Verschiedene Extremalaufgaben

1. Ein Yoghurtbecher soll so ausgelegt werden, dass er 210 cm^3 fasst und unter allen oben offenen, zylindrischen Gefässen minimalen Materialbedarf aufweist. Da die Wand des Bechers dünn ist, soll angenommen werden, dass der Materialaufwand proportional zur Aussenfläche sei. Wie gross ist der Radius und wie gross ist die Höhe eines solchen Bechers? Wie lautet die Antwort, falls zusätzlich auch der Deckel in die Optimierung einbezogen wird und das Material für den Deckel auf die Flächeneinheit bezogen doppelt soviel kostet wie für den Becher? Verschaffen Sie sich verschiedene Yoghurtbecher, messen Sie diese aus und vergleichen Sie die Messergebnisse mit jenen der Modellrechnung.

2. Gewisse handelsübliche Konservendosen haben 887 cm^3 Inhalt. Wie gross sind der Radius und die Höhe der Dose zu wählen, damit der Materialverbrauch der Verpackung minimal wird? Messen Sie eine Dose aus. Entsprechen die Masse dem von Ihnen bestimmten Idealmass? Studieren Sie, wie die Dose aufgebaut ist bis in die Einzelheiten. Verbessern Sie Ihr Modell. Weist die Dose das Idealmass nach dem verbesserten Modell auf? Beim Ausstanzen von Boden und Deckel der Dosen gibt es Abfälle. Wie haben Sie diese in der Berechnung berücksichtigt?

3. Es ist plausibel, für den Benzinverbrauch eines Autos, das eine Teststrecke vorgegebener Länge (zum Beispiel 100 km) mit konstanter Geschwindigkeit v abfährt, eine Näherungsformel der Form $b(v) = kv^2 + c/v$ mit zwei Konstanten k, c anzusetzen.
   Von einem Auto gilt gemäss Werkangaben, dass $b(60) = 5.9\ell$ und $b(80) = 8.7\ell$ sind. Wie gross sind c und k und bei welcher Geschwindigkeit tritt der minimale Benzinverbrauch auf? Wie gross ist er? Was bemerken Sie?

4. Mit drei Betonplatten der Breite b soll ein trapezförmiger Kanal gebaut werden. Wie sind die Platten zu verlegen, damit die Querschnittsfläche des Kanals maximal wird?

5. Aus einem kreisrunden Stück Blech wird ein Sektor S ausgeschnitten. Der Sektor lässt sich zu einem möglichst grossen Kegelmantel umformen, wenn die beiden begrenzenden Radien sich berühren.

   (a) Wie ist der Sektor S zu wählen, damit der Rauminhalt des Kegels, dessen Mantel er bedeckt, maximal wird?

   (b) Wer aus einem Kreis einen Sektor S ausschneidet, lässt einen Sektor S' übrig. Wie ist der Sektor S zu wählen, damit die Summe der *beiden* Kegelvolumen, die sich mit S und mit S' als Mantelflächen bedecken lassen, maximal wird? Inwiefern ist die Antwort überraschend?

6. (a) Welcher Punkt der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ liegt am nächsten beim Punkt $(1|0)$?

(b) Welcher Punkt der Kurve mit der Gleichung $y = x^3$ liegt am nächsten beim Punkt $(1|0)$?

(c) Welcher Punkt der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ liegt am nächsten beim Punkt $(0|1)$?

(d) Welcher Punkt der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ liegt am nächsten bei $(0|p)$? Wie hängt die Antwort von p ab?

7. Auf der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}\,x^2$ liegt der Punkt $P(x_0|y_0) \neq (0|0)$. Die Gerade n ist die Normale zur Tangente an die Parabel im Punkte P, sie trifft die Parabel nochmals in Q.

   (a) Wie lauten die Koordinaten von Q?

   (b) Für welche Wahl von P wird die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ minimal?

   (c) Die Fläche des Segmentes, das die Normale n zwischen P und Q von der Parabel abtrennt, hängt von P ab. Sein Inhalt werde mit $F(P)$ bezeichnet. Für welche Wahl von P wird die Fläche $F(P)$ am kleinsten?

8. Ein Massepunkt bewegt sich auf der x-Achse. Wir kennen seine Geschwindigkeitsfunktion $\quad v : t \;\mapsto\; \sin(3t - 2)$.

   (a) Zu welchen Zeiten t erreicht der Massepunkt eine maximale Ortskoordinate $x(t)$?

   (b) Wann ist seine Beschleunigung extremal?

   (c) Wie lauten die beiden Antworten im allgemeinen Fall $\quad v : t \;\mapsto\; \sin(\omega t + \varphi)$?

9. Für die Zeiten t mit $-1 \leq t \leq 5$ ist die Position eines Massepunktes gegeben durch

$$x : t \;\mapsto\; 2t \cdot e^{-t}$$

   (a) Wann ist die Geschwindigkeit des Massepunktes extremal?

   (b) Wie gross ist die maximale Beschleunigung des Massepunktes und wann wird sie erreicht?

   (c) Welches ist die grösste erreichte x-Koordinate?

   (d) Wann ist die Entfernung vom Nullpunkt maximal und wie gross ist diese Entfernung?

10. Eine unbekannte Grösse wurde n-mal gemessen. Die Ergebnisse lauten: $\quad m_1, m_2, \ldots, m_n$. Messungen sind in der Regel widersprüchlich, weil sich unkontrollierbare Einflüsse bemerkbar machen. Die Information in den einzelnen Ergebnissen soll aber doch benutzt werden, um die nach wie vor unbekannte Grösse, nennen wir sie x, zu ermitteln. Die Methode der kleinsten Quadrate wählt jene Zahl x, für welche die Summe

$$(m_1 - x)^2 + (m_2 - x)^2 + \cdots + (m_n - x)^2$$

minimal wird, als Idealisierung der widersprüchlichen Datenmenge. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Messwerten und dem Idealwert x?

11. Für welche Zahl x wird die Grösse $s(x)$ minimal?

   (a) $s_1 : x \;\mapsto\; |x - 3| + |x + 1|$

(b) $s_2 : x \mapsto |x-3| + |x| + |x+1|$

Welche Folgerung und welche Verallgemeinerung ergibt sich aus dieser Aufgabe?

12. Wenn ich einen Flaschendeckel werfe, dann kann er so landen $\cup$ oder so $\cap$. Ich habe das Experiment 24 mal ausgeführt und 17 mal die Antwort $\cup$ erhalten. Anhand dieser Information soll die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von $\cup$ geschätzt werden. Die Maximum Likelihood Schätzung betrachtet p mit $0 \leq p \leq 1$ als Variable, welche so gewählt werden soll, dass das beobachtete Ereignis mit grösster Wahrscheinlichkeit eintritt. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der beobachteten Antwort beträgt

$$f : p \mapsto \binom{24}{17} p^{17}(1-p)^7$$

Für welches p wird $f(p)$ maximal? Skizzieren Sie den Graphen von f qualitativ richtig.

13. Max hat ein Glücksrad mit n gleich grossen Sektoren. Ein Spieler setzt auf eine beliebige der Zahlen von 1 bis n und darf das Rad k mal drehen. Er erhält einen Preis, wenn er in k Versuchen genau einmal Erfolg hat. Welches k maximiert seine Gewinnchance?

14. Bearbeiten Sie diese Aufgabe soweit als möglich ohne Handrechnung.
Die folgende Tabelle zeigt die Lufttemperaturen T zu verschiedenen Zeiten t.

t [h]	7	9	11	13	15
T [°C]	3.2	4.5	8.0	10.8	11.4

(a) Bestimmen Sie eine Polynomfunktion vom Grade 4, welche den Temperaturverlauf für die Zeit $7 \leq t \leq 15$ möglichst gut beschreibt und lassen Sie die Funktion im Bereich $6 \leq t \leq 20$ mit dem Computer darstellen. Was fällt Ihnen auf?

(b) Welche Extremwerte der Temperatur sagt das Modell für die Zeit $6 \leq t \leq 20$ voraus? Bestimmen Sie diese Extrema numerisch mit einem entsprechenden Hilfsprogramm.

(c) Bestimmen Sie eine Polynomfunktion vom Grade 3, welche den Temperaturverlauf für die Zeit $7 \leq t \leq 15$ möglichst gut beschreibt und lassen Sie die Funktion im Bereich $6 \leq t \leq 20$ mit dem Rechner darstellen. Was fällt Ihnen auf?

(d) Welche Extremwerte der Temperatur sagt das zweite Modell für die Zeit $6 \leq t \leq 20$ voraus? Bestimmen Sie diese Extrema numerisch mit einem Hilfsprogramm.

15. Der Tabelle entnehmen wir die Werte für die Dichte von Wasser bei verschiedenen Temperaturen.

Temperatur [°C]	-5	0	5	10	15
Dichte [kg m^{-3}]	999.255 (fl)	999.840	999.964	999.700	999.101

Mit entsprechender Software lassen sich drei verschiedene Polynomfunktionen mit Regression gewinnen, die das Verhalten der Dichte von Wasser im Temperaturbereich $0 \leq t \leq 10$ beschreiben, nämlich

(a) ein quadratisches Polynom mit den Daten für $t_1 = 0$, $t_2 = 5$, $t_3 = 10$

(b) ein quadratisches Polynom als Regressionsfunktion mit allen Daten der Tabelle.

(c) ein Polynom, das alle Werte der Tabelle exakt interpoliert.

Bestimmen Sie für jeden der drei Fälle den Maximalwert der Dichte. Bei welcher Temperatur sagt das jeweilige Modell die maximale Dichte voraus?

16. Gegeben sind die Punkte $A(2|6|-4)$, $B(3|-1|4)$, $C(1|0|6)$, $D(3|2|1)$.

    (a) Wie gross ist der kürzeste Abstand von A zur Geraden, welche B mit C verbindet?

    (b) Wie lauten die Koordinaten des Punktes auf der Geraden BC, der am nächsten bei A liegt?

    (c) Wie gross ist der kürzeste Abstand von A zur Ebene, welche durch B, C, D definiert wird?

    (d) Wie gross ist der kürzeste Abstand zwischen den Geraden AB und CD?

    (e) Wie lassen sich diese Aufgaben alleine mit Vektorrechnung lösen?

17. Welches ist die kürzeste Verbindung vom Punkt $A(0|5)$ zu einem Punkt der x-Achse und von dort nach $B(4|3)$?

18. Im Punkt $P(0|10)$ ist ein grosses Gewicht an einem Seil der Länge 8m befestigt. Dieses Seil läuft über eine Rolle, die sich am Ende eines zweiten Seils der Länge 5m befindet. Das zweite Seil ist im Punkt $Q(q|10)$ festgemacht. Diese Anordnung erreicht ihr Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt die tiefste Lage einnimmt. Wenn wir das Gewicht der Seile gegenüber der angehängten Last vernachlässigen, reduziert sich das physikalische Prinzip auf eine Geometrieaufgabe. Wie hängt die Lage des Schwerpunktes von q ab? $[0 < q < 13]$

19. Eine zylindrische Getränkedose wird mit Wasser gefüllt. Je nach dem Füllstand wird sich der Schwerpunkt des 'Systems' bestehend aus Inhalt und Behälter verändern. Bei welcher Füllhöhe liegt der Schwerpunkt der aufrecht stehenden Dose am tiefsten? Daten: Grundfläche $G = 20$ cm^2, Höhe $h = 16.5$ cm, Masse der Dose $m = 50$gr.

20. Die Grösse der Lichtgeschwindigkeit hängt vom Medium ab, in dem sich das Licht ausbreitet. Wer die folgende Fragestellung verallgemeinert, findet das Brechungsgesetz von Snell.

    Ein Punkt bewege sich mit einer vom Ort abhängigen Geschwindigkeit wie folgt:
    Wenn die y-Koordinate des Punktes positiv ist, beträgt die Geschwindigkeit 2 m/s, sonst 1 m/s.
    Der Punkt P soll möglichst rasch von $A(0|5)$ nach $B(4|-3)$ gelangen. Auf welchem Weg gelingt dies?

21. Ein Massenpunkt bewegt sich reibungslos unter dem Einfluss der Erdanziehung. Er startet aus dem Stillstand im Punkt $A = (0|h)$, gleitet längs einer Geraden nach $X = (x|0)$ und von dort auf der x-Achse nach $Z = (1|0)$.

    (a) Wie muss x gewählt werden, damit die Laufzeit von A nach Z (bei festem h) minimal wird?

    (b) Wie muss $h > 0$ bei gegebenem x gewählt werden, damit die Laufzeit von A nach Z minimal wird?

    (c) Wie ändern sich die Lösungen der Aufgaben, wenn im Punkt A eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ angenommen wird?

22. Ein Massenpunkt bewegt sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Erdanziehung. Er startet aus dem Stillstand im Punkt $A = (0|1)$, gleitet längs einer Geraden nach $X(x|y)$, $y < 1$ und von dort auf der geradlinigen Verbindung nach $Z = (1|0)$. Wie muss der Punkt X gewählt werden, damit die Laufzeit von A über X nach Z minimal wird?

23. Wir betrachten das Dreieck ABC mit $A(-1|0)$, $B(2|0)$, $C(0|3)$. Für welchen Punkt $P(x|y)$ der Ebene ist die

    (a) Summe der Quadrate der Abstände zu A, B, C minimal?

    (b) Summe der Abstände zu A, B, C minimal?

24. Gegeben sind die Punkte $P_1(-2|0)$, $P_2(0|1)$, $P_3(1|2)$ Welches ist die 'beste' Gerade, welche durch diese drei Punkte definiert ist?

    (a) Zeichnen Sie rein gefühlsmässig eine 'beste' Gerade zu diesen Daten in einem Koordinatensystem ein und bestimmen Sie die Steigung und den Achsenabschnitt durch Messen.

    (b) Gehen Sie von einer Darstellung der Geraden in der Form $y(x) = a \cdot x + b$ aus. Wie gross sind die Residuen $r_i(a, b) = y_i - y(x_i)$, wobei $(x_i|y_i)$ die Koordinaten von P_i bezeichnen, wenn $i \in \{1, 2, 3\}$ gewählt wird. Für welche Wahl von a, b wird die Summe $q(a, b) = \sum_{i=1}^{3} r_i^2$ minimal? Die Antwort auf diese Frage ist die *Ausgleichsgerade* durch P, Q, R nach der Methode der kleinsten Quadrate.

    (c) Eine Gleichung in der Form $\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y - c = 0$ beschreibe die gesuchte Gerade g. Der Ansatz garantiert, dass die Gleichung in Hesse Normalform erscheint. Mit
    $$d_i = |\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y - c|$$
    wird bekanntlich der Abstand von P_i zur Geraden g bestimmt. Für welche φ und c wird die Summe der Quadrate $\sum_{i=1}^{3} d_i^2$ minimal?

    (d) Tragen Sie die drei 'besten' Geraden gemäss (a,b,c) im gleichen Koordinatensystem ein. Stimmt es, dass der Schwerpunkt von $P_1P_2P_3$ auf mindestens zweien der drei Geraden liegt? Auf welchen?

25. Die vier Ecken eines Quadrates der Seitenlänge a sollen miteinander durch Leitungen verbunden werden. Auf welche Weise wird die Länge der Leitung minimal? Wie lange wird sie?