Wo geht es zu den Differentialgleichungen?

H.R. Schneebeli

Version vom 29. Dezember 2017

Zusammenfassung

Der *Hauptsatz der Integralrechnung handelt von einer besonders einfachen Art von Differentialgleichung.* Er weist hier den Weg zu einem zentralen Gebiet der Analysis. Einer Idee von Felix Klein folgend zeigen wir, wie der Hauptsatz einen Zugang zur Behandlung von *Exponentialfunktion und Logarithmus* eröffnet. Computerunterstützung – ein Grafikrechner genügt bereits – erleichtert die Umsetzung.

Hinweis: Der Text richtet sich an Lehrpersonen. Es wird ein erster Schritt beschrieben, der zeigt, wie sich traditionelle Inhalte umdeuten lassen, um *Anknüpfungspunkte für Differentialgleichungen zu schaffen.* Die Aufgaben können andeuten, wie im Unterricht gearbeitet wird. Es sind meist Lernaufgaben, die die Lernenden an der Entwicklung wesentlicher Schritte und Einsichten beteiligen. Das kontrastiert mit den gewohnten Übungsaufgaben zur repetitiven Vertiefung von Fertigkeiten. Im Abschnitt [5] finden Sie weiteres Material zu Differentialgleichungen im gymnasialen Unterricht, Vertiefung, Anwendungen und Modellbildung.

1 Einleitung

Traditionell wird die Exponentialfunktion in der Schule im Rahmen der Algebra als Verallgemeinerung geometrischer Folgen eingeführt. Bei Zuordnungen $x \mapsto a \cdot b^x$ werden ganze und rationale Exponenten x eingeführt. Die suggestive Notation ist zugleich hilfreich und trügerisch, denn sie legt Definitionen und Rechenregeln auch für reelle x nahe. Probleme mit der Definition von b^x, für irrationale x lassen sich aber erst im Rahmen der Analysis einsehen und befriedigend lösen. Zur Exponentialfunktion gehört ihre Umkehrfunktion, der Logarithmus. Aber sie existiert nur, wenn reelle Exponenten zugelassen sind.

Bevor Taschenrechner in der Schule nutzbar waren, mussten Logarithmen *vor* der Trigonometrie behandelt werden, weil Logarithmentafeln oder Rechenschieber für trigonometrische Berechnungen unverzichtbar waren. Seit Taschenrechner solche Berechnungen erleichtern, ist diese vorgezogene Behandlung der Logarithmen nicht zwingend. Dennoch haben Logarithmus und Exponentialfunktion ihre Stellung im zeitlichen Ablauf der Lehrpläne bisher behalten. Damit bleibt der Blick auf die eigentliche Bedeutung der beiden Funktionen etwas verstellt.

Tatsache ist, dass Exponentialfunktion und Logarithmus erst im Rahmen der Analysis angemessen als reelle Funktionen erklärt und eingeführt werden können. Grenzwerte und Stetigkeitsüberlegungen sind unvermeidbar.

Beide Funktionen lassen sich *durch Differentialgleichungen definieren.* Die algebraischen Eigenschaften, die Rechenregeln für ln und exp, werden sich als eine Folgerung aus den Differentialgleichungen ergeben. Trotz der neuen Sichtweise bleiben wir auf vertrautem Boden.

Die Arbeitshypothese ist, dass der Hauptsatz der Integralrechnung bereits erarbeitet wurde. Die folgende Gestalt ist für die beabsichtigte Anwendung gut geeignet:

Hauptsatz der Integralrechnung
Voraussetzung: Es sei $a < b$, I:=[a,b] und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Behauptung:

1. Für jedes $A \in \mathbb{R}$ hat die *Differentialgleichung* $F' = f$ genau eine Lösung $F_A : I \to \mathbb{R}$ mit $F_A(a) := A$.

2. Die Integralfunktion $J_f : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ löst $F' = f$ mit $F(a) := 0$.

3. Ist F eine beliebige Lösung von $F' = f$ auf I, so gilt $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Die Lösung der Differentialgleichung $h'(t) = 1/t$ mit $h(1) := 0$ und $t > 0$ zeichnet sich durch besondere algebraische und analytische Eigenschaften aus, die nun hergeleitet werden. Dazu gehört auch eine Differentialgleichung für die Umkehrfunktion h^{-1}, deren Eigenschaften ebenfalls bemerkenswert sind. Dieses Vorgehen hat schon Felix Klein vor bald 100 Jahren vorgeschlagen.

2 Ein Sonderfall, die Funktion h

Es ist möglich und sinnvoll, sich in der propädeutischen Analysis vorerst nur mit Polynomfunktionen zu befassen und in diesem Rahmen auch die formalen Regeln zum Ableiten und Integrieren kennen zu lernen. Die Familie der Polynomfunktionen ist abgeschlossen bezüglich Ableitungen und Stammfunktionen. Die Abschlusseigenschaft geht jedoch verloren, sobald man von den Polynomfunktionen zu den rationalen Funktionen übergeht.

Es gilt $\int t^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}\, t^{\alpha+1} + C$ nur für $\alpha \neq -1$. Aber wie lässt sich der Ausnahmefall einsichtig bewältigen?

Der Hauptsatz der Integralrechung zeigt, dass das *Anfangswertproblem* $h'(t) = 1/t$ mit $h(1) := 0$ und $t > 0$ genau eine Lösung hat. Sie lässt sich als Integralfunktion darstellen.

$$h(t) = \int_1^t \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{für alle } t > 0$$

Wir nehmen an, dass die generischen Ableitungsregeln bereits bekannt seien und nutzen sie im Zusammenhang mit dem Hauptsatz der Integralrechnung, um nachzuweisen, dass die Lösungsfunktion h des Anfangswertproblems die bekannten algebraischen Eigenschaften einer Logarithmusfunktion aufweist. In der Tat werden wir diese Logarithmusfunktion identifizieren, indem ihre Basis bestimmt wird.

Das weitere Vorgehen wird nun teilweise durch eine Folge von Aufgaben umrissen.

Aufgaben

1. Skizzieren Sie den Graphen von $h' : t \mapsto 1/t, t > 0$ ohne weitere Hilfsmittel qualitativ richtig im Bereich $1/4 \leq t \leq 5$.

2. Überlegen Sie anhand dieser Skizze intuitiv und ohne weitere Hilfsmittel oder Berechnungen, wie sich der Graph der Funktion $h : t \mapsto \int_1^t 1/u \,\mathrm{d}u$ verhalten wird und tragen sie ihn qualitativ richtig in die Skizze ein.

3. Welche Eigenschaften von h zeigt die Skizze? Welche Eigenschaften kann sie nicht zeigen?

2.1 Algebraische Eigenschaften der Funktion h

Es sei $t > 0$, $v > 0$ und a eine beliebige rationale Zahl. Damit lassen sich zwei neue Funktionen definieren: $h_v : t \mapsto h(t \cdot v)$ und $h_a : t \mapsto h(t^a)$.

Ableitung von h_v

$$h'_v : t \mapsto \frac{1}{t \cdot v} \cdot v = \frac{1}{t} = h'(t)$$

Daraus folgt $h'(t) = h'_v(t)$ für alle $t > 0$ und alle Konstanten $v > 0$. Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gibt es für jedes v eine Konstante C_v mit $h_v(t) = h(t) + C_v$ für alle t. Speziell für $t := 1$ ist $h_v(1) = h(v) = h(1) + C_v = C_v$. Also ist $h_v(t) = h(t \cdot v) = h(t) + h(v)$ für alle positiven t, v.

Ableitung von h_a:

$$h'_a : t \mapsto \frac{1}{t^a} \cdot a \cdot t^{a-1} = \frac{a}{t} = a \cdot h'(t)$$

Das heisst: Für alle $t > 0$ ist $h'_a(t) = a \cdot h'(t)$. Daher gibt es nach dem Hauptsatz für jedes rationale a eine Konstante K_a so, dass $h_a(t) = h(t) + K_a$ für alle $t > 0$ gilt.

An der Stelle $t := 1$ folgt nun $h_a(1) = \int_1^1 h'_a(t)\mathrm{d}t = 0 = a \cdot h(1) + K_a$. Also ist stets $K_a = 0$, und es gilt für alle rationalen a und alle $t > 0$ die Beziehung $h(t^a) = a \cdot h(t)$.

Bemerkungen

1. Wir haben die Eigenschaft $a \in \mathbb{Q}$ im Beweis nirgends explizit benötigt. Das Problem ist hier, dass wir für irrationale a noch gar keine Definition für Potenzen t^a kennen.

2. Die Regel $h(t \cdot v) = h(t) + h(v)$ für alle $t, v > 0$ erinnert an eine analoge Rechenregel für Logarithmen.

3. Die Regel $h(t^a) = a \cdot h(t)$ entspricht formal ebenfalls einer Regel, die bei Logarithmen gilt. Weil h stetig ist und $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht ist, gilt die Regel sogar für alle $a \in \mathbb{R}$.

2.2 Analytische Eigenschaften der Funktion h

Wachstumsverhalten und Wertebereich Für $t > 0$ ist $h'(t) = 1/t > 0$, die Funktion h wächst streng monoton und ist differenzierbar und damit stetig. Wegen $h''(t) = -1/t^2 < 0$ ist der Graph von h überall rechtsgekrümmt (konkav).

Umkehrfunktion Die folgende Überlegung zeigt, dass der Wertebereich von h aus allen reellen Zahlen besteht. Es ist $h(2) = \int_1^2 t^{-1}\,\mathrm{d}t > 1/2$, denn $1/2$ ist der Wert der unteren Rechteckssumme, wenn das Integral in einem Schritt mit $\Delta x = 1$ angenähert wird.

Die Idee lässt sich erweitern. So findet man beispielsweise

$$\begin{aligned} h(2^3) = \int_1^8 \frac{\mathrm{d}t}{t} &> 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 \\ &> 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/2 \end{aligned}$$

und mit Induktion allgemein $h(2^n) > n/2$. Das zeigt, dass die Funktion h unbegrenzt wächst.

Weil h stetig ist, nimmt $h(t)$ für $t > 1$ alle positiven, reellen Werte an. Wegen der algebraischen Beziehung $h(t^{-1}) = -h(t)$, folgt, dass für $0 < t < 1$ alle negativen reellen Zahlen als Werte von h angenommen werden. Folglich bildet h die positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend auf alle reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ab. Daher gibt es eine Umkehrfunktion $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

3 Die Umkehrfunktion zur Funktion h

3.1 Algebraische Eigenschaften der Funktion h^{-1}

Definitions- und Wertebereich Die Funktion h^{-1} ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die positiven reellen Zahlen sind die Bildmenge $h^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Rechenregeln Es sei $s := h(u)$ und $t := h(v)$, dann folgen

1. $s + t = h(u \cdot v)$, also $h^{-1}(s + t) = u \cdot v = h^{-1}(s) \cdot h^{-1}(t)$.
2. Es sei zudem $a \in \mathbb{Q}$, dann ist $a \cdot s = h(u^a)$ und $h^{-1}(a \cdot s) = u^a = h^{-1}(s)^a$

Bemerkung: Diese Rechenregeln erinnern an bekannte Regeln für die Exponentialfunktionen $\exp_b : x \mapsto b^x$ zur Basis b.

1. $b^{s+t} = b^s \cdot b^t$
2. $b^{s \cdot a} = (b^s)^a$

Allerdings taugt Algebra ohne die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit höchstens für die Definition der Potenz b^a für rationale Exponenten a.

3.2 Analytische Eigenschaften der Funktion h^{-1}

Ableitung Wegen $h'(t) = 1/t$ ergibt sich aus der allgemeinen Rechenregel für die Ableitung der Umkehrfunktion und der speziellen Regel $h'(t) = 1/t$

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{h^{-1}(x)}} = h^{-1}(x)$$

Wird die Funktion h^{-1} vereinfacht als f bezeichnet, so haben wir die Beziehung $f' = f$ festgestellt und zudem $f(0) = 1$, weil $h(1) := 0$ definiert wurde. Ohne die Zusatzbedingung $f(0) = 1$ wäre auch die Nullfunktion $\mathbf{0} : x \mapsto 0$ eine mögliche Lösung der Differentialgleichung $f' = f$.

Aus $f' = f$ und $f(0) := 1$ folgt für jede Ableitung $\frac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(0) = 1$. Daraus ergibt sich die Taylorentwicklung für f

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} x^r$$

Diese Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$. Alle bisher festgestellten Eigenschaften der Funktion f lassen sich auch aus der Potenzreihendarstellung und deren Konvergenzeigenschaft herleiten.

4 Definitionen, Notation, Zusammenfassung, Aufgaben

Die bisherigen Ausführungen haben erkennen lassen, dass mit algebraischen Mitteln alleine nur Potenzen mit rationalen Exponenten definiert werden konnten. Potenzen mit irrationalen Exponenten erfordern Definitionen mit Grenzwerten. Es hat sich bewährt, in der Analysis die Definitionen neu zu fassen.

Die (natürliche) Exponentialfunktion ist die Lösung der Differentialgleichung $f' = f$ mit $f(0) := 1$. Sie wird bezeichent mit $\exp : x \mapsto \exp(x)$, ist definiert auf $\mathbb{R}$ und nimmt jede positive reelle Zahl genau einmal als Wert an.

Die natürliche Logarithmusfunktion ist die Lösung der Differentialgleichung $h'(t) = 1/t$ mit $t > 0$ und $h(1) := 0$. Sie ist definiert auf den positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ und nimmt dort jede reelle Zahl genau einmal als Wert an.

Allgemeine Potenzen Für beliebige $b > 0$ und reelle Exponenten a wird der Term b^a analytisch definiert als $b^a := \exp(a \cdot \ln(b))$.

Aufgaben

4. Warum stimmt die analytische Definition für Potenzen in den folgenden Fällen mit der algebraischen Definition überein?
   (a) $a = 2$; (b) $a = -3$; (c) $a = 1/5$.

5. Für welche u, v ist der Term u^v algebraisch definiert, aber nicht als $\exp(v \cdot \ln(u))$ beschreibbar?

6. Begründen oder widerlegen Sie: Die Ableitungs- und Integrationsregeln für beliebige Potenzen gelten auch mit der analytischen Definition.

7. Warum folgt aus der analytischen Definition der Potenzen, dass $\sqrt{2} > 0$ ist?

8. Was sagt die analytische Definition zu folgenden Aussagen?
   (a) $\sqrt[3]{(-8)} = -2$
   (b) Ein leeres Produkt hat immer den Wert 1, formal $x^0 = 1$ für alle x, speziell $0^0 = 1$.

9. Überprüfen Sie, ob die folgende Behauptung, der zugehörige Beweis und die Folgerung stimmen.
   (a) *Behauptung* $\lim\limits_{n\to\infty} \ln((1 + 1/n)^n) = 1$
   (b) *Beweis* : Der Term
   $$Q(n) := \ln((1 + 1/n)^n) = n \cdot \ln(1 + 1/n) = n \cdot (\ln(1 + 1/n) - \ln(1))$$
   lässt sich als Differenzenquotient lesen, denn mit $\delta := 1/n$ wird $Q(n) = Q(1/\delta) = \frac{1}{\delta}(\ln(1 + \delta) - \ln(1))$. Der Grenzwert $\lim_{\delta\to 0} Q(1/\delta)$ existiert und beschreibt die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(t) = 1/t$ für $t = 1$. Daher ist $\lim_{n\to\infty} Q(n) = 1$.
   (c) *Folgerung* $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n > 1$

10. Überprüfen Sie die folgenden Behauptungen und die Begründung.

    (a) *Behauptung* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$

    (b) *Beweis* Die Funktionen exp() und ln() sind nach Definition zu einander invers. Daher ist $\ln(u) = 1$ genau dann, wenn $u = \exp(1)$ gilt. Die unendliche Summe konvergiert und berechnet $\exp(1)$, denn sie entsteht beim Einsetzen von $x = 1$ in die Potenzreihe für $\exp(x)$. Die Reihe konvergiert rasch. Die Dezimalnäherung der Teilsumme $\sum_{n=0}^{16} 1/n! \approx 2.7182818284591$ ist bloss um etwa $5 \cdot 10^{-14}$ zu gross.

    Bemerkung: Die Zahl $e := \exp(1)$ heisst auch *Eulerzahl.* Statt $\exp(x)$ ist auch die suggestive Notation e^x üblich. Sie wird hier vermieden, da sie verschleiert, dass Potenzen mit irrationalen Exponenten am bequemsten mit Hilfe von exp und ln im Rahmen der Analysis definiert werden.
    Es ist dann tatsächlich $e^x := \exp(x \cdot \ln(e)) = \exp(x \cdot \ln(\exp(1))) = \exp(x)$

11. Es sei I ein offenes Intervall und $p : I \to \mathbb{R}_+$ eine differenzierbare Funktion mit $p(x) > 0$ für alle $x \in I$. Dann lässt sich die Funktion p mit ln zusammensetzen zu $\ln \circ p : x \mapsto \ln(p(x))$. Begründen oder widerlegen Sie:
    Für die Ableitung von $\ln \circ p$ gilt: $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(p(x)) = p'(x)/p(x)$ für alle x aus I.

12. Richtig oder falsch?

    (a) Die Differentialgleichung $f' = f$ mit $f(0) := 1$ lässt sich umformen zu $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(f(x)) = 1$ und $f(0) := 1$.

    (b) Mit dem Hauptsatz der Integralrechnung ergibt sich $\ln(f(x)) = x + c$ und algebraisch folgt $f(x) = \exp(x + c)$ und schliesslich $c = 0$ wegen $f(0) := 1$.

    Begründen Sie Ihre Antworten.

13. Angenommen, die Funktionen $p : x \mapsto p(x)$ und $q : x \mapsto q(x)$ erfüllen die Differentialgleichung $f' = f$ und C sei eine beliebige Konstante. Begründen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

    (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $p(x) > 0$.

    (b) Die Funktion $p + q : x \mapsto p(x) + q(x)$ erfüllt $f' = f$.

    (c) Die Funktion $C \cdot p : x \mapsto C \cdot p(x)$ erfüllt $f' = f$.

    (d) Die Funktion $p_C : x \mapsto p(C \cdot x)$ löst $f' = f$.

    (e) Die Funktion $q_C : x \mapsto q(x + C)$ löst $f' = f$.

    Welche der Antworten sind nützlich, um die Lösungen der Differentialgleichung $f' = a \cdot f$ mit einer Konstanten $a \neq 0$ zu finden?

14. Für alle Potenzfunktionen $p : t \mapsto t^a$ mit $a \in \mathbb{R}$ gilt $p'(t) = a \cdot p(t)/t$ für alle $t > 0$.

    (a) Gibt es andere Funktionen $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit dieser Eigenschaft?

    (b) Stimmt die Vermutung, dass genau dann alle Punkte $(\ln(t), \ln(p(t))$ auf *einer* Geraden mit der Steigung a liegen, wenn $p'(t) = a \cdot p(t)/t$ gilt? Begründen Sie die Antwort.

15. Es bezeichne $P : t \mapsto P(t)$ die mittlere Grösse einer Population zur Zeit t. Angenommen, die Funktion P sei differenzierbar und $P > 0$. Begründen oder widerlegen Sie:

    (a) Die Ableitung $P' : t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t)$ beschreibt die *absolute Veränderungsrate* der Populationsgrösse als Funktion der Zeit.

    (b) Die Funktion $Q : t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(P(t))$ beschreibt die *relative Veränderungsrate* der Populationsgrösse über die Zeit.

    Für welche Art von Wachstum ist P' konstant?
    Welcher Wachstumstyp liegt vor, wenn Q konstant ist?

16. Es sei $b > 0$ und $b \neq 1$. Wir definieren für $t > 0$ die Funktion $\log_b(t) := \ln(t)/\ln(b)$. Verifizieren Sie anhand der analytischen Definitionen die Beziehungen

    (a) $\exp_b(\log_b(t)) = t$ für alle $t > 0$.

    (b) $\log_b(\exp_b(x)) = x$ für alle reellen x.

17. Begründen oder widerlegen Sie die Behauptung : $\int \ln(u)\,\mathrm{d}u = u \cdot \ln(u) - u + 1$

18. Wie lassen sich aus den Ableitungs- oder Integrationsregeln für exp und ln die entsprechenden Regeln für folgende Funktionen gewinnen?

    (a) $\exp_2 : x \mapsto 2^x$

    (b) $\log_{10} : t \mapsto \log_{10}(t)$

19. Es sei $x > 0$. Welchen Wert hat die Ableitung der Funktion $q : t \mapsto x^t$ an der Stelle $t = 0$?

20. Es sei $x > 0$ und t eine beliebige reelle Zahl. Welches ist der Wert der Ableitung der Funktion $r : x \mapsto x^t$ an der Stelle $x = 1$?

21. (a) Welche analytische Definition beschreibt den Term x^x für alle $x > 0$ einheitlich?

    (b) Begründen oder widerlegen Sie: Für alle $x > 0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^x = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

5 Weiteres Material: Varianten, Alternativen, Anwendungen

Auf http://www.swisseduc.ch/mathematik gibt es mehr Material zu Differentialgleichungen.

- *Populationsmodelle,* Modellbildung mit Differentialgleichungen. (untechnisch)
- *Differentialgleichungen für den Fall des Falles.* Modellierung von Fallbewegungen.