

Arithmetische Folgen, Summen und Differenzen

H.R. Schneebeli

Version vom 24. Juni 2013

Zusammenfassung

Arithmetische Folgen zeichnen sich dadurch aus, dass die wiederholte Bildung der Differenzfolge zur Nullfolge führt. Dies tritt genau dann ein, wenn es eine Polynomfunktion gibt, die auf den natürlichen Zahlen die gegebene Funktion erzeugt.

Differenzfolgen oder Summenfolgen von arithmetischen Folgen sind arithmetisch.

Aus der konstanten Folge $\{1, 1, \dots\}$ werden wiederholt Teilsummenfolgen erzeugt und untersucht. Es ergibt sich eine Verbindung zum Pascaldreieck.

Vorbemerkungen für die Unterrichtenden

Verwendungszweck Die folgenden Übungen lassen sich als Lernaufgaben verwenden, um weitgehend selbständige Erkundungen im Bereich der arithmetischen Folgen ausführen zu lassen. Beim Bearbeiten der Aufgaben wird eine ganze Familie von Folgen erzeugt und deren Zusammenhang untersucht. Schliesslich soll das Pascaldreieck in den Blickwinkel der arithmetischen Folgen gerückt werden. Mit Hilfe der Listenoperationen Δ und Σ werden Zusammenhänge im Pascaldreieck sichtbar gemacht.

Die Operatoren Δ und Σ können als Vorstufe der Differentiation und der Integration bei Polynomfunktionen angesehen werden. Diese Analogie wird herausgearbeitet, ohne die Infinitesimalrechnung vorwegzunehmen oder zu erwähnen.

Methode Der Zugang ist bewusst experimentell und induktiv gewählt. Papier und Bleistift reichen aus. Ein CAS kann das Experimentieren erleichtern. Insbesondere findet das CAS in gewissen Fällen Formeln für eine geschlossene Darstellung von Summen. Für die Analyse von Listen kennt das CAS die Befehle Δ List für die Berechnung der Liste der Differenzen und cumsum für die kumulative Summe (Teilsummenfolge) einer Liste.

An einer Stelle wird aus der Theorie der Polynomgleichungen der Zusammenhang zwischen Nullstellen und Linearfaktoren von Polynomen ausgenutzt.

1 Definitionen, Notation und erste Übungen

Die traditionelle Notation für Zahlfolgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ lenkt die Aufmerksamkeit auf eine unendliche Liste von Zahlen. Es ist vorteilhaft, den Funktionsbegriff auch den Zahlfolgen zugrunde zu legen. Eine *reelle Folge* a ist eine reellwertige Funktion $a : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem Definitionsbereich D , der sich auf die natürlichen Zahlen \mathbb{N}_0 oder gar \mathbb{Z} erweitern lässt

Die Funktionsschreibweise erlaubt, eine Folge a zu unterscheiden von einem Folgenglied $a(k)$, dem Funktionswert von a an der Stelle k . Die neuen Rechenobjekte sind nun die Folgen als Ganzes und nicht bloss die Zahlwerte der Folgenglieder. Zwei Operationen mit Folgen sind für die Fortsetzung wichtig:

- Die *Differenzenfolge* $\Delta(a) : n \mapsto a(n+1) - a(n)$ beschreibt, wie sich die Werte der Folge a von einem Glied zum nächsten verändern.
- Die *Summenfolge* $\Sigma(a)$ zur Folge a ist definiert als

$$\Sigma(a) : n \mapsto \sum_{r=0}^{n-1} a(r)$$

Speziell ist $\Sigma(a)(0) = 0$ (leere Summe).

Die beiden Definitionen sind so aufeinander abgestimmt, dass im Falle $D = \mathbb{N}_0$ für alle Folgen a folgende Eigenschaften gelten:

1. $\Delta(\Sigma(a)) = a$
Die Folge a lässt sich durch Differenzenbildung aus $\Sigma(a)$ wieder zurückgewinnen.
2. $\Sigma(\Delta(a)) : n \mapsto a(n) - a(0)$
Die Folge a lässt sich mit der Summenbildung aus $\Delta(a)$ und $a(0)$ rekonstruieren: $a = \Sigma(\Delta(a)) + a(0)$

Ferner sind Δ und Σ lineare Operationen in folgendem Sinne: Für alle Folgen a, b und für alle Konstanten c gilt

$$\begin{aligned}\Delta(a+b) &= \Delta(a) + \Delta(b) \\ \Sigma(a+b) &= \Sigma(a) + \Sigma(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(c \cdot a) &= c \cdot \Delta(a) \\ \Sigma(c \cdot a) &= c \cdot \Sigma(a)\end{aligned}$$

Eine Folge a heisst *arithmetisch* von der Ordnung 0, wenn $a \neq 0$ und konstant ist. Sie heisst arithmetisch von der Ordnung $r > 0$, wenn ihre Differenzenfolge arithmetisch ist von der Ordnung $r - 1$. Ist a arithmetisch von der Ordnung r , so ist $\Sigma(a)$ arithmetisch von der Ordnung $r + 1$. Statt arithmetisch sagt man auch *polynomial*.

Übungen

Wir betrachten Zahlfolgen $f : n \mapsto f(n)$, die auf \mathbb{N}_0 definiert sind.

1. Für welche Zahlfolgen w gilt $\Delta(w) = 0$ (Nullfolge)?
2. Es sei $p_2 : n \mapsto n^2$. Welches Zuordnungsgesetz gehört zu $\Delta(p_2)$, welches zu $\Delta(\Delta(p_2))$?
3. Geben Sie ein Beispiel für eine arithmetische Folge der Ordnung 2 an.
4. Für welche Zahlfolgen w gilt $\Delta(\Delta(w)) = 0$?
5. Es sei $p_1 : n \mapsto n$. Welches Zuordnungsgesetz gehört zu $\Sigma(p_1)$?
6. Notieren Sie die Werte $p_2(n)$ für $0 \leq n \leq 6$. Welches Zuordnungsgesetz gehört zu $\Sigma(p_2)$?
7. Zeigen Sie, dass die Folgen $p_k : n \mapsto n^k$ für $k = 0, 1, 2$ die Bedingung $\Delta(\Delta(\Delta(p_k))) = 0$ erfüllen. Weshalb folgt daraus, dass dann auch $p : n \mapsto a \cdot n^2 + b \cdot n + c$ diese Bedingung auch erfüllt und zwar unabhängig von der Wahl von a, b, c .

8. Welche arithmetische Folge a von minimaler Ordnung beginnt mit $\{0, 0, 0, 1, \dots\}$? Welche Ordnung hat sie?
9. Welches ist die Differenzenfolge zur Folge $w : n \mapsto 2^n$? Warum ist die Folge w keine arithmetische Folge?

2 Querfeldein zum Pascaldreieck

Es wird eine besondere Konstruktion von arithmetischen Folgen angegeben. Ausgangspunkt ist die konstante Folge mit lauter Werten 1 und als Konstruktionsprinzip wird in jedem Schritt nur die Bildung der Summenfolge benutzt.

Es entstehen Zahlfolgen mit bemerkenswerten Eigenschaften. Die folgenden Aufgaben handeln davon.

2.1 Die Zahlfolgen c_k

Für jede Zahl k wird eine Zahlfolge $c_k : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ induktiv definiert.

- *Verankerung*
 $c_0 : n \mapsto 1$ ist die konstante Folge mit lauter 1.
- *Induktionsschritt*
 $c_{r+1} = \Sigma(c_r)$, die Summenfolge einer Folge gibt die nächste Folge.

2.2 Zehn Aufgaben über die Folgen $c_k : n \mapsto c_k(n)$

1. Welches sind die 9 ersten Werte der Folgen c_0 und c_1 ?
2. Wie lautet ein allgemeines Zuordnungsgesetz für $c_1 : n \mapsto ?$ und $c_2 : n \mapsto ??$?
3. Welches sind die 9 ersten Werte der Folgen c_2, \dots, c_5 ?
4. Weshalb gilt $c_k(n+1) - c_k(n) = c_{k-1}(n)$ für alle $n \geq 0$?
5. Weshalb ist die Folge c_k arithmetisch von der Ordnung k ?
6. Welches sind die ersten $k+1$ Funktionswerte von c_k : $c_k(0), c_k(1), \dots, c_k(k)$?
7. Welches sind die Nullstellen des Polynoms $c_k : n \mapsto c_k(n)$?
8. Wie lautet eine Faktorisierung von $c_k(n)$?
9. Wie lässt sich aus den Folgen c_k mit $0 \leq k \leq 2$ eine Formel für die Summe der Quadrate $\sum_{r=0}^n r^2$ finden?
 Wie lässt sich die Methode verallgemeinern auf eine Formel für die Summe der Kubikzahlen $\sum r^3$ oder gar auf $\sum r^k$?
10. Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Folgen $c_k : n \mapsto c_k(n)$ und dem Pascaldreieck? Wenn ja, welchen?