„Der Code“ – Lernaufgabe als Vorbereitung zum logarithmischen Rechnen

Diese Lernaufgabe zeigt den Schülern wie eine beliebige Potenz zweier reeller Zahlen näherungsweise berechnet werden kann. Sogar völlig ohne Taschenrechner!

Vermutlich alle Schüler können sich gar nicht vorstellen, dass man eine Potenz zweier beliebiger reeller Zahlen **nur mit Papier und Bleistift** berechnen kann. Bereits dies dürfte für mathematisch interessierte Gymnasiumsschüler Motivation genug sein die Lernaufgabe zu lösen. Damit die Aufgabe aber auch mathematisch weniger interessierte Schüler anspricht, ist sie hier in eine Rahmengeschichte verpackt: James Bond muss den Code für einen Tresor knacken!

Unsere Erfahrungen mit zwei Halbklassen im 11. Schuljahr des mathematischen Profils des Gymnasiums an der Kantonsschule Limmattal in Urdorf bei Zürich (Schweiz) zeigen, dass die Aufgabe in 45 min von den meisten Schülern gelöst werden kann. Dabei war es erlaubt miteinander zu diskutieren. Trotzdem wurde die Aufgabe als eher schwierig eingestuft.

Voraussetzungen:

Die einzige Voraussetzung besteht darin, dass die Schüler mit dem Rechnen mit Potenzen vertraut sind, d.h. die Potenzrechenregeln kennen. Insbesondere braucht man die folgenden beiden Potenzregeln:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Geschichtliches

Die in der Lernaufgabe verwendete Methode beruht auf einer Idee des Schweizers Jost Bürgi (1552–1632), geboren in Lichtensteig. Er war Uhrmacher von Beruf und arbeitete als Astronom am Hof des deutschen Königs in Prag. Dabei war er auch zuständig für eine effiziente Berechnung der Zinsen. Bürgi gilt als der erste „Erfinder“ der Logarithmen, wie man dank eines Briefes aus dem Jahr 1588 des Astronoms Reimarus Ursus Dithmarus weiss. Darin schreibt der Astronom, dass Bürgi eine Methode habe, seine Berechnungen zu vereinfachen, eben die Logarithmen.

Zu bemerken ist noch, dass Michael Stifel (1480–1567), vermutlich als Erster, die „wunderbaren Eigenschaften der Lograithmen“ in seinem Buch „arithmetica integra“ (1544) beschrieben hat. Bemerkt hatte er, dass die Multiplikation von Zweierpotenzen der Addition der Exponenten entspricht. Dabei verwendete er auch negative Exponenten.

In seinem Werk findet man folgende Tabelle:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Allerdings wusste er nicht wie man systematisch die Logarithmen für eine beliebige Basis berechnen sollte.

Publiziert hat Bürgi seine Methode und die Logarithmentabellen erst im Jahr 1620. Daher wird normalerweise, d.h. vor allem in der angelsächsischen Literatur, die Erfindung der Logarithmen John Napier (1550–1617) zugeschrieben, der sein Werk bereits 1614 veröffentlichte. Zudem ist John Napier auch der Erfinder des Dezimalpunktes. Allerdings waren seine Logarithmen-Tabellen nicht wirklich brauchbar. Sein Freund Henry Briggs (1556–1630) erkannte dies und berechnete dann neue, bessere Tabellen, basierend auf der Basis 10, d.h. mit der Eigenschaft $\log_{10}10 = 1$. Ebenfalls etwa zur gleichen Zeit (1620) hat der Waliser, aus Hertfordshire, Edmund Gunter (1581–1626) eine logarithmische Tabelle des Sinus und des Tangens publiziert (*Canon Triangulorum*). Übrigens war Gunter vermutlich der erste Forscher, der bemerkte, dass eine magnetische Kompassnadel nicht zu allen Zeiten immer die gleiche Deklination anzeigt.

Bürgi benutzte zur Berechnung der Logarithmen die Potenzen der Basis 1.0001, deren Potenzen besonders einfach zu berechnen sind (siehe folgende Facsimile Abbildung). Es ist zu bemerken, dass am linken Rand die Reproduktion offensichtlich leicht abgeschnitten ist, denn der erste Eintrag sollte 100000000 sein ($= 1.0001^0$), während zu oberst in der zweiten Spalte 100501227 ($= 1.0001^{500}$) steht und zu oberst in der dritten Spalte steht 101004966 ($= 1.0001^{1000}$). Offensichtlich hat Bürgi statt dem Dezimalpunkt eine Null geschrieben! Es scheint, war es J. Kepler (1571-1630) der Bürgi davon überzeugen konnte, dass er seine Methode und die Tabellen publizieren sollte. Dies mag auch erklären, weshalb Bürgi seine Tabellen nicht schon um 1588 herum veröffentlichte.

Quellen

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/

http://www.thocp.net/sciences/logarithm_hist.htm

http://members.tripod.com/sfabel/mathematik/themen_arithmetik_ln.html

http://www.micheloud.com/FXM/LOG/

Eine Seite aus Bürgi's Publikation von 1620 in Prag:

„Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen".

0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
0000000	100501227	101004966	101511230	102020032	102531384	103045299	10356179
··10000	····11277	····15067	····21381	····30234	····41637	····55603	····72141
··20001	····21328	[illegible]	····31574	····40437	····51991	····65904	····8110
··30003	····31380	····35471	····41682	····50641	····62146	····76216	····92861
··40006	····41433	····45374	····51841	····60846	····72401	····86523	103603221
··50010	····51497	[illegible]	[illegible]	····71062	····82667	····96832	····13581
··60015	····61543	····65584	····72158	····81259	····92918	103107141	····23942
··70021	····71599	····75691	····82309	····91467	102603177	····17451	····34305
··80028	····81656	····85799	····92461	[illegible]01676	····13438	····27764	····4466
··90036	····91714	····95907	101602627	····11887	····23099	····38077	····55035
100045	100601773	101106017	····12757	····22098	····33961	····48391	····65139
··10055	····11834	····16147	[illegible]	····32310	····44725	····58705	····75761
··20066	····21895	····26239	····33111	····42523	····54489	····69021	····80137
··30078	····31952	····36352	····43274	····52738	····64755	····79338	····96501
··40091	[illegible]	····46465	····52119	····62953	····75021	····89656	103706871
··50105	····52084	····56580	····63604	····73169	····85289	····99975	····17241
··60120	····62150	····66696	····73770	····83386	····95557	103210295	····27613
··70136	····72216	····76812	····83938	····91670	102705817	····10616	····37986
·80153	····82283	····86930	····94106	102203524	····16097	····30932	····48360
·90171	····92351	····97043	101704275	····14045	····26369	····41161	····58734
100190	[illegible]	[illegible]	····14446	····24266	····36647	····51585	····6911
·10210	····12491	····17289	····24617	····34458	····46915	····61510	····73467
·20231	····22562	····27411	····34790	····44712	····57100	····72237	····83855
·30253	····32634	[illegible]	····44961	····54916	····67466	····82564	103801244
·40276	····42707	····47657	····55136	····65162	····77742	····92897	····16626
·50300	····52782	····57732	····65313	····75388	····88020	103303221	····21505
·60325	····62857	[illegible]	····75490	····85616	····98300	····13557	····31387
·70351	····72933	····78095	····85661	····95845	102308579	····23683	····41770
·80378	····83011	····88162	····95846	102306074	····18860	····34216	····52155
·90406	····93189	····98291	101506025	····16306	····29147	····44144	[illegible]
300435	100803168	101308421	····16206	····26530	····39425	····54883	····72921
·10465	····13248	····18552	····26387	····36765	····49702	····65219	····83311
·20496	····23330	····28654	····36570	····47003	····59993	····75555	[illegible]
·30528	····33412	····38817	····46754	····57237	····70279	····85293	103904091
·40561	····43496	····48950	····56939	····67473	····80566	····96232	····14481
·50596	····53580	····59065	····67124	····77710	····90855	103406571	····24873
·60631	····63665	····69221	····77311	····87947	102901144	····16917	····35265
·70667	····73757	····79358	····87499	····98186	····11434	····27254	····45659
·80704	····83839	····89496	····97687	102408426	····21725	····37606	····56055
·90742	····93927	····99635	101907877	····18667	····32017	····47940	····66440
400781	100904017	101409775	····18061	····28905	····42310	····58285	····76846
·10821	····14107	····19916	····28267	····39151	····52604	····68631	····87243
·20862	····24199	····30059	····38455	····49396	····62901	····78972	····97642
·30904	····34291	····40201	····48646	····59641	····73196	····89126	104008041
·40948	····44384	····50345	····58841	····69587	····83493	····99674	····18449
·50991	····54479	····60489	····69037	····80133	····93791	103510024	····28848
·61037	····64574	····70636	····79234	····90381	103004091	····70325	····39241
·71083	····74671	····80783	····89432	102500630	[illegible]	[illegible]	····50645
·81130	····84765	····90931	····99631	····10880	····24695	····41055	····60059
·91178	····94867	101501080	102009831	····21135	····34995	····51435	····70466
501227	101004966	····11230	····20032	····31384	····45299	····61790	····80516

Das Lösen der Lernaufgabe

In der Lernaufgabe verwenden wir der Einfachheit halber die Potenzen der Basis 1.01, die ebenfalls ohne Taschenrechner einfach zu berechnen sind. Unsere Erfahrungen mit den Schülern zeigt, dass hier eine kleine Schwierigkeit besteht, weil Schüler heutzutage **alle** Rechnungen mit dem Taschenrechner erledigen. Deshalb muss wohl der Lehrer darauf hinweisen, dass $1.01^2 = 1.01 + 0.0101 = 1.0201$ wobei der zweite Summand ein Hunderstel der Basis 1.01 ist. Entsprechend ist 1.01^3 als $1.0201 \cdot 1.01$ zu berechnen, also: $1.0201 + 0.010201 = 1.030301$. Zudem sollte an dieser Stelle auch noch darauf hingewiesen werden, dass es nicht nötig ist, mehr als etwa 5 Stellen zu berechnen. D.h. entsprechend die Resultate auf die 5-te oder 6-te Stelle zu runden.

Die James Bond Rahmengeschichte führt zur Aufgabe die Potenz 2^π zu berechnen. Dabei sollen die ersten drei Stellen richtig berechnet werden. Die Schüler sollen zuerst abschätzen, welchen Wert diese Zahl ungefähr hat. Dieser Schritt sollte nicht mehr als 10 Minuten Zeit in Anspruch nehmen, damit für den Rest der Aufgabe noch genügend Zeit zur Verfügung steht. Um 2^π abzuschätzen, sollen sie eine graphische Darstellung der Funktion $y = 2^x$ zeichnen und bei möglichst vielen Werten den Funktionswert berechnen. Bei $x = 1, 2, 3, \ldots$ ist dies einfach.

Sie sollen nun erkennen, dass die Potenzen $2^{1.5}$, $2^{2.5}$, $2^{3.5}$, ... berechnet werden können, wenn man weiss, was die Wurzel aus Zwei ergibt. Analog kann man dies natürlich auf $2^{1.25}$, $2^{2.25}$, $2^{3.25}$, ... erweitern.

Bei besonders interessierten Schülern (das sind nicht unbedingt die mathematisch begabteren Schüler!) kann der Hinweis helfen, dass die $\sqrt{2} = 1.41421 \ldots$ also ungefähr gleich $1.44 = 1.2^2$ ist. Somit ist auch: $2^{0.25} = \sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}} \approx 1.2$. Analog berechnet man auch $2^{0.125} \approx 1.1$.

Als nächstes besteht die Aufgabe für die Schüler darin, zu erkennen, dass man die Berechnung von 2^π aufspalten kann in $2^3 \cdot 2^{0.14159\ldots}$. Diese Potenz $2^{0.14159\ldots}$ soll abschliessend mit der Methode von Bürgi berechnet werden, indem die Tabelle der Potenzen von 1.01 ausgefüllt wird, wenigstens soweit wie notwendig.

Dabei verwendet man $1.01^{70} \approx 2$ und schliesslich $2^{0.14159} \approx 1.01^{70 \cdot 0.14159} = 1.01^{9.91} \approx 1.01^{10}$.

Dies ergibt als Näherung somit: $2^\pi \approx 8 \cdot 1.01^{10} = 8 \cdot 1.10462 = 8.83696$

Die richtige Lösung erhält man aber erst durch folgende Überlegungen:

- Diese Näherung ist zu gross, weil wir ja $1.01^{9.91}$ auf 1.01^{10} aufgerundet haben.
- Die Rahmengeschichte erklärt, dass als Code nur alles gerade oder alles ungerade Ziffern in Frage kommen! Somit ist 882 die grösst-mögliche Codezahl. Kann man aber zum Beispiel den Code 880 ausschliessen?
- Die abgerundete Näherung $2^{0.14159} \approx 1.01^{9.91} > 1.01^9$ liefert als tiefst mögliche Codezahl 876.
- Die Berechnung der Potenz $2^{0.14159}$ mit 1.1 als Basis, liefert: $2^{0.14159} \approx 1.1^{7 \cdot 0.14159} = 1.1^{0.99}$ also 1.1. Damit erhält man als Codezahl 880. Weil aber $1.1^7 = 1.9487$ und somit doch deutlich kleiner als 2 ist, können wir folgern, dass $8.80 < 2^\pi$. Von vorher wissen wir $2^\pi < 8.837$.

Daher kommt als Code wirklich nur 882 in Frage, wobei 8.82... auch die richtigen drei ersten Stellen von 2^π darstellen. Mit den Potenzen der Basis 1.01 allein kann dies allerdings nicht entschieden werden. D.h. man müsste eigentlich die Potenzen von 1.001 berechnen um 2^π sicher auf drei Stellen nach dem Komma zu bestimmen.

Weitere mögliche Fragen von Schülern

Bei der graphischen Darstellung braucht man eine möglichst genaue Skizze des Bereichs, der auch interessiert. D.h. man sollte auf der x-Achse und auf der y-Achse nur jene Abschnitte wählen, die in der Nähe von π respektive der gesuchten Zahl (2^π) liegen.

Hier besteht eine Möglichkeit der Ausdehnung der Lernaufgabe: mit linearer Interpolation und Extrapolation können sichere obere, respektive untere, Grenzen bestimmt werden.

Als alternative Berechnungsmethoden können viele verschiedene Vorschläge gemacht werden:

a) $2^{0.14} \approx 2^{1/7} = \sqrt[7]{2}$, d.h. man sucht die Nullstelle der Gleichung $x^7 - 2 = 0$

b) Eine bessere Näherung erhält man aus $\pi \approx 355/113$:

$$2^\pi \approx 2^{355/113} = 2^3 \cdot 2^{\frac{16}{113}} = 8 \cdot \sqrt[113]{2^{16}}$$

D.h. die Aufgabe besteht jetzt darin die 113-te Wurzel von $2^{16} = 65536$ zu bestimmen. Bereits wissen wir, dass:

$$\sqrt[113]{65536} \approx 1.1...$$

Als erstes berechnet man nun 1.1^{113} (z.B. auf 6 gültige Stellen). Dabei verwendet man sinnvollerweise, dass 113 = 64 + 32 + 16 + 1, also:

$$1.1^{113} = 1.1^{64} \cdot 1.1^{32} \cdot 1.1^{16} \cdot 1.1$$

Anschliessend berechnet man einen genaueren Näherungswert für die 113-te Wurzel von 65536 mit Hilfe der Binominalformel, indem man eine kleine Korrektur x zu 1.1 so bestimmt, dass $(1.1 + x)^{113} \approx 65563$ wird:

$$65563 = (1.1 + x)^{113} = 1.1^{113} + 113 \cdot 1.1^{112} \cdot x + \ldots \tag{1}$$

Diese Summe kann man näherungsweise bereits nach den ersten zwei Glieder abbrechen und macht dabei einen Fehler, der deutlich kleiner ist als $(113 \cdot 1.1^{112} \cdot x)$. Indem man die sich so ergebende Gleichung nach x auflöst, erhält man einen Schätzwert für die Korrektur x. Da man weitere positive Summanden in (1) vernachlässigt hat, ist der Schätzwert für x immer etwas zu gross. Diese Methode kann aber auch mehrere Male (iterativ) angewendet werden um x möglichst genau zu bestimmen.

Man findet mit den ersten zwei Gliedern von (1): $x \approx \dfrac{65536 - 47574.4}{113 \cdot 43349.5} = 0.003675$

Also: $\sqrt[113]{65536} \approx 1.1037$.

Dies ergibt die Näherung $2^\pi \approx 8.8296$ (anstatt $2^\pi = 8.82497...$).

c) Will man die Potenzen von 1.001 berechnen, so muss man nicht ganz bei Null anfangen. Denn wir wissen, dass $1.01^{69} < 2 < 1.01^{70}$ ist, somit wird wohl auch $1.001^{690} < 2 < 1.001^{700}$. Indem man die Binominalformel anwendet, kann man 1.001^{690} näherungsweise, z.B. auf vier Stellen genau, berechnen:

(2) $$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{690} = 1 + \frac{690}{1}\cdot\left(\frac{1}{1000}\right)^{1} + \frac{690\cdot 689}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{1000}\right)^{2} + \frac{690\cdot 689\cdot 688}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{1000}\right)^{3} + \ ...$$

Bei der obigen Formel (2) muss man nur etwa die ersten acht Glieder summieren, weil die Beiträge der Summanden schnell immer kleiner werden und bald nicht mehr die vorderen Stellen beeinflussen können.

Damit findet man: $1.001^{690} = 1.9930\ldots$

Und durch multiplizieren mit 1.001 findet man schliesslich: $1.001^{694} = 2.0010\ldots$.