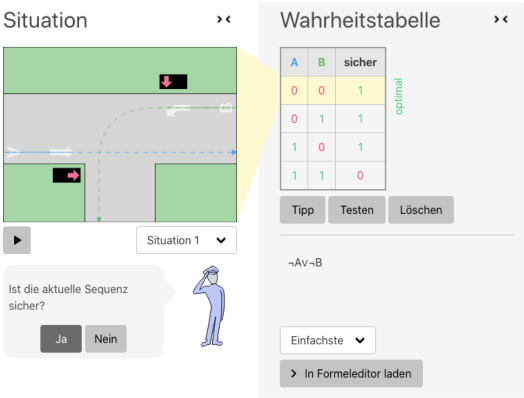
LogicTraffic: Lösungen Einstiegsaufgaben

1. Ausfüllen der Wahrheitstabelle und Formel erstellen lassen

a)



b) (¬A∨¬B)
Umgangssprachlich: Nicht A oder nicht B, das heisst A und B dürfen nicht gemeinsam fahren.

c) (¬A∧¬B) ∨ (¬A∧B) ∨ (A∧¬B)
Umgangssprachlich: Entweder fahren A und B nicht, oder es fährt nur B und A nicht, oder es fährt nur A und B nicht.

d) Es gibt verschiedene Formeln zur gleichen Wahrheitstabelle.

2. Interpretieren einer Formel

a) (¬B∨¬C) ∧ (¬A∨¬C)

b) (¬B∨¬C): Es muss gelten "nicht B" oder "nicht C", d.h. B und C dürfen nicht gleichzeitig fahren. Analog: (¬A∨¬C): "nicht A" oder "nicht C", d.h. A und C dürfen nicht gleichzeitig fahren. Diese beiden Klammerausdrücke schliessen also jeweils je eine Kollision zwischen den Spuren B und C, resp. zwischen den Spuren A und C aus. Und diese Klauseln werden mit einem UND verbunden, d.h. es müssen immer beide Bedingungen gelten.

c) (C)→(¬A∧¬B). Wenn C fährt, dann dürfen A und B nicht fahren.

3. Grösse der Wahrheitstabelle

a) Die Wahrheitstabelle hat 32 Zeilen.
Formel: #Zeilen = $2^{\#\text{Variablen}} = 2^5 = 32$

b) Die Anzahl Zeilen der Wahrheitstabelle hängt exponentiell von der Anzahl Variablen ab, mit jeder neuen Variablen verdoppelt sich die Anzahl der Zeilen. Für Situationen mit vielen Spuren (bzw. Variablen) ist daher das Ausfüllen der Wahrheitstabelle aufwändig.

4. Direktes Notieren einer Formel

a) z.B. (¬A∨¬C) ∧ (¬A∨¬D) ∧ (¬B∨¬C)
oder (D→¬A) ∧ (C→(¬A∧¬B))

LogicTraffic: Lösungen weiterführende Aufgaben

5. Sichere optimale Formeln für `Situation 4`

a) **DNF:** $(\neg C \wedge \neg E) \vee (\neg D)$. Entweder fahren C und E nicht, oder D fährt nicht.
KNF: $(\neg D \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg D)$. D und E, sowie C und D dürfen jeweils nicht gemeinsam fahren.
KDNF: $(\neg C \wedge \neg D \wedge \neg E) \vee (\neg C \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg C \wedge D \wedge \neg E) \vee (C \wedge \neg D \wedge \neg E) \vee (C \wedge \neg D \wedge E)$. Es gibt fünf Fälle, von denen einer gelten muss: Entweder fährt (1.) weder C noch D noch E, oder (2.) C und D fahren nicht, aber E fährt, oder (3.) C und E fahren nicht, aber D fährt, oder (4.) C fährt und D und E fahren nicht oder (5.) C und E fahren und D fährt nicht.
KKNF: $(C \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee \neg E)$. Es gibt drei Bedingungen, welche alle gelten müssen: (1.) C fährt oder D oder E fährt nicht und (2.) C oder D fährt nicht oder E fährt und (3.) C oder D oder E fährt nicht.
Implikation: $(D) \rightarrow (\neg C \wedge \neg E)$. Wenn D fährt, dann dürfen C und E nicht fahren.
Einfachste: $(D) \rightarrow (\neg C \wedge \neg E)$. Wenn D fährt, dann dürfen C und E nicht fahren.

b) Die Beobachtung, dass jeder Klammerausdruck eine Kollision zwischen zwei sich kreuzenden Spuren ausschliesst, lässt sich verallgemeinern und in die umgekehrte Richtung verwenden: Wir fügen für jeden Schnittpunkt von zwei Spuren einen entsprechenden Klammerausdruck ein und ver-und-en all diese Klammerausdrücke zu einer sicheren optimalen Formel. Ein Beispiel: Angenommen, zwei Spuren X und Y kreuzen sich, dann fügen wir den Klammerausdruck $(\neg X \vee \neg Y)$ hinzu und ver-und-en diesen mit allfälligen anderen Klammerausdrücken.

c) Die Beobachtung, dass, wenn eine Spur fährt, kreuzende Spuren nicht fahren dürfen, lässt sich ebenfalls verallgemeinern und in die umgekehrte Richtung verwenden, indem entsprechende Implikationsausdrücke ver-und-et werden. Ein Beispiel: Angenommen eine Spur X kreuzt die Spuren Y und Z, dann fügen wir den Ausdruck $(X \rightarrow (\neg Y \wedge \neg Z))$ hinzu und ver-und-en diesen mit allfälligen anderen entsprechenden Ausdrücken.
Bemerkung: Bei diesem Verfahren muss nicht immer für jede Spur ein Ausdruck gemäss obigem Algorithmus angegeben werden. Diese können weggelassen werden, falls sie redundant sind. Ein Beispiel: Falls sich die Spuren X und Y kreuzen, und der Ausdruck $(X \rightarrow \neg Y)$ bereits hinzugefügt wurde, dann ist der Ausdruck $(Y \rightarrow \neg X)$ redundant und kann weggelassen werden.

6. Sichere optimale Formeln für `Situation 5`

a) $(\neg D \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg D)$

b) Die sichere optimale Formel zur `Situation 5` in `KNF` besteht aus den beiden Klammerausdrücken zur `Situation 4` in `KNF`, diesen wird noch ein dritter, nämlich $(\neg C \vee \neg E)$ beigefügt. `Situation 5` unterscheidet sich von `Situation 4` nämlich bloss dadurch, dass erstere einen Schnittpunkt mehr hat, die Spur E kreuzt hier die Spur C. Gemäss dem Verfahren aus Aufgabe 5b) muss der sicheren optimalen Formel zur `Situation 4` in `KNF` also ein entsprechender Klammerausdruck angefügt werden.

7. Drei oder vier Variablen?

a) $(\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C)$

b) Die Variable D kommt in dieser Formel nicht vor, da die Spur D in der `Situation 6` für eine optimale sichere Formel redundant ist. Praktische Interpretation dieser Beobachtung: Die Spur D hat keine Schnittpunkte mit anderen Spuren und deswegen hat die Variable D keinen Einfluss auf die Sicherheit bei dieser Kreuzung.

c) Die beiden Formeln sind identisch.
Bemerkung: Bis auf die Spur D ist Situation 6 identisch mit der Situation 3. Und wie bei a) gesehen, ist die Spur D redundant, wird also für eine sichere optimale Formel nicht gebraucht.

8. Ganz sichere Kreuzung?

a) 1 (Die Konstante für WAHR).

b) Diese Situation ist immer sicher, es sind überhaupt keine Kollisionen möglich. Optimale sichere Formeln sind hier also Aussagen, welche immer wahr sind. Derartige Formeln heissen in der Fachsprache Tautologien.

9. Eine Standardform für aussagelogische Formeln

a) $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$

b) Für jede 1 in der `sicher`-Spalte gibt es einen Klammerausdruck (eine Klausel) in der Formel in `KDNF`. So steht beispielsweise die vierte Klausel $(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ für die 1 in der fünften Zeile der Wahrheitstabelle, in welcher eben genau A=1 und B=0 und C=0, also kurz $(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ gilt. Interpretation: Wenn die Formel erfüllt ist, müssen wir in einer Zeile sein, in welcher eine 1 steht. Also zählt die `KDNF` im Prinzip alle möglichen Fälle auf, welche erfüllend sind: entweder sind wir in Zeile x oder in Zeile y oder … usw.
Aus dieser Beobachtung lässt sich ein Verfahren aufstellen, mit welchem sich aus einer Wahrheitstabelle eine Formel in `KDNF` aufstellen lässt: Betrachte alle Zeilen, bei welchen in der Formelspalte (hier `sicher`-Spalte) eine 1 steht. Füge für jede Zeile eine entsprechende Klausel gemäss obiger Beobachtung ein und ver-oder-n diese anschliessend.

Ein einfaches Beispiel dazu:

A	B	sicher
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Entsprechende Formel in `KDNF` dazu:

$(\neg A \wedge \neg B) \vee$
$(\neg A \wedge B) \vee$
$(A \wedge \neg B)$

LogicTraffic: Lösungen Testaufgaben (auf Papier)

10. Direkt Formel notieren, 3 Spuren

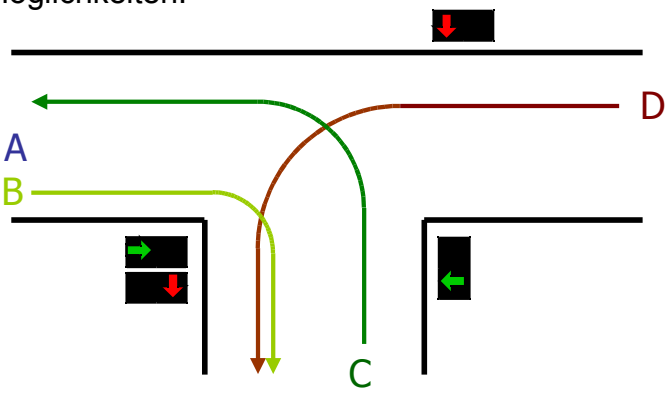
Hier sechs äquivalente optimale, sichere Formeln:
$(\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee \neg C) =$
$(\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) =$
$(A \rightarrow \neg B \wedge \neg C) \wedge (B \rightarrow \neg C) =$
$(A \rightarrow \neg B \wedge \neg C) \wedge (B \rightarrow \neg C \wedge \neg A) \wedge (C \rightarrow \neg A \wedge \neg B) =$
$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) =$
$(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

11. Direkt Formel notieren, 4 Spuren

a) $D \rightarrow (\neg A \wedge \neg C)$ oder $(\neg A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg D)$
b) Die Variable C muss nicht vorkommen, da sie redundant ist.
Sie kann jedoch überflüssigerweise vorkommen, beispielsweise, wenn man die KKNF oder KDNF aufstellt.

12. Direkt Formel notieren, 4 Spuren

Beispielsweise so, es gibt selbstverständliche unzählige andere korrekte Möglichkeiten.



13. KDNF aus Wahrheitstabelle

a) $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$
b) $\neg C$