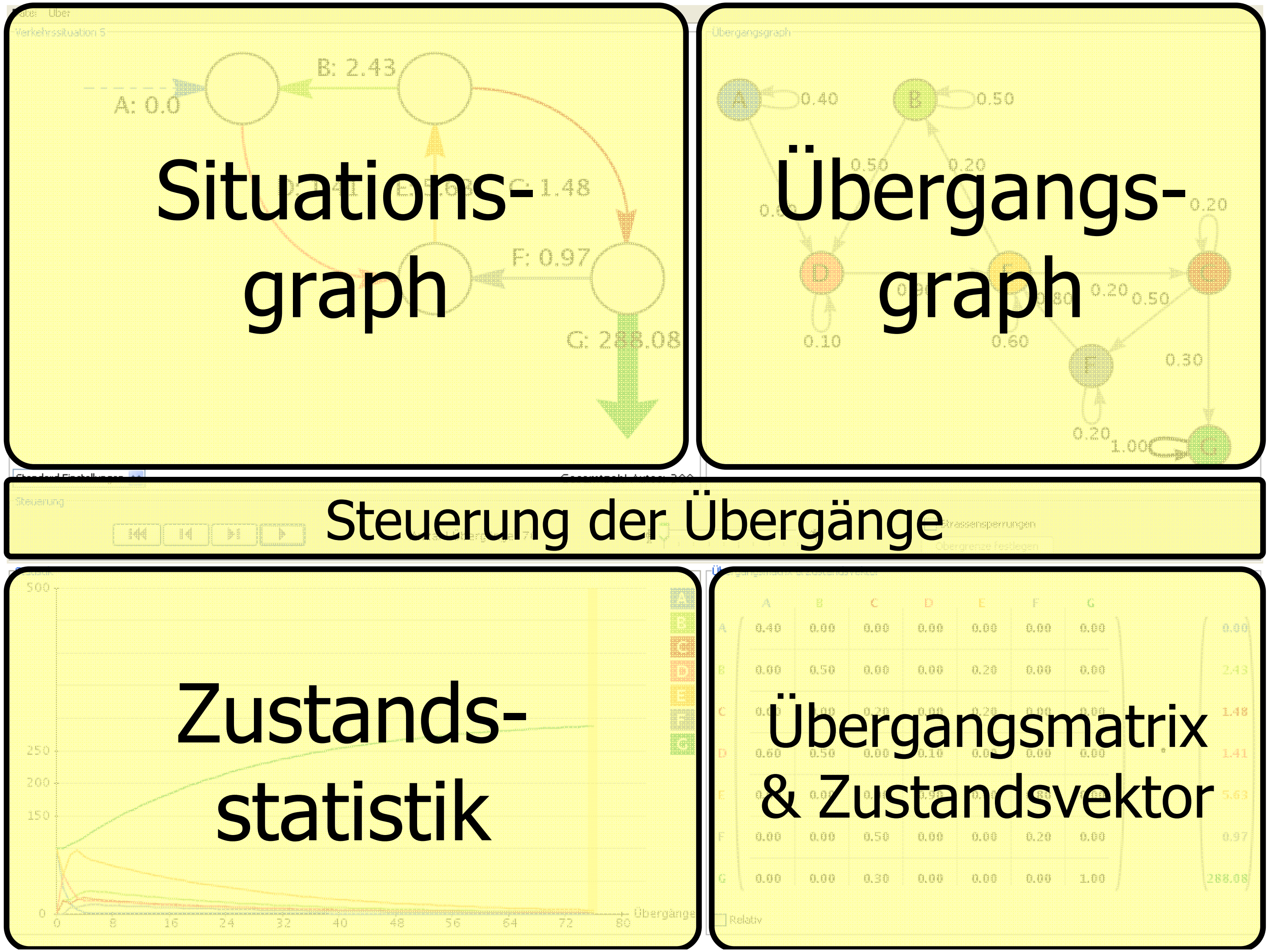
Zusammenfassung

Wir modellieren und analysieren ein Verkehrssystem mit Hilfe von Markov-Ketten.

- Wie entwickelt sich die Verkehrsverteilung?
- Pendelt sich das System ein?

So können wir Voraussagen mittels unseres Markov-Modells treffen!

DynaTraffic



Demo DynaTraffic