Differentialgleichungen für den Fall des Falles

Kommentare zu Werkzeugen, Lösungen zu ausgewählten Aufgaben

H.R. Schneebeli

Version vom 14. Januar 2018

Annahmen: Im Unterricht wird ein CAS-Rechner oder ein Mathematikprogramm eingesetzt, welche das Experimentieren erleichtern. Die Lösungen gehen nur am Rand auf diese Hilfsmittel ein. Damit wird eine Unabhängigkeit von Gerät oder Produkt angestrebt, denn es ist nicht ein bestimmtes Gerät, das didaktisch entscheidend ist, sondern die Haltung beim Einsatz der Werkzeuge. Sie sollen im Sinne der *Gerüstdidaktik* eingesetzt werden, damit die wesentlichen mathematischen Gedankenschritte deutlich erkennbar werden und von der Last der Rechnungen befreit werden. Das *Blackbox-Whitebox-Prinzip* kommt zum Zug, um die Wirkungsweise der algorithmischen Werkzeuge zu vermitteln. Mathematik und die je verfügbaren Werkzeuge stehen traditionell in einer Wechselwirkung und bedingen einander gegenseitig. Die Kenntnis der wesentlichen Werkzeuge und die Fragen nach deren Macht, sei es nun Zirkel und Lineal, Abakus, Rechenschieber oder Turingmaschine, gehören zum Selbstverständnis der Mathematik.

Kommentare zu den Aufgaben 1 bis 12

1. (a) $\tilde{x}(1) = 0$ für alle Δt.
   (b) $\tilde{x}(1)$ abhängig von Δt

Δt	1	0.1	0.01	0.001
$\tilde{x}(1)$	**2**.0	**2**.5937...	**2.7**048...	**2.71**69...

2. Anzahl Schritte n, Schrittweite $\Delta t := 1/n$
   (a) $\tilde{x}(1) = 0$ für alle n, daher Grenzwert 0
   (b) $\tilde{x}(1) = (1 + 1/n)^n$,
   Grenzwert für $n \to \infty$ ist die Eulerzahl $e := \exp(1) \approx 2.7182818\ldots$

3. $F' = f$ auf Intervall $I := [a, b]$, $\Delta t := (b - a)/n$
   $F(a + \Delta t) \approx F(a) + f(a) \cdot \Delta t$, $F(a + 2\Delta t) \approx F(a + \Delta t) + f(a + \Delta t) \cdot \Delta t, \ldots$
   $$F(b) = F(a + (n-1)\Delta t) + f(a + (n-1)\Delta t) \cdot \Delta t = F(a) + \sum_{k=0}^{k=n-1} f(a + k \cdot \Delta t) \cdot \Delta t.$$

Bemerkung: $\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$ ist eine *Riemannsumme* für $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Daher strebt die Summe der Eulernäherungen für stetiges f mit $n \to \infty$ gegen

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Bemerkung: Damit wurde eine Teilaussage des *Hauptsatzes der Integralrechnung* mit dem Eulerverfahren und durch Grenzübergang $\Delta t \to 0,\ n \to \infty$ begründet.

Spezialfall:
$\dot{x} := g \cdot t$ dann folgt $x(t) = x_0 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$, (die x-Achse zeigt zum Erdmittelpunkt).

4. (a) $x(\Delta t) = x(0) + \Delta t \cdot \beta \cdot \sqrt{x(0)} = 0\,,$ Folgerung: $\dot{x}(\Delta t) = 0.$
   Iteration zeigt: $x(n \cdot \Delta t) = 0$ für alle n und alle $\Delta t > 0$
   Einsetzprobe mit der Nullfunktion $x_{\text{null}} : t \mapsto 0$ zeigt, dass die Konstante 0 eine Lösung der Differentialgleichung ist.

   (b) Energiesatz anwenden: Wegen $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x})^2$ und $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot x$ folgt aus $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$ wegen $m > 0$ die Beziehung $|\dot{x}| = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$.

   (c) Für fallende Körper ist $\dot{x} \geq 0$, also ist $\dot{x} = \beta \cdot \sqrt{x}$ für $\beta := \sqrt{2g}$. Wenn die Erdbeschleunigung als konstant angenommen wird, so ist auch β eine Konstante. Diese Annahme ist eine übliche Vereinfachung bei geringen Fallhöhen. Wenn der Körper zur Zeit $t := 0$ auf der Höhe $x(0) := 0$ fallen gelassen wird, so folgt $\dot{x}(0) = 0$.

   (d) Einsetzprobe ist erfüllt mit

$$\begin{aligned}
\dot{x}_\tau(t) &= \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad t \leq \tau \\ \frac{1}{2}\beta^2 \cdot (t - \tau) \quad \text{für} \quad t > \tau \end{cases} \\
\beta \cdot \sqrt{x_\tau(t)} &= \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad t \leq \tau \\ \frac{1}{2}\beta \cdot |\beta| \cdot |t - \tau| = \frac{1}{2} \cdot \beta^2 \cdot (t - \tau) \quad \text{wegen } \beta > 0 \text{ und } t > \tau \end{cases}
\end{aligned}$$

   (e) Folgerung: Das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung $\dot{x} = \beta \cdot \sqrt{x}$ mit $x(0) = 0$ ist *nicht eindeutig lösbar.* Die Nullfunktion kann in jedem Zeitpunkt τ verzweigen in die Lösung x_τ mit $\dot{x}_\tau(\tau) = 0$. Diese Verzweigung findet statt, wenn die Masse aus der Ruhelage fallen gelassen wird. Das Fallenlassen ist ohne Energiezufuhr möglich. Daher wird der physikalische Vorgang durch die betrachtete Differentialgleichung, die ja die Energieumwandlung von potentieller in kinetische Energie beschreibt, nicht vollständig erfasst. Der Determinismus wird nicht verletzt, denn die Systembeschreibung mit der Gleichung $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$ ist unvollständig, weil der Moment des Fallenlassens fehlt.

   Eindeutige Lösbarkeit einer Differentialgleichung, die sich physikalisch interpretieren lässt, ist keine Folge eines allenfalls axiomatisch oder ideologisch postulierten Determinismus.

   Wenn ein physikalisches System durch eine Differentialgleichung vollständig beschrieben wird, bei der das Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist, dann muss sich das System deterministisch verhalten.

5. Im Konvergenzbereich einer Funktion f mit der Potenzreihendarstellung $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ liefert die Integration der einzelnen Summanden $F(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n t^{n+1}$ eine Stammfunktion zu f.

   Beispiel: $\dot{x} = g \cdot t$, dann ist $x : t \mapsto \frac{1}{2} g \cdot t^2 + x_0$

6. Fragen über den Anfang der Potenzreihen, lassen sich hier durch Berechnungen mit Taylorpolynomen beantworten, dabei ist ein CAS hilfreich.

   Angenommen: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, dann ist das Taylorpolynom vom Grade r zu f beim Entwickeln an der Stelle $t_0 = 0$ gerade die Summe $T_r(f,t) = \sum_{k=0}^{r} a_k t^k$.

   Das Taylorpolynom $T_r(f^2, t)$ besteht aus den Termen der Ordnung bis und mit r im Produkt $T_r(f,t) \cdot T_r(f,t)$. Mit dem CAS lassen wir $T_r(T_r(f,t) \cdot T_r(f,t), t)$ berechnen.

   Beim Lösen der Aufgabe $(\dot{x})^2 = \beta^2 \cdot x(t)$ wird Koeffizientenvergleich zunächst einmal anhand der Taylorpolynome vom Grad 3 vorgeführt. Wegen $x_0 = 0$ folgt aus der Differentialgleichung, dass auch gilt $x_1 = 0$. Damit reduziert sich der Koeffizientenvergleich auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} T_3((\dot{x})^2, t) &= 4x_2^2 \cdot t^2 + 12 x_2 x_3 t^3 \\ T_3(\beta^2 \cdot x, t) &= \beta^2 x_2 t^2 + \beta^2 x_3 t^3 \end{aligned}$$

   Vergleich der Koeffizienten von t^2 ergibt: $4x_2^2 = \beta^2 x_2$.
   Daraus ergeben sich *zwei Lösungen:* $x_2 = 0$ oder $x_2 = \beta^2/4 > 0$. Die sorgfältige Anwendung der algebraisch notwendigen Fallunterscheidungen ist hier entscheidend.

   Vergleich der Koeffizienten von t^3 ergibt: $12 x_2 x_3 = \beta^2 x_3$
   Dann ist entweder $x_3 = 0$ oder $x_3 \neq 0$ und $x_2 = \beta^2/12$, wobei $x_3 \neq 0$ frei wählbar wäre. damit ergibt sich aber ein Widerspruch zum schon bestimmten Wert $x_2 = b^2/4$.

   Damit ergibt sich die Funktion $x : t \mapsto \frac{1}{4}\beta^2 \cdot t^2$. Sie besteht die Einsetzprobe in der Differentialgleichung.

   Das Taylorpolynom vom Grade 4 für $(\dot{x})^2$ ergibt die Gleichung $16 x_2 x_4 + 9 x_3^2 = \beta^2 x_4$. Wegen $x_3 = 0$ folgt $x_4 = 0$ oder ein Widerspruch zu $x_2 = \beta^2/4$ wie oben.

   Die Fortsetzung der Methode führt auf jeder Stufe auf quadratische Gleichungen aus dem Koeffizientenvergleich.

   Bemerkung: Bei der automatisierten Abarbeitung mit einem CAS wird das Algebraprogramm vor einer allfälligen Divison die Fallunterscheidung beim Lösen der quadratischen Gleichung unterdrücken.

   (Bei der automatisierten formalen Lösung dieser Aufgabe findet das CAS unter Umständen *nur eine Lösung*, etwa im folgenden Beispiel: $\mathsf{solve}(\mathsf{x}^2 = \mathsf{x} \cdot \mathsf{y}, \mathsf{y})$ findet bloss $\mathsf{y} = \mathsf{x}$, der Fall $x = 0$ wird nicht speziell betrachtet.)

7. Die Gleichung $\dot{x}(t) = v(t)$ lässt sich formal schreiben als $\dot{x}(t) = \mathbf{1} \cdot v(t)$, wo $\mathbf{1}$ die konstante Funktion $\mathbf{1} : x \mapsto 1$ auf dem Definitionsbereich von x darstellt.

   Der Formalismus der Separation der Variablen führt auf

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{1} \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t v(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

oder ausintegriert $\quad x(t) - x(0) = V(t) - V(0)$, wobei V eine Stammfunktion zu v ist.

Für $v : t \mapsto g \cdot t$ und $t \geq 0$ folgt

$$V(t) = V(0) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Dabei können die durchfallenen Strecken $x(t) - x(0)$ und $V(t) - V(0)$ gleich sein, obwohl die jeweiligen Positionsfunktionen x und V verschieden sind.

8. Für $x > 0$ lautet die separierte Gleichung $\dot{x}/\sqrt{x} = \beta$. Die Methode der Separation der Variablen ergibt nach Integration $\quad 2\sqrt{x} = \beta t + C$. Hier ist auch der Fall $x = 0$ zugelassen, der in der separierten Form ausgeschlossen wurde.

   Aufgelöst nach x folgt: $x(t) = \frac{1}{4}(\beta t + C)^2$ und wenn die Bewegung zur Zeit $t = 0$ in $x(0) = 0$ beginnt, ist $C = 0$. Allgemein kann die Fallbewegung zu einer beliebigen Zeit τ beginnen mit $x(\tau) = 0$, dann folgt $C = -\beta\tau$ und neben der Nullösung gibt es eine weitere Lösung mit $x(\tau = 0$

$$x : t \mapsto x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\beta^2 \cdot (t - \tau)^2 & \text{für } t - \tau > 0 \\ \text{sonst} \quad 0 \end{cases}$$

9. $Q(t) := y(t) \cdot \exp(-\alpha \cdot t) \quad$ damit $\quad \dot{Q}(t) = \dot{y}(t)\exp(-\alpha t) + y(t)(-\alpha \exp(-\alpha t))$

   $\dot{Q}(t) = 0$ gilt genau dann wenn $\quad \dot{y}(t) = \alpha \cdot y(t)$.

   Ferner ist $Q(0) = y(0)$. Mit dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt nun: Für jedes Intervall I, auf dem $\dot{Q}$ die Nullfunktion ist, ist die Stammfunktion Q auf I konstant. Mit $Q(0) = y(0)$ folgt $\quad y(t) = y(0)\exp(\alpha t)$.

10. Bemerkung: Es ist zweckmässig sich die Differentialgleichung $\dot{v} = c + k_1 \cdot v$ als ein eindimensionales Strömungsfeld auf dem positiven Teil der v-Achse vorzustellen. Dieses eindimensionale Vektorfeld hat eine Nullstelle bei $\hat{v} := -c/k_1$. Für $v < \hat{v}$ ist $\dot{v} > 0$, die fallende Masse beschleunigt. Für $v > \hat{v}$ ist $\dot{v} < 0$, die fallende Masse wird gebremst. Diese qualitative Überlegung zeigt, dass $\hat{v}$ in der Dynamik dieses Systems als anziehender Fixpunkt wirkt und somit $\hat{v}$ als Gleichgewichtsgeschwindigkeit auftritt, wenn die Erdanziehung und der Luftwiderstand betragsmässig gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sind.

    Wird beim Eulerverfahren mit konstanter Schrittweite gearbeitet, so kann es geschehen, dass bei einem Eulerschritt das Vorzeichen von v' wechselt. Dann wird oszillierendes Verhalten der Näherungen eintreten. Das ist ein Artefakt, erzeugt durch die numerische Näherung. Es hat mit dem Verhalten des physikalischen Vorbildes nichts zu tun.

11. Ansatz: $\quad v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cdot t^n \quad$ und $v_0 = v(0) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= v_1 + 2v_2 \cdot t + 3v_3 \cdot t^3 + 4v_4 \cdot t^4 + \ldots \\ c + k_1 \cdot v(t) &= c + k_1 \cdot v_1 \cdot t + k_1 \cdot v_2 \cdot t^2 + k_1 \cdot v_3 \cdot t^3 + \ldots \end{aligned}$$

    Da beide Gleichungen dieselbe Funktion beschreiben, ergibt Koeffizientenvergleich

$$v_1 = c\,, \quad v_2 = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot v_1 = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot c\,, \quad \text{und analog} \quad v_3 = \frac{1}{6} \cdot c \cdot k_1^2\,, \quad v_4 = \frac{1}{24} \cdot c \cdot k_1^3$$

Taylornäherung: $v(t) \approx c \cdot t + \frac{1}{2} \cdot c \cdot k_1 \cdot t^2 + \frac{1}{6} \cdot c \cdot k_1^2 \cdot t^3 + \frac{1}{24} \cdot c \cdot k_1^3 \cdot t^4 + \ldots$

Interpretation: Das Taylorpolynom ersten Grades $T_1(v,t) : t \mapsto c \cdot t$ beschreibt den freien Fall ohne Luftwiderstand. Die Terme ab der zweiten Ordnung beschreiben den Effekt der Luftreibung. Wegen $t > 0$ und $k_1 < 0$ gilt $v(t) < c \cdot t$.

Die Näherung mit Taylorpolynomen ist nützlich für Werte von t in der Nähe von 0. Sie kann aber das langfristige Verhalten nicht erfassen. Wegen $\dot{v}(t) = c + k_1 \cdot v(t)$ und $\dot{v}(0) > 0$, gilt $\dot{v}(t) > 0$ solange $c + k_1 \cdot v(t) > 0$ gilt. Aber $c + k_1 \cdot v$ hat eine Nullstelle bei der positiven Geschwindigkeit $\hat{v} := -c/k_1$ und für $v > \hat{v}$ wird $\dot{v}(t) < 0$.

12. (a) Einsetzprobe, $\dfrac{\mathrm{d}v_\infty(t)}{\mathrm{d}t} \equiv 0$

(b) Die Dichte des Wassers ist etwa 10^3 mal so gross wie die Dichte der Luft, also wird der Auftrieb bei der Modellbildung ohne Folgen vernachlässigt, daher ist $c := g$ die Erdbeschleunigung.

Mit $k_1 := -6\pi \cdot \eta \cdot r/m \approx -273$ und m der Masse des Tröpfchens in [kg], wird $v_\infty \approx 0.036$ [m/s].

(c) Das Anfangswertproblem $\dot{v} = c + k_1 \cdot v(t) \neq 0\,,\ v(0) := 0$ lässt sich mit dem Separationsansatz lösen:

$$\int_0^t \frac{\dot{v}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{c + k_1 \cdot v(\tau)} = \int_0^t 1 \cdot \mathrm{d}\tau = t$$

Nach Variablensubstitution $u := v(t)$ lässt sich die Integration von

$$J(v(t)) := \int_0^{v(t)} \frac{1}{c + k_1 \cdot u}\,\mathrm{d}u$$

ohne Verlust an physikalischer Einsicht allenfalls mit dem CAS ausführen (Gerüstdidaktik, Blackbox-Prinzip).

Ergebnis nach algebraischer Auflösung der Beziehung $J(v(t)) = t$ nach $v(t)$:

$$v(t) = \frac{c}{k_1} \cdot \exp(k_1 \cdot t) - \frac{c}{k_1}$$

Eine weitere Integration erzeugt die Positionsfunktion aus der Geschwindigkeitsfunktion

$$x(t) := \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{c}{k_1^2}(\exp(k_1 \cdot t) - 1) - \frac{c}{k_1} \cdot t \quad (\text{mit } x(0) = 0)$$

Hinweis: Wer lineare Differentialgleichungen (mit konstanten Koeffizienten) kennt, benötigt für diese Aufgabe keine Separation der Variablen. Da bei der Behandlung die Modellbildung und ein Vergleich von drei elementaren Methoden im Vordergrund stehen, ist diese Diskussion hier weniger wichtig. Hingegen bringt die Anwendung der Gerüstdidaktik mit mathematischer Software (ein CAS-Rechner genügt) einen grossen didaktischen Vorteil. Die Fokussierung auf die Modellbildung wird nicht auf sachfremde mathematische Nebenschauplätze abgelenkt.

(d) Neben der Berechnung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit ist ein Zusammenhang zwischen der Absinktiefe X und der Absinkzeit t bis auf die Tiefe X herzustellen,

damit die Geschwindigkeit des sinkenden Fasses auf verschiedenen Tiefen bestimmt werden kann. Für die praktische Lösung der Aufgabe gibt es mindestens folgende Optionen: Das Auflösen von *Gleichungen,* die sich aus dem Modell ergeben, die Verwendung von *Tabellen,* welche die Modellfunktionen ersetzen, *grafische Lösungen.*

Die mathematisch naheliegende Lösung benutzt einen algebraischen Ansatz:

i. Löse die Gleichung $X = x(t)$ bei gegebenem X nach t auf, die Lösung heisse t_X.
ii. Berechne $v(t_X)$.

Kritik: die Gleichung $X = x(t)$ ist *transzendent,* es gibt keine algebraische Lösungsformel, die das Ergebnis t_X in endlich vielen elementaren Operationen exakt darstellt, obwohl die Aufgabe genau eine Lösung besitzt.

Für jedes gegebene X lässt sich jedoch t_X numerisch hinreichend genau annähern. Die Gleichung $x(t) = X$ lässt sich mit einem numerischen Löser des CAS hinreichend genau lösen. (Gerüstdidaktik)

In der Praxis wird eine Fehlerschranke von 0.1 [s] mehr als genügen, weil ja auch die Tiefe des Meeresgrundes nicht absolut genau bekannt ist und nur die Grössenordnung von $v(t_X)$ zu überprüfen ist, um damit abzuschätzen, ob die Fässer beim Aufprall beschädigt werden könnten.

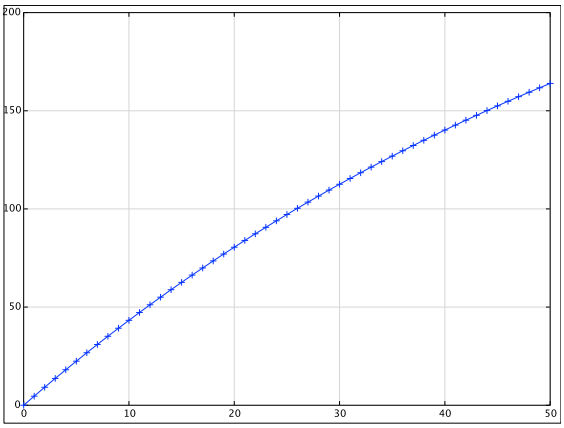
Eine *praktikable Lösung* benutzt Tabellen: Ausgehend von der Liste mit Zeitpunkten $\mathbb{T} := \{k \cdot \Delta t | k = 1, \ldots n\}$ werden Listen für die zugehörigen Geschwindigkeiten $v(\mathbb{T})$ und Positionen $x(\mathbb{T})$ numerisch bestimmt (zB mit Formeln von Aufgabe 11). Die Schrittweite Δt für die Liste muss 'geeignet' bestimmt werden. Einige Versuche zeigen, dass $\Delta t = 1$ [s] 'geeignet' ist. Für ein gegebenes $0 < X < x_{\max}$ wird ein Eintrag in $\mathbb{T}$ so bestimmt, dass $x(r) \geq X > x(r+1)$ gilt. Nun lässt sich die Zeit t_X im Intervall $[r \cdot \Delta t, (r+1) \cdot \Delta t)$ auch durch systematisches Schätzen rasch finden. Die Schätzung genügt, weil nur die *Grössenordnung* der Aufprallgeschwindigkeit $v(t_X)$ interessiert, um das Gefahrenpotenzial abzuschätzen.

Tabelle 1: aus einer Tabelle $x(\mathbb{T})$ wird t_X geschätzt, $x(t_X)$, $v(t_X)$berechnet, $K_1 = 9$

X (gegeben)	t_X [s] (geschätzt)	$x(t_X)$ [m]	$v(t_X)$ [m/s]
10	2.1	10.1	$9.6 \approx \mathbf{10}$
100	6.7	100.5	$29.4 \approx \mathbf{30}$
500	15.3	498.6	$63.7 \approx \mathbf{65}$
1000	22.2	1000.9	$84.9 \approx \mathbf{85}$
4000	47.3	4001.3	$148.4 \approx \mathbf{150}$

Es zeigt sich, dass eine Genauigkeit von 0.1 [s] für t_X ausreicht, denn die Topographie des Ozeanbodens ist auch nicht exakt bekannt und damit ist die Absinktiefe X ein eher hypothetischer Wert, der für eine Grössenordnung steht.

Eine geeignete Darstellung der *Graphen* für die beiden Funktionen $x : t \mapsto x(t)$ und $v : t \mapsto \dot{x}(t)$ über demselben Zeitintervall $[0, t_{\max}]$ könnte rasch zeigen, ab welcher (geringen!) Tiefe das Modell untragbar grosse Sinkgeschwindigkeiten voraussagt.



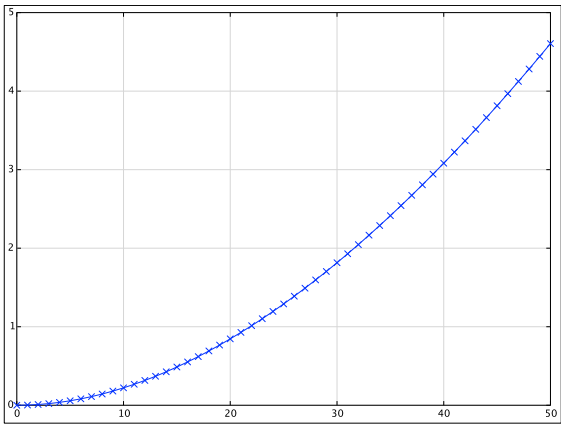


Abbildung 1: links: Sinkgeschwindigkeit [m/s], rechts: Absinktiefe [km], je als Funktion der Zeit [s], $K_1 = -9$

> Die Daten für die Modellbildung sind eher mager. Das Modell postuliert eine laminare Strömung. Die Widerstandsfunktion im *Massenpunktmodell* wird durch eine einzige Konstante beschrieben. Die Widerstandsfunktion für die sinkenden Fässer sollte ausser der Geschwindigkeit auch die zeitabhängige Lage der Fässer in der Strömung und allenfalls eine Rollbewegung um die Längsachse berücksichtigen. Das Modell war zwar experimentell abgestützt aber nicht im ganzen Anwendungsbereich. Der Ansatz mit einem Massenpunktmodell, laminarer Strömung, symmetrischer Anströmung bei nicht rotierenden Zylindern und damit rein vertikaler Absinkbewegung ist zu einfach und vermutlich der Aufgabenstellung nicht mehr angemessen.
>
> Die *theoretischen Grenzgeschwindigkeiten* $-c/k_1$ überraschen, sie liegen je nach dem Wert für K_1 bei $230 \leq v_\infty \leq 310$ [m/s].

Der Mangel an guten Daten und physikalisch gut begründeter Modellierung lässt sich in diesem Falle auch nicht durch mehr Mathematik beheben. Wichtige Gesichtspunkte der Modellwahl bleiben nicht nachvollziehbar. Eine maximal zulässige Sinkgeschwindigkeit wird nicht genannt. Die Schwachpunkte dieser Modellierung lassen sich durch die formal exakte Lösbarkeit der Modellgleichung keineswegs beheben.

Bei den grossen Geschwindigkeiten ist keine laminare Strömung mehr zu erwarten. *Das lineare Widerstandsgesetz, das der Berechnung zugrunde gelegt wurde, muss in dieser Anwendung prinzipiell infrage gestellt werden.* [Quadratisches Widerstandsgesetz für turbulente Strömungen vgl. Abschnitt 6.2]

Wenn es ökologisch überhaupt vertretbar ist, die Fässer im Meer zu versenken, dann muss die Tiefe X wohl deutlich grösser sein als 1000 [m]. Die im Modell berechnete Aufprallgeschwindigkeit ist dann aber zu gross. Es wäre sinnvoll, die Fässer kontrolliert sinken zu lassen, zum Beispiel mit hydrodynamischen Bremsen ('Fallschirme', vgl. Aufgaben 13. . . 16) oder durch Kabel gesichert, was viel aufwendiger ist.

Restliche Aufgaben

Manche Überlegungen aus bereits gelösten Aufgaben bereiten auf analoge Frage in Aufgaben 13 . . . 16 vor, wobei nun ein Massenpunktmodell für *turbulente Strömung* angenommen wird.

Ferner sind etliche Fragen in Aufgabe 15 und 16 so offen gestellt, dass sich daraus Projektarbeiten ableiten lassen. Antworten auf offen gestellte Fragen lassen sich typischerweise nicht einfach als 'richtig' oder 'falsch' bewerten. Wert und Güte der Antwort ergeben sich aus den Argumenten und Kommentaren, welche die Gedankengänge beim Bearbeiten der Probleme dokumentieren. Dazu gibt es weder eine Standardlösung, noch eine ausgewiesen beste Antwort. Zudem ist die Frage nach der angemessenen Modellierung in manchen Anwendungen nicht allein nach mathematischen Gesichtspunkten beantwortbar. So ist auch das Massenpunktmodell für den Fallschirmspringer im freien Fall zu hinterfragen.