Paper Computer Science Experiment ❷

Great Principles of Computing	**Computation (Informationsspeicherung)**
Thema	**Zahlenmagie (Dualsystem)**
Unterrichtsform	Entdeckendes Lernen in Einzel- oder Gruppenarbeit
Voraussetzung	Gibt es im Dualsystem mehr als einen Weg, um eine bestimmte Zahl zu kodieren? Gibt es eine dezimale Zahl, die sich nicht binär darstellen lässt?
Material	• Kopiervorlage
Zeitdauer	Erklärungen durch Lehrkraft und entdeckendes Lernen in Gruppenarbeit total 10 Min.

Vorgehen

Ein Schüler erhält die 6 Karten der Kopiervorlage und soll sich eine beliebige Zahl zwischen 1 und 63 merken. Er gibt der Lehrkraft diejenigen Karten zurück, auf denen seine Zahl gedruckt ist. Die Lehrkraft kann ohne weiteres Nachdenken die Zahl nennen.

Lösung:
Es werden einfach die Zahlen in der linken oberen Ecke aller zurückgegebenen Karten addiert. Die Summe ist die gesuchte Zahl.

Dieser Zahlentrick funktioniert, weil auch im Binärsystem die Kodierung einer Zahl nur auf eine Art möglich, also eindeutig ist.

Da $63_{10} = 111111_2$ also 6 binäre Stellen besitzt, benötigen wir 6 Karten auf denen jeweils die 32 (die Hälfte aller möglichen) Zahlen abgebildet ist, bei welchen an der entsprechenden binären Stelle ($2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$) eine 1 steht (vgl. Abbildung weiter unten)

Denkt sich also der Schüler z.B. die Zahl 53 (= binär 110101), gibt er die Karten mit der ersten Zahl $2^0 = 1$, $2^2 = 4$, $2^4 = 16$ und $2^5 = 32$ zurück und 1 + 4 + 16 + 32 = 53.

Varianten

Kennt man die Anordnung bzw. Verteilung der Zahlen auf den Kärtchen, so lässt sich dieser Zaubertrick auch für beliebig grössere Zahlen konstruieren.

Auf dem ersten Kärtchen ist die letzte Ziffer einer Zahl im Binärsystem immer eine 1 und hat darum die folgende Form:

$$.....1_2 = 2k + 1 \cdot 2^0 = 2k + 1$$

Wobei k eine natürliche Zahl oder Null ist, während an der Stelle der Punkte beliebige Ziffern 0 oder 1 stehen. Letztere stellen eine gerade Zahl dar. Also stehen auf dem ersten Kärtchen alle ungeradden Zahlen.

Wenn wie auf dem zweiten Kärtchen die vorletzte Ziffer eine 1 = 2^1 ist, dann handelt es sich um eine Zahl der folgenden Form:

$$....10_2 = 4k + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4k + 2$$

oder

$$....11_2 = 4k + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4k + 3$$

Die Zahl ist also entweder gleich 2 mod 4 oder 3 mod 4. Auch hier können an der Stelle der Punkte beliebige Ziffern 0 oder 1 stehen. Die Zahl aus diesen Punkten ist immer durch 4 teilbar.

Auf der dritten Karte stehen diejenigen Zahlen, deren dritte Stelle im Dualsystem eine 1 ist. Es sind folgende Fälle möglich:

$$...100_2 = 8k + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 8k + 4$$

$$...101_2 = 8k + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8k + 5$$

$$...110_2 = 8k + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 8k + 6$$

$$...111_2 = 8k + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8k + 7$$

Dies sind alles Zahlen mit modulo 8 gleich 4, 5, 6 oder 7. Analog sind die 3 weiteren Karten aufgebaut und mit der Kenntnis dieser Bauweise können nun auch Kärtchen gebastelt werden, mit Hilfe derer Zahlen grösser als 63 erraten werden können.

Eine weitere Variante dieses Hellsehertricks ist, sich diejenigen Kärtchen zurückgeben zu lassen, welche die gedachte Karte nicht enthalten. Wie in der ursprünglichen Form werden die ersten Zahlen der erhaltenen Karten addiert. Die Summe wird nun noch von 63 subtrahiert und das Resultat ist die vom Schüler gedachte Zahl. Der Zaubertrickeffekt kann in dieser Variante noch gesteigert werden, indem der Schüler die Karten, welche er noch behalten hat und welche ja jeweils seine gedachte Zahl enthalten, fest an seine Stirn drückt. Seine gedachte Zahl wird dann „per Telepathie übermittelt“.

Weitere Ideen

Abenteuer Informatik: Binärwaage
www.abenteuer-informatik.de/PDF/binaerwaage_a798.pdf

Weitere Zaubertricks, welche auf Prinzipien der Informatik beruhen, finden sich auf „Computer Science for Fun“:
http://www.cs4fn.org/mathemagic/mathemagic.html

1	3	5	7	9
1	11	101	111	1001
11	13	15	17	19
1011	1101	1111	10001	10011
21	23	25	27	29
10101	10111	11001	11011	11101
31	33	35	37	39
11111	100001	100011	100101	100111
41	43	45	47	49
101001	101011	101101	101111	110001
51	53	55	57	59
110011	110101	110111	111001	111011
61	63			
111101	111111			

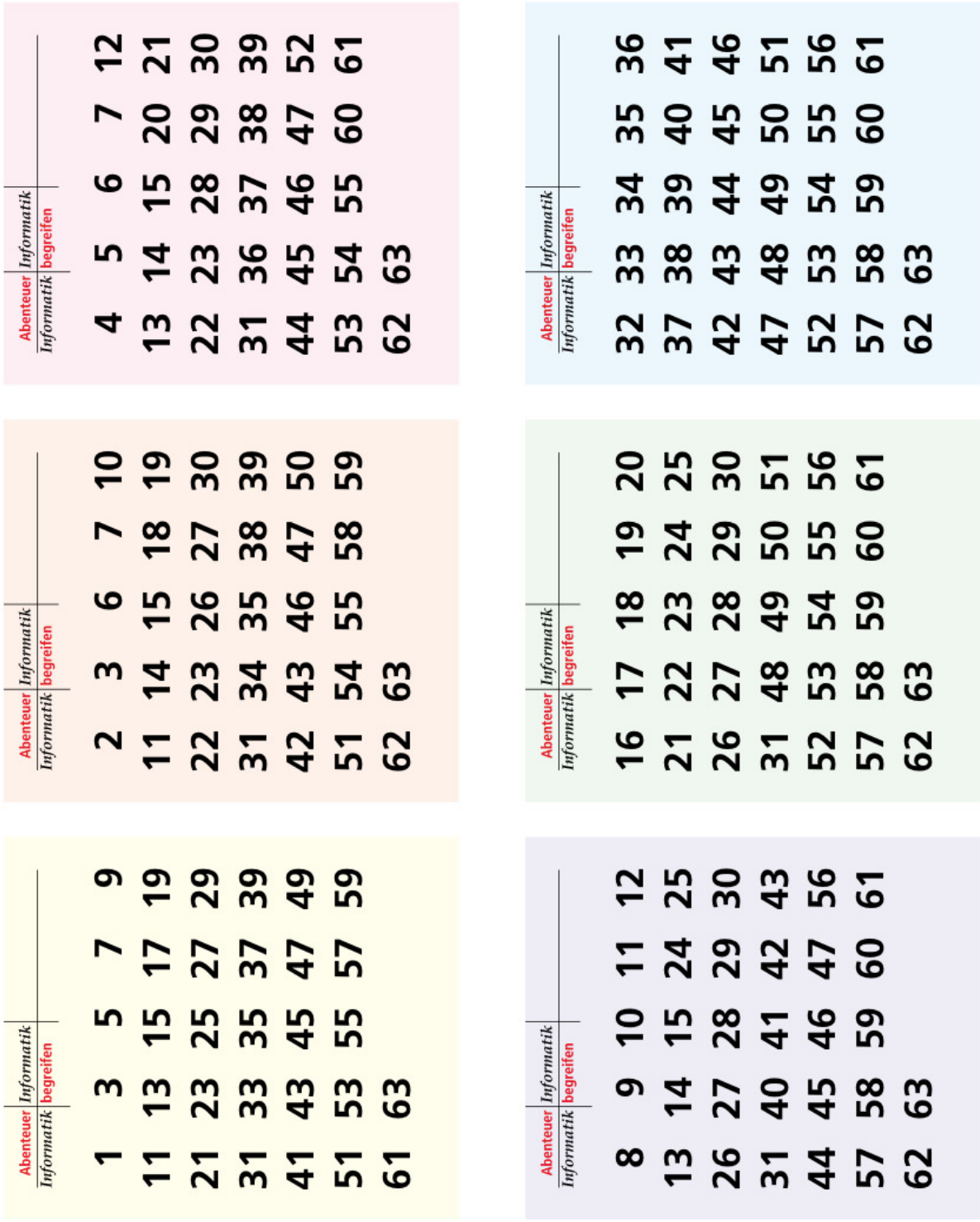
8	9	10	11	12
1000	1001	1010	1011	1100
13	14	15	24	25
1101	1110	1111	11000	11001
26	27	28	29	30
11010	11011	11100	11101	11110
31	40	41	42	43
11111	101000	101001	101010	101011
44	45	46	47	56
101100	101101	101110	101111	111000
57	58	59	60	61
111001	111010	111011	111100	111101
62	63			
111110	111111			

2	3	6	7	10
10	11	110	111	1010
11	14	15	18	19
1011	1110	1111	10010	10011
22	23	26	27	30
10110	10111	11010	11011	11110
31	34	35	38	39
11111	100010	100011	100110	100111
42	43	46	47	50
101010	101011	101110	101111	110010
51	54	55	58	59
110011	110110	110111	111010	111011
62	63			
111110	111111			

16	17	18	19	20
10000	10001	10010	10011	10100
21	22	23	24	25
10101	10110	10111	11000	11001
26	27	28	29	30
11010	11011	11100	11101	11110
31	48	49	50	51
11111	110000	110001	110010	110011
52	53	54	55	56
110100	110101	110110	110111	111000
57	58	59	60	61
111001	111010	111011	111100	111101
62	63			
111110	111111			

4	5	6	7	12
100	101	110	111	1100
13	14	15	20	21
1101	1110	1111	10100	10101
22	23	28	29	30
10110	10111	11100	11101	11110
31	36	37	38	39
11111	100100	100101	100110	100111
44	45	46	47	52
101100	101101	101110	101111	110100
53	54	55	60	61
110101	110110	110111	111100	111101
62	63			
111110	111111			

32	33	34	35	36
100000	100001	100010	100011	100100
37	38	39	40	41
100101	100110	100111	101000	101001
42	43	44	45	46
101010	101011	101100	101101	101110
47	48	49	50	51
101111	110000	110001	110010	110011
52	53	54	55	56
110100	110101	110110	110111	111000
57	58	59	60	61
111001	111010	111011	111100	111101
62	63			
111110	111111			



Abenteuer Informatik						
1	3	5	7	9		
11	13	15	17	19		
21	23	25	27	29		
31	33	35	37	39		
41	43	45	47	49		
51	53	55	57	59		
61	63					

Abenteuer Informatik						
2	3	6	7	10		
11	14	15	18	19		
22	23	26	27	30		
31	34	35	38	39		
42	43	46	47	50		
51	54	55	58	59		
62	63					

Abenteuer Informatik						
4	5	6	7	12		
13	14	15	20	21		
22	23	28	29	30		
31	36	37	38	39		
44	45	46	47	52		
53	54	55	60	61		
62	63					

Abenteuer Informatik						
8	9	10	11	12		
13	14	15	24	25		
26	27	28	29	30		
31	40	41	42	43		
44	45	46	47	56		
57	58	59	60	61		
62	63					

Abenteuer Informatik						
16	17	18	19	20		
21	22	23	24	25		
26	27	28	29	30		
31	48	49	50	51		
52	53	54	55	56		
57	58	59	60	61		
62	63					

Abenteuer Informatik						
32	33	34	35	36		
37	38	39	40	41		
42	43	44	45	46		
47	48	49	50	51		
52	53	54	55	56		
57	58	59	60	61		
62	63					

Quelle: http://www.abenteuer-informatik.de/PDF/binaerwaage_a798.pdf