Lineare Gleichungssysteme

Aufgaben

Version vom 9. Oktober 2013

A Lineare Gleichungssysteme, zwei oder drei Unbekannte

Grundbegriffe

1. Begründe oder widerlege folgende Aussagen über die Gleichung $3x + 4y = 24$

   a) Eine Lösung der Gleichung lautet $x = 4$ und $y = 3$.

   b) Das Zahlenpaar $(4|3)$ ist eine Lösung der Gleichung.

   c) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gehört der Punkt mit Koordinaten $(4t|6 - 3t)$ zur Lösungsmenge der Gleichung.

   d) Die Lösungsmenge der Gleichung ist eine Gerade.

   e) Die Lösungsmenge der Gleichung ist die Gerade mit der Steigung $\frac{4}{3}$ durch den Punkt $P(8|0)$.

2. Welche der folgenden Paare von Gleichungen sind äquivalent?

   a) $x + 2y = 4$ und $x + 2y - 1 = 3$

   b) $-x + y = 0$ und $-2x + 2y = 2$

   c) $2x + 3y = 4$ und $3x + 4y = 5$

3. Gegeben ist die Gleichung $\mathbf{g}$: $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 1$

   a) Wie lautet eine zu $\mathbf{g}$ äquivalente Gleichung mit ganzen Koeffizienten?

   b) Für welche Zahlen a, b ist $\mathbf{g}$ äquivalent zu $y = ax + b$?
   Ist die Antwort eindeutig?

4. Begründe oder widerlege:
   Die Lösungsmenge der Gleichung $4x - 7y = 32$ ist gegeben durch:

   a) $\{(8 + \frac{7}{4}s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

   b) $\{(8 + 7t, 4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

   c) $\{(1 + 7u, -4 + 4u) \mid u \in \mathbb{R}\}$

   d) $\{(1 + 7v, 4v) \mid v \in \mathbb{R}\}$

5. Begründe oder widerlege die folgenden Aussagen:

   a) Wenn eine lineare Gleichung mit 3 Unbekannten die Lösung $(0, 0, 0)$ besitzt, so ist die Gleichung homogen.

b) Wenn eine lineare Gleichung mit 3 Unbekannten die Lösung $(1, 2, 3)$ besitzt, so ist die Gleichung inhomogen.

6. Begründe oder widerlege folgende Aussage über ein lineares Gleichungssystem:

   a) Sind alle Koeffizienten rational, so gibt es ein äquivalentes System mit ganzzahligen Koeffizienten.

   b) Sind alle Koeffizienten ganzzahlig, so sind alle Lösungen rational.

   c) Ist das System linear und *homogen* mit rationalen Koeffizienten, so ist es genau dann regulär, wenn die Nullösung die einzige *ganzzahlige Lösung* ist.

Geometrie der Lösungsmenge

7. Gegeben sind die Gleichungen mit *zwei* Unbekannten

   a) $x = 2$ genauer $x + 0 \cdot y = 2$

   b) $y = x - 2$

   c) $x + 2y = 4$

   Stelle die Lösungsmengen in einem Koordinatensystem graphisch dar.

8. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -2x + y &= 6 \end{aligned}$$

   a) graphisch

   b) durch Handrechnung

9. Es seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Lösungen der Gleichung **g**: $4x + 3y = 18$.
   Begründe oder widerlege die Behauptungen:

   a) Das Paar $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ löst die zugehörige homogene Gleichung $4x + 3y = 0$

   b) Das Paar $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$ ist eine Lösung der Gleichung **g**.

   c) Für jede Zahl u ist auch $(ux_1 + (1 - u)x_2, uy_1 + (1 - u)y_2)$ Lösung von **g**.

   d) Die Menge $\{(ux_1 + (1 - u)x_2, uy_1 + (1 - u)y_2) \,|\, 0 \leq u \leq 1\}$ beschreibt alle Punkte der Strecke zwischen (x_1, y_1) und (x_2, y_2).

10. Angenommen, (x_1, y_1) und (x_2, y_2) seien zwei Lösungen der Gleichung **g**: $ax + by = c$.
    Begründe oder widerlege die Behauptungen:

    a) Das Paar $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ löst die zugehörige homogene Gleichung $ax + by = 0$

    b) Das Paar $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$ ist Lösung der Gleichung **g**.

    c) Für jede Zahl u ist auch $(ux_1 + (1 - u)x_2, uy_1 + (1 - u)y_2)$ Lösung von **g**.

    d) Für alle a, b, c ist die Lösungsmenge der Gleichung $ax + by = c$ eine Gerade.

11. Wir betrachten eine Gleichung **e**: $3x - 4y + 5z = 60$ mit drei Unbekannten. Begründe oder widerlege:

    a) $(20, 0, 0)$, $(0, -15, 0)$, $(0, 0, 12)$ sind Lösungen.

b) $(5,0,9)$, $(0,10,20)$, $(24,3,0)$ sind Lösungen.

c) Die Lösungsmenge von $\mathbf{e}$ ist *keine* Gerade.

d) Die Lösungsmenge von $\mathbf{e}$ ist eine Ebene.

e) Stelle die Lösungsmenge von $\mathbf{e}$ in einem Schrägbild graphisch dar.

12. Stelle *alle* prinzipiell möglichen Fälle für die gegenseitige Lage von drei Ebenen im Raum zusammen. Charakterisiere jeden der Fälle mit einer Skizze, welche die gegenseitige Lage der drei Ebenen schematisch zeigt.

13. Verschiedene lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten wurden in Matrixform mit Äquivalenzumformungen bearbeitet. Hier sind die Antworten:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad Q = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \qquad S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad U = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

a) Beschreibe für jedes der Systeme die geometrische Gestalt der Lösungsmenge in Worten.

b) Für welche der Lösungsmengen ist eine Parameterdarstellung sinnvoll? Wie lautet diese?

B Gausselimination, von der Handrechnung zum CAS-Einsatz

Hinweis

Die Aufgaben dieses Abschnitts sollen mehrfach bearbeitet werden und zwar

- von Hand oder interaktiv mit dem CAS
- mit einem auf lineare Gleichungssysteme zugeschnittenen Werkzeug wie rref(), simult(), Simultaneous Eqn Solver
- mit allgemeinen CAS-Werkzeugen wie solve(), zeros()

Was bezweckt diese mehrfache Bearbeitung? Nur sie erlaubt Vor- und Nachteile der verschiedenen Lösungsarten zu vergleichen. Nur so kannst du erfahren, welches Werkzeug des CAS für welche Aufgabe taugt. Beachte auch, dass die Wahl der Werkzeuge auch von den Datentypen in der Aufgabenstellung abhängt (zB numerische Daten, symbolische Daten)
Erstelle eine *Übersicht zu Vor- und Nachteilen der verschiedenen Werkzeuge*, wie du sie persönlich erfährst. Wie beurteilen andere Leute in deiner Klasse die entsprechenden Erfahrungen? Es ist interessanter, wenn ihr eure Antworten erst am Schluss der Übung vergleicht. Ein Vergleich ist nur möglich wenn alle auf dieselben Merkmale achten:

- welchen Aufwand erfordert die Eingabe im Rechner?
- welche Antworten (Form und Inhalt, Datentyp) erzeugen die verschiedenen Methoden?
- wie gross ist der Aufwand, um die Lösungsmenge zu bestimmen und sie auf Korrektheit zu prüfen?

Aufgaben

1. Welches sind die Lösungen von folgenden Gleichungssystemen?

$$\begin{aligned} x+2y &= 3 \\ 3x+4y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y &= 0 \\ 4x+5y &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y &= 0 \\ 4x+5y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2p-q &= 0 \\ p+2q &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2u^2-v^2 &= 0 \\ u^2+2v^2 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{2}{p}-\frac{1}{q} &= 0 \\ \frac{1}{p}+\frac{2}{q} &= 10 \end{aligned}$$

2. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}\cdot x+y &= 0 \\ 665857x-470832y &= 0 \end{aligned}$$

   a) graphisch durch eine gute Skizze
   b) mit solve() im mode exact
   c) mit solve() im mode approximate
   d) mit Handrechnung, wobei zu beachten ist, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

   Was bedeutet das Ergebnis algebraisch, numerisch, geometrisch?

3. Bestimme alle Lösungen der Gleichungsysteme. Welche geometrische Gestalt hat die Lösungsmenge?

$$\begin{aligned} r+s+t &= 1 \\ r+2s+4t &= 2 \\ r+3s+9t &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r+s+t &= 2 \\ r+2s+4t &= 1 \\ r+3s+9t &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r+2s+3t &= 1 \\ 4r+5s+6t &= 2 \\ 7r+8s+9t &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r+2s+3t &= 0 \\ 4r+5s+6t &= 0 \\ 7r+8s+9t &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u+2v &= 1 \\ v+2w &= 2 \\ w+2u &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b-2c &= 0 \\ a-c &= 0 \\ 2a-b &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b-2c &= 1 \\ a-c &= 2 \\ 2a-b &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b-2c &= 1 \\ a-c &= 2 \\ 2a-b &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b-2c &= 1 \\ a-c &= 2 \end{aligned}$$

4. Mit m wird in den folgenden Gleichungssystemen ein formaler Parameter bezeichnet.

$$\begin{aligned} m\cdot u+v+w &= 0 \\ u+m\cdot v+w &= 0 \\ u+v+m\cdot w &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} m\cdot u+v+w &= 1 \\ u+m\cdot v+w &= 0 \\ u+v+m\cdot w &= 0 \end{aligned}$$

Für welche Werte von m ist das jeweilige System regulär? Warum muss die Antwort in beiden Fällen gleich lauten? Verwende beim Lösen

a) einen Solver, der formal algebraisch und exakt rechnet.

b) Handrechnung oder interaktive Zeilenumformung mit dem CAS und Gausselimination.

5. Mit a, b, c werden drei formale Parameter bezeichnet.

$$\begin{aligned} x+a\cdot y+a^2\cdot z &= b \\ x+b\cdot y+b^2\cdot z &= c \\ x+c\cdot y+c^2\cdot z &= a \end{aligned}$$

Unter welchen Bedingungen an (a, b, c) hat das System genau eine Lösung?

a) Beantworte die Frage durch Zeilenumformung von Hand oder interaktiv mit dem CAS. Welche Fallunterscheidungen sind nötig?

b) Wende `rref()` auf die Matrix des zugehörigen homogenen Systems an.

c) Wende `rref()` auf die Matrix des inhomogenen Systems an.

d) Löse das Gleichungssystem im Falle $a = b = c$ auch mit `solve(...)|a=b and b=c`.

Inwiefern widerspricht das Verhalten des CAS dem Satz der die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Zusammenhang mit der Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung stellt?

C Allerlei Beispiele und Anwendungen

Es folgen einige ausgewählte Anwendungen linearer Gleichungssysteme. Bei manchen Anwendungen sind einige Kenntnisse aus dem jeweiligen Fachgebiet nötig, bis die linearen Gleichungen formuliert sind. Die Lösung ist eine rein mathematische, ja sogar algorithmische Angelegenheit. Die Kontrolle der mathematilschen Lösung und ihre Interpretation muss vor dem fachlichen Hintergrund erfolgen. Daher sind Anwendungen ab und zu anspruchsvoll.

Aufgaben

1. Pyrit FeS_2 und Sauerstoff O_2 verbrennen zu Schwefeldioxid SO_2 und Roteisenstein Fe_2O_3. Für welche positiven ganzen Zahlen p, q, u, v stimmt die Bilanz der Teilchensorten vor und nach der Reaktion $p\ \mathrm{FeS_2} + q\ \mathrm{O_2} \to u\ \mathrm{Fe_2O_3} + v\ \mathrm{SO_2}$?

2. Von drei Milchsorten sind folgende Angaben bekannt

Milchsorte	A	B	C
Fettgehalt	3%	4%	6%
Literpreis	0.4	0.6	0.8

   a) Wie lassen sich die Sorten mischen, um Milch mit 5% Fettanteil zu erhalten?

   b) Welches ist die preisgünstigste Mischung? Wie gross ist dann der Literpreis?

3. Bekanntlich lässt sich jeder Kreis in der xy-Ebene durch eine Gleichung der Art $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ beschreiben.

   a) Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte $(7|-2)$, $(5|-4)$, $(-3|4)$ verläuft?

   b) Wie lautet die Gleichung der Kugel, welche durch die vier Punkte $(7|6|3)$, $(0|4|8)$, $(8|-4|4)$, $(1|0|9)$ verläuft?

4. Für welches kubische Polynom $p : x \mapsto p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gilt $p(1) = 7$, $p(3) = -11$, $p(5) = -1$ und $p(6) = 20$?
   Wie gross sind $p(2)$ und $p(4)$?
   Ist die Antwort eindeutig?

5. Wie gross ist die Summe der ersten n Quadratzahlen? Es ist bekannt, dass die Funktion $s_2 : n \mapsto \sum_{k=0}^{n} k^2$ ein kubisches Polynom ist.

   a) Für welche Zahlen a, b, c, d gilt $\sum_{k=0}^{n} k^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$?

   b) Wie gross ist $s_2(10^6)$?

   c) Wie lautet eine entsprechende Summenformel für $s_3 : n \mapsto \sum_{k=0}^{n} k^3$?

6. Der Rechenaufwand für eine Multiplikation oder Division mit zwei r-stelligen Gleitkommazahlen ist deutlich grösser jener als für eine Addition oder Subtraktion. Es ist daher üblich, den Rechenaufwand für gewisse Algorithmen so abzuschätzen, dass nur

die Operationen zweiter Stufe gezählt werden. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten. Die zugehörige $n \times (n+1)$-Matrix werde mit Gausselimination bearbeitet. Wie viele Operationen zweiter Stufe benötigt dieses Verfahren höchstens?

a) Wie lautet eine rekursive Beschreibung des Rechenaufwandes?

b) Mit welcher Formel lässt sich der Aufwand direkt bestimmen?

c) Wie verändert sich der Rechenaufwand, wenn die Grösse des Gleichungssytems verdoppelt wird? [asymptotische Näherung genügt]

7. In einem *magischen Quadrat* werden $n \times n$ Zahlen so angeordnet, dass die Summen in allen Zeilen, die Summen in allen Spalten und in den beiden Diagonalen je denselben Wert ergeben.

   a) Welche magischen 3×3-Quadrate gibt es?

   b) Gibt es solche, in denen jede der Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ auftritt?

   c) Begründe oder widerlege: Jedes magische $n \times n$-Quadrat ist Lösung eines Systems von homogenen linearen Gleichungen.

   d) Begründe oder widerlege: Summen und skalare Vielfache von magischen $n \times n$-Quadraten sind magisch.

8. Für jedes konvexe Polyeder mit E Ecken, K Kanten und F Flächen gilt nach Euler's Polyedersatz die Beziehung $E - K + F = 2$.

   a) Angenommen, ein konvexes Polyeder besteht aus genau p Fünfecken und h Sechsecken, wobei in jeder Ecke drei Kanten enden. Welche Einschränkungen ergeben sich aus diesen Angabe für die möglichen Anzahlen p und h?

   b) Begründen oder widerlegen Sie: Es gibt nur endlich viele Typen von konvexen Polyedern, die aus lauter Dreiecken aufgebaut sind, wobei in jeder Ecke drei, vier oder fünf Kanten zusammenkommen.

D Weitere Experimente und Erfahrungen mit dem CAS

Das CAS ist weder numerisch noch beim formalen Rechnen ein absolut zuverlässiges Werkzeug. Unabhängige Kontrollen sind unabdingbar.

Hinweis Es ist zu erwarten, dass gewisse Ergebnisse je nach dem verwendeten Produkt oder der Softwareversion unterschiedlich ausfallen könnten.

Formale Berechnungen

1. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + ay &= b \qquad (1) \\ -x + by &= a \qquad (2) \end{aligned}$$

   Hinweis: Gleichung (1) soll auf auf `g1` und Gleichung (2) auf `g2` gespeichert werden. Das CAS behandelt `g1` und `g2` als *Gleichungsobjekte*.

   a) Löse das Gleichungssystem von Hand. Unter welchen Bedingungen existiert genau eine Lösung? Sind die Bedingungen notwendig oder hinreichend?
   b) Bearbeite das Gleichungssystem mit dem CAS interaktiv:
      Wie interpretiert das CAS die Befehle `g1+g2` und `(g1+g2)/(a+b)`?
      Wie lässt sich das System mit dem CAS interaktiv lösen?
      Welche Unterschiede zur Handrechnung stellst du fest?
   c) Welche Antwort liefert der Befehl `solve(g1 and g2,` $\{x, y\}$`)`?
   d) Welche Antwort liefert der Befehl `solve(g1 and g2,` $\{x, y, a, b\}$`)`?
   e) Vergleiche die verschiedenen Lösungsarten. Unter welchen Bedingungen findet das CAS die vollständige Lösung?

2. Es ist

$$m = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & a & b \\ -1 & b & a \end{array} \right]$$

   die Matrix zur vorangehenden Aufgabe. Welche Antwort findes das CAS bei folgenden Eingaben?

   a) `rref(m)`
   b) `rref(m) | a=1 and b=-1`
   c) `rref(m)`
      `ans(1) | a=1 and b=-1`

   Wie werden die Eingaben in den Fällen (b) und (c) vom CAS verarbeitet?

3. Löse die Gleichungssysteme von Hand und mit dem CAS. Vergleiche und kommentiere die Ergebnisse.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y &= k_1 \\ a_2x + b_2y &= k_2 \end{aligned}$$

   a) Wie viele Fallunterscheidungen sind bei der Handrechnung nötig?

b) Begründe oder widerlege: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ gilt genau dann, wenn das System regulär ist.

c) Wie viele Tests sind im singulären Fall $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ nötig, um die Lösungsmenge genau zu identifizieren?

d) Wende rref() auf das homogene Gleichungssystem an. Welcher Unterschied zur Antwort der Handrechnung zeigt sich?

e) Wende rref() auf das inhomogene Gleichungssystem an. Welchen Unterschied zur Antwort der Handrechnung bemerkst du?

f) Was bewirkt der Befehl zeros($\{a1*x+b1*y, a2*x+b2*y\}, \{x, y, a1, a2, b1, b2\}$) ? Wie lautet der entsprechende Befehl zum Bearbeiten der inhomogenen Gleichung und was bewirkt er?

4. Wie viele Fallunterscheidungen sind nötig, wenn n lineare Gleichungen mit n Unbekannten und einer allgemeinen Koeffizientenmatrix durch Äquivalenzumformungen mit dem Gaussalgorithmus gelöst werden sollen? Warum wird beim Einsatz eines CAS auf diese Fallunterscheidungen verzichtet?

Determinanten

Benutze die Operationen rref(), det(), solve() oder zeros(), um folgende Fragen zu beantworten:

5. Für welche Zahlen p werden die folgenden homogenen linearen Gleichungssysteme singulär?

$$\begin{aligned}(1-p)\cdot x + 2y &= 0\\ 3x+4y &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}x + 2y &= 0\\ 3x+(4-p)\cdot y &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(1-p)\cdot x + 2y &= 0\\ 3x+(4-p)\cdot y &= 0\end{aligned}$$

6. Wir betrachten das Gleichungssystem mit einem Parameter a.

$$\begin{aligned}(a+1)\,x + y &= 1\\ x + (a-1)\,y &= 0\end{aligned}$$

a) Begründe oder widerlege: Für alle Zahlen $a \in \mathbb{Q}$ ist das Gleichungssystem regulär.

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das System genau eine Lösung, für welche ist es lösbar?

7. Für welche Zahlen b hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}b\cdot x + y + z &= 1\\ x + b\cdot y + z &= 0\\ x + y + b\cdot z &= 1\end{aligned}$$

genau eine Lösung, für welche ist es lösbar?

8. Für welche Zahlen c hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}c\cdot x + y + z &= 1\\ x + c\cdot y + z &= c\\ x + y + c\cdot z &= 1\end{aligned}$$

genau eine Lösung, für welche ist es lösbar?

9. Für welche Zahlen d hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} d\cdot x+y+z &= 0 \\ x+d\cdot y+3z &= 0 \\ x+5y+d\cdot z &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} d\cdot x+y+z &= 1 \\ x+d\cdot y+3z &= 0 \\ x+5y+d\cdot z &= 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung, für welche ist es lösbar? Wie hängt die Antwort vom verwendeten Mode ab? (Mode approximate und Mode exact)

10. Im folgenden Gleichungssystem sind x, y, z die Unbekannten. Die Zahl e tritt als formaler Parameter auf:

$$\begin{aligned} e\cdot x+y-2z &= 1 \\ x-y+2z &= e \\ 2x-y+e\cdot z &= 2 \end{aligned}$$

a) Löse das Gleichungssystem mit solve() oder rref() Welche Werte von e erfordern eine Sonderbehandlung?

b) Berechne die Determinante der Matrix des Gleichungssystems. Wie viele Sonderfälle für die Wahl von e sind zu erwarten?

c) Für welche Werte von e ist das System

- regulär?
- unlösbar?
- nicht eindeutig lösbar?

Wo versagt das CAS?

11. Inwiefern ergänzt die Berechnung der Determinante die Anwendung von rref(), solve() oder zeros()?

Numerische und symbolische Berechnungen mit dem CAS

Das Verhalten des CAS soll in Experimenten getestet werden. Dazu dienen die folgenden Aufgaben. Die Beispiele sind teilweise so konstruiert, dass sie Extremfälle behandeln. Jede uns bekannte Fehlerart soll erfahrbar gemacht werden. Das Fazit: Kontrollen sind auch beim *'exakten'* Rechnen mit dem CAS nötig, um Fehler zu erkennen und zu vermeiden. Die wichtigsten Erfahrungen zum Verhalten des CAS sollen dokumentiert, diskutiert und zum Schluss knapp zusammengefasst werden.

12. Drei lineare Gleichungssysteme wurden mit Äquivalenzumformungen auf Dreiecksform gebracht. Hier sind die Antworten:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \mathsf{1E-12} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \mathsf{1E-15} \end{bmatrix}$$

   a) Begründe oder widerlege: Die drei Gleichungssysteme sind äquivalent.
   b) Berechne rref(A), rref(B), rref(C) exakt und numerisch. Welche Folgerung ergibt sich aus den Ergebnissen?

13. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem, dessen Matrix

$$M(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 5 \\ 3 & 2 & 3 & | & 8 \\ 4 & 3 & 4 & | & s+11 \end{bmatrix}$$

   noch von einer frei wählbaren Zahl s abhängt. Berarbeite die folgenden Fragen.

   a) Berechne rref(M(0)) und rref(M(1)).
   b) Berechne rref(M(10^{-11})) und rref(M(10^{-12})) sowohl numerisch als auch formal exakt.
   c) Berechne formal rref(M(s)).
   d) Für welche Werte von s ist das Gleichungssytem mit der Matrix $M(s)$ lösbar?

14. In den folgenden Beispielen sei $s > 0$

$$A(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1-s & | & 1 \\ 1 & 1+s & | & 0 \end{bmatrix} \qquad B(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1-s & | & 1 \\ 1+s & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Berechne rref(A(s)) und rref(B(s)) formal exakt.
   b) Warum sind die zu den Matrizen $A(s)$ und $B(s)$ gehörigen linearen inhomogenen Gleichungssysteme regulär?
   c) Wähle $s = 0.1$; die Matrizen $A(0.1)$ und $B(0.1)$ beschreiben je ein lineares Gleichungssystem. Wie lauten deine Näherungslösungen bei der graphischen Lösung in einem Koordinatensystem? Was bemerkst du? Vergleiche die gefundenen Antworten mit den numerischen Näherungen, die mit rref(A(0.1)) und rref(B(0.1)) erzeugt werden.
   d) Setze für s der Reihe nach 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8} ein und lasse rref(A(s)) und rref(B(s)) vom CAS numerisch bestimmen.
      Wie lautet das Ergebnis bei exakter Rechnung?

e) Führe die folgenden Befehle der Reihe nach aus:

DelVar s rref(A(s)) → E(s) E(10^{-7})

DelVar s rref(B(s)) → F(s) F(10^{-7})

Vergleiche die Ergebnisse der numerischen und der formal exakten Berechnung mit den Antworten der vorangehenden Frage.

15. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot x + y &= 1 \\ 665857x + 470832y &= 470832 \end{aligned}$$

mit dem CAS numerisch und formal exakt. Was beobachtest du und wie erklärst du die Beobachtung? Was bedeutet die numerische Lösung geometrisch, was die exakte Lösung?

16. Wir betrachten zwei homogene lineare Gleichungssysteme mit Matrizen A und B gegeben durch:

$$A = \begin{bmatrix} (\sqrt{6}-4) & -2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{2} & 2(\sqrt{3}-2) & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2(\sqrt{2}-2) \end{bmatrix}$$

und

$$B = \begin{bmatrix} (\sqrt{6}-4) & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2 & 2(\sqrt{3}-2) & 0 \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & 2(\sqrt{2}-2) \end{bmatrix}$$

Beachte, dass A aus B entsteht, indem die Zeilen von B als Spalten von A geschrieben werden (Transposition). Begründe oder widerlege:

a) Das Gleichungssystem mit der Matrix A ist regulär.

b) Das Gleichungssystem mit der Matrix B ist regulär.

Führe alle Berechnungen im Mode approximate und im Mode exact aus. Kommentiere die Ergebnisse. Welches Ergebnis verblüfft? Berechne auch $\det(A)$ und $\det(B)$ mit verschiedenen Mode-Einstellungen.

Hinweis: Ist A die transponierte Matrix von B, so gilt $\det(A) = \det(B)$.

17. Formuliere deine Erfahrungen zum Thema Numerik und Kontrollen kurz und klar.

Plausibilitätstests

Wenn ein Ergebnis garantiert richtig sein muss, genügt *eine* einzige Rechnung nie. *Kontrollen sind nötig.* Absolute Sicherheit gibt es selten. In der Praxis muss auch die Qualität der Daten in die Beurteilung einbezogen werden. Wie genau sind die Daten? Wie wirken sich die Ungenauigkeiten auf die Ergebnisse der Rechnung aus? Bei stabilen Problemen haben kleine Variationen nur kleine Auswirkungen. Wie lassen sich instabile Probleme erkennen?

18. Warum ist eine Überprüfung mit dem CAS nicht immer zuverlässig?

19. Formuliere einige Ideen, um falsche oder unvollständige Antworten eines CAS zu entdecken.

20. Schlage einige Massnahmen vor, um Antworten eines CAS auf Plausibilität zu testen.