Lineare Gleichungssysteme

Kommentare zur Version vom 1. August 2005

Dana Bulaty und Hans Rudolf Schneebeli
Kantonsschule Baden

Vorwort

Wie lassen sich *lineare Gleichungssysteme* im Algebraunterricht behandeln, wenn ein CAS verfügbar ist? Hier folgt ein Vorschlag. Er beruht auf der Annahme, dass eh und je lineare Gleichungssysteme algorithmisch behandelt wurden. Neu führt das CAS den Lösungsalgorithmus aus. Im Sinne der Gerüstdidaktik lässt sich dieser als black box einsetzen, um gewisse Anwendungsfragen zu beantworten. Dann muss die Syntax der Software erlernt werden und es braucht etwas Erfahrung, um zu verstehen, was die Antworten des Rechners bedeuten. Allgemeinbildung verlangt aber mehr: Wir wollen Verständnis für die Wirkungsweise der Algorithmen. Die black box soll zur white box werden, deren prinzipielle Funktion wir durchschauen. Dies ist genau unser Weg und unser Ziel: Handlungsfähigkeit und Urteilsfähigkeit erlangen und dabei ein modernes Computerwerkzeug nicht verschmähen.
Der Einsatz eines CAS erlaubt keinerlei Abstriche bei der algebraischen Begriffsbildung. Anderseits scheint die Forderung unsinnig: Auch im Computerzeitalter muss der Mensch alle Funktionen durch Handmethoden im Notfall sicherstellen können. Im Gegenteil: Es ist uns bewusst, dass viele Akademiker auch in der traditionellen Ausbildung nur eine sehr begrenzte Sicherheit im algebraischen Handwerk erlangten. Ob sie über dieses Kleingeschäft hinaus je grössere Zusammenhänge erkennen konnten, bleibt fraglich. Wir wollen das CAS nutzen, um begriffliches Algebraverständnis zu entkoppeln von automatisierbaren algebraischen Manipulationen. Wir streben also eine neue Arbeitsteilung an: *Menschen sollen verstehen und denken, Maschinen sollen die automatisierbaren Manipulationen mit grösster Zuverlässigkeit ausführen.*
Aufbau und Vorgehen in diesem Text beruht auf einer plausiblen und pragmatischen *Arbeitshypothese*:

- Die Grundbegriffe *lineares Gleichungssystem, Lösung, Äquivalenzumformung, Koordinatensystem* sind bereits erarbeitet und verstanden.
- Die Schüler wenden diese Begriffe an, um einfache lineare Gleichungssysteme mit bis zu drei Unbekannten *algorithmisch* mit Handrechnung zu lösen.
- Die Matrixnotation für lineare Gleichungssysteme und *Gausselimination* sind bekannt und verstanden.

'Gausselimination' bezeichnet im folgenden eine *schultaugliche* Variante dieses Verfahrens, welche mit Matrixnotation arbeitet und mindestens die Zeilen-Stufen-Form erzeugt. Auf Belange der Numerik wie Pivotstrategie wird verzichtet.

Das Fundament lässt sich ohne CAS-Einsatz legen. Nichts spricht dagegen, ein CAS einzusetzen um mit Buchbergers Gerüstdidaktik die Aufmerksamkeit der Anfänger auf die Begriffsbildung statt auf das Rechnen zu lenken. Die Wahl der Mittel lassen wir offen und vertrauen auf ein Fundament, das den weiteren Aufbau zu tragen vermag. Unsere Aufgaben umfassen vier Hauptteile:

A Eine Überprüfung der begrifflichen und handwerklichen Grundlagen: Gausselimination bei linearen Gleichungssystemen mit höchstens drei Unbekannten.

B Lineare Gleichungssysteme lösen von Hand und mit einem CAS: Erfahrungen und Vergleiche.

C Einige Beispiele und Anwendungen, in denen lineare Gleichungssysteme wichtig sind. Es muss bei Andeutungen bleiben. Überzeugende Anwendungen mit linearen Gleichungssystemen gibt es viele. Noch mehr Beispiele und Anwendungen würden weitere Zusatzkenntnisse in anderen Gebieten verlangen, die hier noch nicht vorausgesetzt werden (z.B. Physik [Stromkreise], Chemie [Stöchiometrie], Biologie [lineare Populationsmodelle], Vektorgeometrie [Lageaufgaben, lineare Vektorgleichungen], Wirtschaft [Materialfluss, Wirtschaftsmodelle]). Wer zu gegebener Zeit solchen Beispielen begegnet, sollte dann auch die Gelegenheit nutzen und die hier vermittelten Grundkenntnisse auffrischen, vertiefen und erweitern und damit die Anwendungen erleichtern.

D Eine gründliche Ausbildung in der Anwendung des CAS, indem dessen Verhalten auch in Grenzfällen und darüberhinaus empirisch erkundet wird. Dieser Abschnitt dient der Vertiefung. Er kann in einem Minimalprogramm übergangen werden.

Wie sind die Aufgaben zu benutzen?

Schüler erwarten, dass die Lösung einer Aufgabe im Bestimmen gewisser Zahlen besteht. Diese Erwartung ist bei manchen unserer Aufgaben zu bescheiden, ja kontraproduktiv. Wir wollen das CAS als Hilfsmittel zum Untersuchen eines mathematischen Gegenstandes einsetzen, ähnlich, wie in der Biologie ein Mikroskop verwendet wird, wobei die Vorbereitung einer Probe zwar zur Aufgabe gehört, sie aber nicht im Sinne des Unterrichtszieles erschöpft. Oft lassen sich die Aufgaben als *Lernaufgaben* einsetzen. Die experimentelle Situation ist im Mathematikunterricht noch wenig gewohnt. Das anzustrebende Ziel verlangt mehr als sonst üblich Neugierde und Eigeninitiative. Oft ist nicht einfach eine Lösung das Ziel, sondern auch Reflexionen über Lösungeswege und Methoden, Vergleiche verschiedener Mittel und Wege. Wir erwarten, dass Schüler durch den CAS-Einsatz zum Beobachten und Folgern gebracht werden. Beim Erkunden des CAS wird der Grund dafür klar werden: Das Werkzeug hat Grenzen, die eine Portion Skepsis und einen verantwortlich kritischen Umgang verlangen. Nur wer gelernt hat genau und kritisch zu beobachten, wird diesen Anforderungen gerecht.
Lernaufgaben lassen sich nicht drillmässig verwenden und es ist gerade Methode, dass man durch sie relativ unvorbereitet mit Problemen konfrontiert wird, die erst bei der Bearbeitung auftauchen sollen. Es wäre also verkehrt, diese Aufgaben durch 'Theorievorbereitung' narrensicher machen zu wollen. Fehler müssen bei Lernaufgaben passieren können, damit es noch mehr zu lernen gibt. Manche unserer Aufgaben sind so offen, dass es keine Musterlösung gibt. Die beste Lösung kennen wir nicht, es ist aber bestimmt jene, die das Beste herausholt. Und das gilt es noch zu entdecken. Lernaufgaben benötigen eine Nachbereitung, ein kommentiertes Sichern der Erfahrungen. Diese Phase der Bearbeitung erfordert nochmals eine Anleitung, Betreuung oder Kontrolle durch die Lehrkraft.

In anderen Fällen sind Lösungen ganz einfach oder das CAS kann sie liefern. Dann haben wir auf eine Angabe verzichtet. Wer die Lernaufgaben bearbeitet hat, wird verstehen, weshalb es sachlich nicht gerechtfertigt und pädagogisch unklug ist, die Meinung zu vertreten: Wir lösen alles von Hand und nutzen das CAS zur Kontrolle. Das CAS kann diese Erwartungen nicht erfüllen.

HW und SW, Konventionen

Ein Text mit einer konkreten Befehlsfolge in der Schriftart `TI-code` bezieht sich auf eine konkrete Eingabe für CAS-Rechner von Texas Instruments. Andere CAS sind möglich, aber die spezifischen Befehle müssen eventuell angepasst werden. Der Text ist weitgehend produktneutral formuliert, auf screenshots wurde deshalb verzichtet. Es ist sicher, dass die SW sich laufend weiter entwickelt. Daher ist zu erwarten, dass verschiedene Versionen oder gar verschiedene Produkte nicht zu den gleichen Erfahrungen führen werden. Grundlegende Probleme werden aber mit Sicherheit trotz veränderter Bedingungen bestehen bleiben. Sie gehören daher zu einer aktuellen Form der Allgemeinbildung. Dieser Text versucht, sie exemplarisch vorzuführen.

Literatur

1. Beck Uwe et al. Grundkurs Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Klett Sigma, ISBN 3-12-735300-6
   (Gausselimination, Matrizen, Anwendungen)

2. Kroll, Reiffert, Vaupel. Analytische Geometrie/Lineare Algebra, Dümmler, ISBN 3-427-421851-6
   (Gausselimination, Matrizen, Anwendungen)

3. Kutzler, Bernhard. Lineare Gleichungen lösen mit dem TI-92, bk-teachware.

4. Kutzler, Bernhard. Lineare Gleichungssysteme lösen mit dem TI-92, bk-teachware.

5. Lauter Josef, et al. Mathematik Sekundarstufe II, Analytische Geometrie und lineare Algebra. Cornelsen, ISBN 3-590-12314-1
   (Gausselimination, Matrizen, Anwendungen)

6. Weber, Zillmer. Mathematik [Leistungskurs], Lehrbuch, Paetec Verlag, Berlin 2000, ISBN 3-89818-100-6
   (CAS-Einsatz (numerisch), rref(), Gausselimination, Matrizen, Anwendungen)

Überblick

Voraussetzungen

Die Klasse wurde bereits in die Grundlagen der Algebra eingeführt, lineare Gleichungssysteme mit bis zu 3 Unbekannten wurden behandelt.

- Gleichungen, Termumformungen, Lösung, Lösungsmenge, Äquivalenz von Gleichungen,
- eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten $a \cdot x = b$ mit *Fallunterscheidung* lösen:

$a \cdot x = b$	$b = 0$ (homogen)	$b \neq 0$ (inhomogen)
$a \neq 0$ (regulär)	0	b/a
$a = 0$ (singulär)	alle Zahlen	unlösbar

- Eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten, lineare Systeme mit zwei Unbekannten graphisch und algorithmisch lösen.
- Eine lineare Gleichung mit drei Unbekannten, lineare Systeme mit drei Unbekannten algorithmisch lösen.
- Prinzip der Gausselimination (Äquivalenzumformungen, Matrixnotation, Matrix, erweiterte Matrix, Zeilenoperationen, rekursives Vorgehen) kennen und verstanden haben. Einfache Beispiele ohne Hilfsmittel von Hand lösen können.

A Lineare Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten

Ziele

- Voraussetzungen überprüfen
- Gausselimination mit CAS sicher anwenden

CAS-Einsatz

Alle Aufgaben in diesem Abschnitt sind ohne CAS lösbar. Sie sind aber geeignet, um den Gebrauch eines CAS vorzubereiten und einzuführen.

Grundbegriffe

Ziele

Grundbegriffe festigen und wenn nötig ergänzen.

CAS-Einsatz

Ein CAS soll eingesetzt werden, aber nicht ausschliesslich.

Geometrie der Lösungsmenge

Ziele

Geometrie der Lösungsmenge und algebraische Begriffsbildung verknüpfen, Skizzen und Parameterdarstellungen der Lösungsmenge gewinnen. Aus der reduzierten Zeilen-Stufen-Form einer Matrix (output von rref()) die Lösungsmenge bestimmen.

CAS-Einsatz

Neben dem bereits geübten Skizzieren von Hand als Option die Graphikfähigkeit des CAS ausnutzen.

B Gausselimination, von der Handrechnung zum CAS-Einsatz

Ziele

- Gausselimination mit CAS bei regulären *und* singulären Gleichungssystemen sicher anwenden.
- Verschiedene Möglichkeiten mit ihren Vor- und Nachteilen kennen lernen, um lineare Gleichungssysteme mit dem CAS zu lösen: solve(), zeros(), rref(), simult, ...
- Syntax und Interpretation von Ein- und Ausgaben verstehen.

Bemerkungen

Nicht die eigentlichen Lösungen sind der Zweck der Übung, sondern ein *Vergleich der Möglichkeiten, die das CAS bietet.* Referenz ist die sorgfältige Handrechnung. Zu vergleichen sind: Aufwand beim Lösen, Korrektheit und Vollständigkeit der Antwort, benutzte Datenformate. Es ist zweckmässig, die Aufgaben mit verschiedenen Mitteln mehrfach lösen. Die formalen Solver des CAS benutzen den Buchbergeralgorithmus, der im Falle von linearen Gleichungssystemen der Gausselimination entspricht. Mit rref() und simult lassen sich nur lineare Systeme bearbeiten, mit solve() oder zeros() auch nichtlineare. Die Verfahren solve() und zeros() unterscheiden sich in der Syntax und vor allem in den verwendeten Datenformaten. Es ist gut, beide zu kennen, aber die Erfahrungen sind vom einen auf das andere übertragbar.

Anregung Das Thema im Werkstattunterricht oder als Puzzle bearbeiten.

C Allerlei Anwendungen und Beispiele

Ziele

Ergänzungen, Anregungen, Kenntnisse und Erfahrungen in Anwendungen überprüfen, festigen, vertiefen und erweitern.

Bemerkungen

Hier sind einige Aufgaben zusammengestellt, welche zum Teil über das Minimalprogramm eines Grundkurses Mathematik hinausreichen. Sie setzen eine vertiefte Beschäftigung mit der Mathematik voraus (z.B. mathematisches Profil, Akzentfach, Schwerpunktfach)

D Experimente und Erfahrungen mit dem CAS

Ziele

Sensibilisierung: Selbst erfahren, dass die Arbeit mit dem CAS nicht automatisch zu korrekten Lösungen führt. Kontrollen sind nötig, um Fehler zu erkennen und zu vermeiden.

Bemerkungen

Vorausgesetzt sind Erfahrungen mit der Gausselimination und Kenntnis der verschiedenen Solver des CAS, um lineare Gleichungssysteme zu bearbeiten.

Anregung Geeignete Aufgaben als *Lernaufgaben* einsetzen. Die Wirksamkeit wird gesteigert, wenn Erfahrungen protokolliert, diskutiert, verglichen und die wesentlichen Ergebnisse von der Klasse knapp zusammengefasst werden.

CAS-Einsatz

Ein CAS wird als Werkzeug benötigt, um die vorgeschlagenen Experimente auszuführen. Diese geben einen Einblick in die *Wirkungsweise* verschiedener Methoden und sie zeigen *Grenzen* jeder der Methoden auf. Zu vergleichen sind beispielsweise Zeitbedarf und Zuverlässigkeit beim Lösen:

- von Hand mit Papier und Bleistift
- interaktiv mit einem CAS analog zur Handrechnung
- automatisiert mit einem Solver des CAS in verschiedenen Betriebsarten:
  - numerische Berechnung mit Fliesskommazahlen (Mode approximate)
  - symbolische Berechnung ('formal exakt', Mode exact)
  - verschiedene Formate oder Datentypen für Input/Output: Gleichungen, Listen, Matrizen

Achtung! Schwachstellen und Fehler

Schon die genaue Behandlung der Gleichung $ax = b$ erfordert Fallunterscheidungen. Ihre Anzahl wächst mit der Grösse des Gleichungssystems. Wie geht das CAS damit um und weshalb kommt es dazu, dass Fallunterscheidungen unterschlagen werden? Aus der Numerik sind uns underflow, overflow und Rundungsfehler bekannt. Entgegen unseren Erwartungen ist auch formal exakte Berechnung nicht vor Fehlern geschützt.

- Wenn das CAS numerisch rechnet, so werden gewisse Speicher mit konkreten Zahlen belegt, die Speicher aber im Programm mit einem Variablennamen bezeichnet, beispielsweise mit s. Bevor eine Operation wie etwa eine Division durch den Inhalt von s ausgeführt wird, muss getestet werden, ob dieser gleich 0 sei, praktisch sogar, ob die Zahl hinreichend weit von 0 entfernt sei. Beim Programmieren sind die Speicherbelegungen noch unbekannt. Zur Laufzeit muss in gewissen Fällen der Inhalt geprüft werden. Allerdings lassen sich Fliesskommazahlen nicht mit Sicherheit auf Gleichheit testen.

- Wenn ein CAS mit formalen Variablen rechnet, so bezeichnet ein Variablenname einen *leeren* Speicher. Zur Laufzeit ist dann der Speicherinhalt nicht bekannt. Folglich müssten eigentlich während des Lösungsprozesses laufend Bedingungen formuliert werden, welche Existenz oder Eindeutigkeit einer Lösung sicherstellen. Wenn nun nach Abschluss der formalen Berechnung die Antwort des CAS als Lösungsformel betrachtet wird und die formalen Koeffizienten durch konkrete Zahlwerte ersetzt werden, kann es durchaus geschehen, dass die Formel einen numerischen Wert liefert, obwohl gewisse der stillschweigend angenommenen Bedingungen verletzt sind.

  Manchmal hilft es, formale Parameter, die in einer Aufgabenstellung zwar als gegeben betrachtet werden, dem Solver als 'Unbekannte' einzugeben. In der Regel wird dann das Problem unbestimmt, der Solver führt beim Formulieren der Lösung explizit formale Parameter ein und formuliert Lösungsbedingungen, die mit der Lösung ausgegeben werden. Allerdings erhöht dieses Vorgehen die Komplexität des Problems. In der Regel werden die Gleichungen nichtlinear. Dann führt formal exakte Berechnung bald an die Leistungsgrenzen des CAS.

  Die Lage wird noch erheblich kompliziert durch einen Satz von Daniel Richardson (1968). Er zeigt, dass es hinreichend komplizierte, aber endliche Terme T gibt, von denen sich nicht mehr algorithmisch entscheiden lässt, ob er sich zu 0 vereinfachen lässt. Obwohl sich dieser Satz auf Turingmaschinen bezieht, deutet er darauf hin, dass das Normalformenproblem jedes CAS plagen kann.

Kurz: Das CAS ist weder numerisch noch beim formalen Rechnen ein absolut zuverlässiges Werkzeug. Unabhängige Kontrollen sind unabdingbar.

Formale Berechnungen

Ziele

Erfahrungen vermitteln, welche eine sachlich begründete Skepsis fördern. Das Verständnis für Kontrollen und Tests wecken. Einige Möglichkeiten dazu zeigen.

Bemerkungen

Symbolische oder formal exakte Berechnungen führt das CAS nicht immer nach unseren Vorstellungen aus, Fallunterscheidungen werden manchmal unterschlagen. Implizit wird dann nur der reguläre Fall verfolgt.
Die Aufgaben D-1, D-2, D-3 lassen sich als Fallstudien einsetzen. Bemerkenswert ist die lange Rechenzeit in D-3 (rund 20 Minuten mit TI voyage 200) zum Lösen des inhomogenen Gleichungssystems mit formalen Koeffizienten mit zeros(). Wenn die Liste $\{x, y, a_1, \ldots, b_2, k_2\}$ die 'Unbekannten' bezeichnet, so bestimmt der Solver zuerst x und y und benutzt frei wählbare Parameter, um die unbestimmten Koeffizienten des Systems zu bezeichnen. So werden Lösbarkeitsbedingungen in der Antwort sichtbar. Die unlösbaren Fälle fehlen und in allen Quotienten muss der Nenner als von 0 verschieden angenommen werden. Die Komplexität der Aufgabe wird sichtbar gemacht. Aber damit wird keine praktisch nutzbare Methode vorgeführt. Im Gegenteil, die komplexe Antwort motiviert die folgende Alternative.

Determinanten

Ziele

Mit Determinanten reguläre und singuläre Fälle von linearen Gleichungssystemen erkennen.

Bemerkungen

Die Cramerregel liefert Formeln, um Lösungen von regulären linearen Gleichungssystemen zu berechnen. In Aufgabe D-3 wird die Cramerregel für 2×2-Systeme mit dem CAS hergeleitet. Sie ist bloss eine Kuriosität. Wer ein grösseres System mit der Determinantenmethode löst, wird bemerken, wie trügerisch das Bild der einfachen Lösungsformel ist. Die Determinantenmethode taugt nicht wirklich zum Lösen linearer Gleichungssysteme.
Ob es eine Lösungsformel gibt oder nicht, ist eine eher unwichtige Darstellungsfrage. Entscheidend ist, ob es einen Algorithmus gibt, der das Gleichungssystem effizient löst. Für viele Zwecke ist rref() ein tauglicher Algorithmus. Seine Grenzen vor allem beim formalen Rechnen werden sich noch zeigen. Manche Fallunterscheidungen werden vom CAS beim Ausführen von rref oder mit verschiedenen Lösern wie solve(), zeros(),.. unterschlagen. Die Berechnung der Determinante kann als Kontrolle gute Dienste leisten. Beim Berechnen der Determinante sind keine Fallunterscheidungen nötig. Ist $M(s)$ eine $n \times n$-Matrix mit einem formalen Koeffizienten s, so ist $\det(M(s)) = 0$ eine notwendig und hinreichende Bedingung dafür, dass $M(s)$ singulär ist.
Die Determinante ist ein primitives Hilfsmittel, um mit dem CAS zu überprüfen, ob eine Matrix singulär sei. Natürlich wird diese prinzipielle Sicht wegen der Rundungseffekte beim numerischen Rechnen noch zu überdenken sein.

Anregung Mit Aufgabe D-3 lässt sich die Definition der Determinanten von 2×2-Matrizen erarbeiten. Mit einer analogen Lernaufgabe liesse sich bei Bedarf eine Formel für die Determinante von 3×3-Matrizen herleiten. Das CAS lässt sich aber auch als black box benutzen, um mit det() die Determinante einer beliebigen $n \times n$-Matrix berechnen zu lassen.

Numerische und symbolische Berechnungen mit dem CAS

Ziele

Erfahrungen mit den verschiedenen Werkzeugen eines CAS sammeln. Einsehen, wie sich Rundungsfehler auswirken können. Die theoretische Einteilung in *regulär* oder *singulär* ist für die numerische Rechenpraxis zu grob. Die 'Kondition' sagt aus, wie robust ein Gleichungssytem bezüglich Rundungseffekten ist. In der Nähe von singulären Systemen liegen die schlecht konditionierten. Geometrisch gesprochen gleichen sie Situationen mit 'schleifendem Schnitt'. Beispiele kennen, in denen die formal exakte Berechnung eines CAS *falsche* Ergebnisse liefert, indem es Lösungen vorgaukelt oder unterschlägt. Wissen, dass numerische Berechnungen nicht prinzipiell schlechter sein müssen als 'formal exakte'. [vgl D-16]

Bemerkungen

Weder numerische noch symbolische Solver sind zuverlässig.

Anregung Das Material als Puzzle oder im Werkstattunterricht bearbeiten lassen.

Plausibilitätstests

Ziele

Einige Möglichkeiten kennen, um Ergebnisse auf Plausibilität zu testen. Das CAS für die Tests nutzen. Es ist nicht zu erwarten, dass die Schüler jede der folgenden Methoden beherrschen. Sie sollen aber das CAS auch für *sinnvolle Kontrollen* einsetzen. Den Nutzen von Testmethoden erkennen

- *Zusätzliche Informationen verwenden*
  In manchen Anwendungen sind Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gegeben.
  Beispiel: Bei der Polynominterpolation ist zu n verschiedenen Nullstellen das Nullpolynom die einzige Polynomfunktion vom Grade kleiner n, welche diese Daten interpoliert. Allgemein hat das Problem genau eine Lösung.

- *Variation der Daten*
  Bei gutmütigen Daten ergeben kleine Veränderungen der Daten nur kleine Auswirkungen auf die Ergebnisse (Stabilität). Es gibt mathematische Kriterien, um lineare Gleichungssysteme auf Stabilität zu testen, etwa die *Konditionszahl*. Sie zeigt an, ob das System nahe bei einem singulären Fall liegt. (Die Konditionszahl ist für reguläre Matrizen definiert. Sie wird berechnet als Verhältnis $|\lambda_{\max}/\lambda_{\min}|$ zwischen dem grössten und dem kleinsten Eigenwert der Matrix. Skalieren der Matrix durch Multiplikation mit einer beliebigen Konstanten $c \neq 0$ beeinflusst die Konditionszahl nicht.) Natürlich steht uns dieses Hilfsmittel hier nicht zur Verfügung.

  Im Zweifelsfalle kann aber das CAS benutzt werden, um die Rechnung mit geringfügig *veränderten Daten* zu wiederholen und das Verhalten zu beobachten, also Stabilität experimentell zu testen.

  Zu jedem inhomogenen System lässt sich das zugehörige homogene System lösen. Der Struktursatz über die Lösung von inhomogenen Systemen zeigt einen nützlichen Zusammenhang, der sich zum Testen nutzen lässt.

- *Variation der Algorithmen*
  Bei Kontrollrechnungen soll die Rechenmethode oder die Einstellung des Rechners (z.B. `mode exact` oder `mode approximate`) gewechselt werden. Im Zweifelsfalle nach `rref()` zum Beispiel `zeros()`, `solve()`, `det()` verwenden und gewisse formale Parameter als Unbekannte behandeln. Die Reihenfolge der Gleichungen oder die Anordnung (Bezeichnung) der Unbekannten ändern. Unsere Beispiele belegen, dass ab und zu numerische Solver zuverlässiger sind als formal exakte (verschiedene `Mode`-Einstellungen benutzen).

- *Einsetzprobe*
  Diese Methode ist theoretisch sicher. In der Praxis ergeben sich Probleme

  - beim numerischen Rechnen wegen der Rundungsfehler
  - beim Formalen Rechnen, Test auf Gleichheit setzt Normalformen für die auftretenden Terme voraus.

- *Determinanten*
  Mit einer formal berechneten Determinante lässt sich abklären, ob eine Matrix regulär sei. Als Faustregel gilt bei numerischen Berechnungen: Determinanten nahe bei 0 sind numerisch verdächtig. Allerdings gibt es für jedes reguläre System ein äquivalentes mit

einer Determinante, die beliebig nahe bei 0 liegt. Es genügt, die erweiterte Matrix des Systems mit einer hinreichend kleinen aber positiven Konstante zu multiplizieren.

Bemerkungen

Wenn ein Ergebnis garantiert richtig sein muss, genügt *eine* einzige Rechnung nie. *Kontrollen sind nötig.* Absolute Sicherheit gibt es selten. In der Praxis muss auch die Qualität der Daten in die Beurteilung einbezogen werden. Wie genau sind die Daten? Wie wirken sich die Ungenauigkeiten auf die Ergebnisse der Rechnung aus? Bei stabilen Problemen haben kleine Variationen nur kleine Auswirkungen. Es gibt schlecht konditionierte lineare Gleichungssysteme, die sich numerisch instabil verhalten.

Anregung Testmethoden eher beiläufig einflechten, bei guter Gelegenheit auf erfolgreiche Tests hinweisen, exemplarisch vorgehen, Erfolge dokumentieren lassen.