Extremalaufgaben

H.R. Schneebeli, Kantonsschule Baden

Kommentare zu den Aufgaben
Version 7. Januar 2006

1 Extremalprinzipien – Leben wir in der besten aller Welten?

Heron von Alexandrien hat das Reflexionsgesetz der Strahlenoptik mit einem Extremalprinzip begründet. Wenn Lichtstrahlen den kürzesten Weg von der Quelle zum Ziel wählen, so gilt bei Reflexion, dass der Einfallswinkel des Strahls gleich seinem Ausfallswinkel ist. Pappus hat etwas später versucht, die Form von Bienenwaben mit Extremalprinzipien zu 'erklären'. Bis in die Gegenwart werden Extremalprinzipien als Grundlagen für manche Theorien herangezogen. Nach Leibniz, einem der Schöpfer der Differentialkalküls, leben wir in der 'besten der möglichen Welten'.

Extremalprinzipien prägen auch Sprache und Denkweise in der Evolutionstheorie oder in Wirtschaftsmodellen, obwohl es in der Natur der komplexen Sachverhalte liegt, dass nicht mit letzter Klarheit erkennbar ist, ob unsere Begriffsbildungen auf die Realität anwendbar sind, ob die Grössen, welche wir optimieren möchten, überhaupt messbar und mit einander so einfach vergleichbar sind, wie zwei reelle Zahlen. Wie auch immer, Extremalprinzipien üben eine grosse Anziehung aus und sie sind akzeptiert als grundlegende Tatsachen, auf denen ganze Theorien aufgebaut sein können. Wir hegen auch die Absicht oder Sehnsucht, Probleme optimal zu lösen: Möglichst glücklich zu werden oder auch nur möglichst wenig Abfall zu produzieren. Manche wollen nicht einfach genug, sondern möglichst viel verdienen, während andere sich bemühen, Leid und Schmerz nicht bloss zu lindern, sondern zu minimieren. Wie sehr Anspruch und Wirklichkeit auseinanderklaffen, mag ein Blick in die Tagesnachrichten zeigen. Es lohnt sich, Extremalaufgaben im Mathematikunterricht aus verschiedenem Anlass zu thematisieren und die Hintergründe auch dann etwas auszuleuchten, wenn die Zusammenhänge über das mathematische Thema hinausreichen.

2 Extremalaufgaben und Modellbildung im Unterricht

Allerlei Extremalaufgaben wurden seit den ersten Lehrbüchern zur Analysis ersonnen, um die Macht der Differentialrechnung vorzuführen. Sie geben noch immer ein beliebtes Tummelfeld her, in dem sich Grundkenntnisse der Analysis im Gymnasium anwenden und vertiefen lassen. Sie sollten jedoch nicht als einziger sinnstiftender Anlass für die Behandlung der Analysis in der Schule dienen.

In praktischen Anwendungen beruht das Bestimmen eines Optimums immer auf einer vorangehenden Modellbildung. Die Technik der nichtlinearen Optimierung ist dabei eher ein Nebenschauplatz. Zentrale Fragen lauten: Welche Vereinfachungen sind zulässig? Über welche Parameter können wir frei verfügen? Woher kriegen wir die benötigten Daten? Sollen die Modelle einfach gewählt werden, damit die Berechnungen exakt ausführbar bleiben? Die

Schulmathematik wird diese Frage aus vorwiegend didaktischen Gründen mit 'Ja' beantworten, dabei aber oft den Wirklichkeitsbezug vernachlässigen. Wer so handelt, kann die Glaubwürdigkeit der schulischen Mathematikanwendungen hintertreiben und damit Motivationen verspielen. In echten Anwendungen bedingen die verfügbaren Daten und ihre Güte die Genauigkeit, Zuverlässigkeit oder Konsistenz der Ergebnisse. Daten beeinflussen die Wahl von Modell und Methode. Oft ist es den Umständen angemessen, überflüssige Daten zu verwenden. Numerische Methoden werden mit statistischen kombiniert, um eine hinreichende Genauigkeit zu garantieren, welche in einem guten Modell zu besseren Ergebnissen führt als die minimalen Datensätze in fadenscheinigen Modellen, die von hypothetisch exakten Daten ausgehen und mit formal exakter Rechnung exakte Ergebnisse produzieren. Damit ist aber die praktische Brauchbarketi der Ergebnisse nicht gesichert. Manche Schulbeispiele überzeugen inhaltlich und methodisch nicht, weil sie eigentlich bloss auf eine formale Übung abzielen und den Anwendungsbezug als Vorwand benutzen. Sie produzieren eine Formel und verpassen Einsichten.

Seit Pappus wurde behauptet, dass die Bienen als geniale Baumeisterinnen den Wachsbedarf beim Bau ihrer Waben minimieren. Diese Idee lässt sich zur Konstruktion einer Extremalaufgabe weiterspinnen. Réaumur und Koenig haben das um 1712 getan und mit Bewunderung von der erstaunlichen Übereinstimmung zwischen dem Ergebnis der Rechnung und Messungen an Honigwaben berichtet. Wer aber eine von Wildbienen gebaute Wabe selbst genauer unter die Lupe nimmt, wird da etliche Zweifel haben. Weder die Masse noch der Bauplan der einzelnen Wabenzellen werden von den Bienen konstant eingehalten. Vielleicht zwingen die Lebensumstände die Bienen, eher die Bauzeit als den Materialbedarf für die Waben gering zu halten. Oder formen gar Enzyme im Honig die Wände der eilig gebauten Waben im Laufe der Zeit ohne weiteres Zutun der Bienen in eine einigermassen ökonomische Form um? Klar ist, dass die Behauptung von Pappus eine Spekulation war.

Wie steht es mit der Wahrhaftigkeit von 'angewandten Aufgaben', die aus didaktischen Gründen ganz einfach ausfallen müssen? Ein grafikfähiger Rechner, ein Computer-Algebra-System oder andere mathematische Hilfsprogramme können die Bereiche ausdehnen, die der Schulmathematik zugänglich sind und wirklichkeitsgerechtere Fragen und Antworten zulassen, als dies je mit den traditionellen Hilfsmitteln Papier und Bleistift in der knappen Unterrichtszeit möglich war.

Wer die Liste der folgenden Aufgaben überfliegt, wird bemerken, dass meist Beispiele mit eher einfachen Funktionstypen auftreten. Bewusst wurden Probleme bevorzugt, die sich oft sogar mit rationalen oder algebraischen Funktionen bearbeiten lassen. Neben einfachen praxisbezogenen Anwendungen sind immer wieder Fragen abstrakterer Art eingestreut, mit denen Bezüge zu Hintergründen oder zu einer Begriffsbildung angesprochen werden. Ferner wurde versucht, Querbezüge zu verschiedenen Gebieten anzudeuten:

- Extremalaufgaben aus der Stochastik: arithmetisches Mittel und Median lassen sich durch Extremalbedingungen definieren. Maximum Likelihood Schätzung.
- Das Fermatprinzip in der Optik.
- Extrema in der Mechanik, stabile Gleichgewichte. Die Konstruktion einer Rutschbahn mit kürzester Laufzeit soll an die Brachistochronenaufgaben von Bernoulli erinnern, eine Art Vorschau auf die Extremalprinzipien, die in der Physik als grundlegend gelten.
- Extremalaufgaben, die sich ohne Analysis lösen lassen, speziell im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt und mit der Methode der kleinsten Quadrate.

- Extrema, die von mehr als einem Parameter abhängen.

3 Welchen Nutzen bringt der Technologieeinsatz?

Welche Aufgaben sollen, können oder müssen von Hand gelöst werden, welche überlassen wir der Software? Die Antwort auf diese oft gestellte Frage lässt sich nicht eindeutig geben. Die folgende Liste kann aber dazu dienen, eine provisorische Antwort auf diese Frage anhand praktischer Fälle zu prüfen. Es wird sich zeigen, dass in manchen Anwendungen die Modellbildung das eigentliche Problem darstellt, also das Aufstellen einer hinreichend realistischen Zielfunktion. Hingegen lässt sich das Berechnen von Ableitungen oder die Bestimmung ihrer Nullstellen in den einfachen Schulbeispielen fast immer formal exakt und algorithmisch ausführen und damit automatisieren. Bisher wurde die Rolle von automatisierbaren Aufgaben kaum je hinterfragt. Was ist der Bildungswert? Was muten wir den Schülern und dem Mathematikunterricht zu, wenn automatisierbare Aufgaben in Handrechnung automatisiert abgehandelt werden?

Manche der hier gestellten Aufgaben lassen sich zwar auch von Hand bearbeiten. Das ist auch dann durchaus berechtigt, wenn man die Devise verfolgt: Automatisiere, was automatisierbar ist. Wir wollen ja erfahren, was die Automatisierung mit sich bringt und was der Hintergrund der automatisierbaren Lösungsverfahren ist. [Black-Box / White-Box Prinzip von Buchberger]

Wer es wagt, die für die Schule aufbereiteten Beispiele zu verlassen, wird bald feststellen, dass weder formales Ableiten noch das formale Lösen von Gleichungen das Kernproblem ausmachen. Ferner kann sich die Graphikfähigkeiten der Software nützlich zeigen, um die Art eines Extremums zu prüfen. Die bekannten formalen Kriterien, welche auf höhere Ableitungen zurückgreifen, um Maxima, Minima oder Sattelpunkte zu unterscheiden, zeigen nicht mehr den einzigen Weg auf, um Extremalaufgaben rasch, kompetent und richtig zu lösen.

4 Unterrichtsform und Hilfsmittel

Die Aufgabenstellung lässt die Wahl der Lösungsmethode oder die Organisationsform des Unterrichtes völlig offen. Einige Aufgaben eignen sich für Handrechnung, andere lassen den Einsatz eines grafikfähigen Rechners oder eines Computer-Algebra-Systems günstig erscheinen. Manchmal ist eine Frage so aufgefächert, dass sie sich besonders für Gruppenarbeiten eignet, wobei verschiedene Varianten von Einzelnen parallel ausgeführt werden, um Zeit zu sparen. Gewisse Aufgaben könnten zwangslos den Einstieg in eine Arbeitswoche motivieren oder Anstoss geben zu einem Praktikum zum Fermatprinzip und zur Strahlenoptik. Mit Seifenhautexperimenten lässt sich etwas gegen Trockenheit im Mathematikunterricht unternehmen. Seifenhäute können die Frage nach kürzesten Wegen bei gegebenen Wegpunkten selbständig lösen und Schüler könnten ein System kennen lernen, um Optimierungen mit mehr ale einer Variablen experimentell anzugehen.

Obwohl das Angebot zahlenmässig nicht überbordet, es bleibt die Qual der Wahl. Ab und zu treten Fragen auf, die sich nicht oder nicht zwingend mit der Routinemethode der Analysis beantworten lassen. Wer eine Methode kennen lernt, sollte auch ihre Grenzen erfahren.