Von Zenos Paradoxien zu Grundbegriffen der Analysis

H.R. Schneebeli, `schneebe@othello.ch`

28. Februar 2023

Zusammenfassung

Der Umgang mit *'dem Unendlichen'* ist ein Knackpunkt in der Analysis und ganz besonders im propädeutischen Unterricht. Zeno hat Paradoxien bemerkt, die in diesem Umfeld lauern. Sie sind hier eine willkommene Provokation, um Grundbegriffe der Analysis zu klären.

Es gibt eine Methode, um die Paradoxa von Zeno zu beseitigen. Sie erschliesst einen Zugang zur Analysis im Schulunterricht, indem sich oft ein mit finiten Mitteln unlösbares Problem in zwei Schritten wie folgt bewältigen lässt:

1. *Diskretes Ersatzproblem:* Es wird eine positive Toleranz angenommen und eine Näherungsantwort mit finiten Methoden gesucht, die um weniger als diese Toleranz von der idealen Lösung abweicht. Diskretisierungsfehler sind zu erwarten.
2. *Idealisierung:* Die Diskretisierungsfehler in den Antworten lassen sich im Idealfall tilgen durch einen *Grenzübergang*, bei dem die Diskretisierung verschwindet und die Toleranz gegen 0 strebt.

Dieses Vorgehen führt zwar nicht immer zum Ziel. Die propädeutische Analysis handelt aber gerade von jenen Fällen, in denen dieser Weg gangbar ist.

Die Begriffe *Ableitung* und *bestimmtes Integral* werden in diesem Rahmen eingeführt. Ferner wird ein Einstieg in die Begriffsbildung der Kinematik skizziert, der die Paradoxa auflöst.

Aus Lösungen der diskreten Ersatzprobleme werden *numerische Näherungsverfahren* abgeleitet, die das Experimentieren im Unterricht unterstützen.

Die Entwicklung der Geometrie und des Zahlbegriffs wird im Zusammenhang mit den Vorstellungen von Raum und Zeit reflektiert. Dabei werden auch die jeweiligen Mess- und Rechentechniken mit einbezogen. Zu den ganzen, rationalen oder reellen Zahlen gesellen sich die 'Maschinenzahlen' (auch 'Rechnerzahlen' genannt).

Die grundlegende *Begriffsbildung* für die Analysis wird strikt getrennt von der *Berechnung*, die auch im Infinitesimalkalkül wieder auf finite algebraische Operationen zurückführt. Dieser 'Calculus' ist nicht Gegenstand der folgenden Ausführungen.

Voraussetzungen Dieser Text (insbesondere auch die kommentierten Lösungsskizzen zu den Aufgaben) richtet sich *an Lehrpersonen,* die mit den Problemen der elementaren Analysis vertraut sind und eine didaktische Umsetzung nach eigenem Ermessen und im eigenen Unterrichtsstil vornehmen möchten.

Annahme ist ferner, dass die zu Unterrichtenden 'reif' sind für erste Schritte Richtung Analysis. Dazu müssen sie mindestens folgende Vorkenntnisse mitbringen: Grundlagen der schulischen Algebra, Funktionsbegriff, Gleichungslehre, vollständige Induktion, Handhabung einer einfachen Mathematiksoftware [zB. Grafikrechner, CAS-Rechner oder CAS]. Der Unterrichtsstil bleibt explorativ. *Neugierde, Motivation und Anwendungen* haben hohe Priorität.

Es wird kein deduktiv strukturiertes Theoriegebäude angestrebt. Eine formale Einführung in die Grundlagen der Analysis im Stil *Definition - Satz - Beweis* ist niemals unser Ziel. Sollte Ihnen dieser Text zu denken geben, so sind wir auf dem Weg zum Ziel!

1 Vorbemerkungen

Die Paradoxa von Zeno werden benutzt, um den Übergang von der diskreten Mathematik zur elementaren Analysis zu vollziehen. Das *Kontinuum* der reellen Zahlen wird essenziell, weil ideale Objekte mit Grenzübergängen aus Näherungen definiert werden. Unsere Sprechweisen und Methoden entsprechen der heutigen Praxis. Wissenschaftshistorische Methodik wird dabei nicht angestrebt. Dieser Zugang zur elementaren Analysis passt gut zu einem *genetischen Ansatz*, der etwa in den Lehrbüchern von Otto Toeplitz [To], George Pólya [Po] oder von Georges Simmons [Si] vorbildlich vertreten wird.

Der *genetische* Unterricht beruht auf der Überlegung, dass die individuellen Lernprozesse in groben Zügen den Etappen der historischen Entwicklung einer Wissenschaft folgen. Tatsache ist: Eine lange Epoche, geprägt von diskreter Mathematik, ging der Beschäftigung mit dem Kontinuum voran. Ferner gilt die Einführung der Analysis, also der Erstkontakt mit der Kontinuumsmathematik, als didaktisch anspruchsvoll.

Wie so oft gibt es viele Wege zum Ziel. Die *axiomatische Methode* ist geeignet, um fertige Mathematik auf sparsamste Weise darzustellen oder zu archivieren. Dabei kommen oft die Motivationen zu kurz. Die *genetische Methode* versucht, eine Entwicklung von mathematischen Begriffen und Methoden in jedem Einzelnen anzuregen. Sie erzeugt Mathematik in statu nascendi. Ohne gut durchdachte Motivation geht das nicht. Ihre Keime sind Schlüsselbeispiele im historischen Kontext. Was könnte der Schule besser angemessen sein als eine vorläufige Form mit Entwicklungspotenzial? Die Methode bevorzugt eher konstruktive Verfahren, die oft in Anwendungen geschärft werden. Sie ist offen für explorative Unterrichtsmethoden und wird am Schluss gekrönt durch eine zusammenfassende Systematisierung der Erfahrungen und Ergebnisse.

Finite Methoden prägen die griechische Mathematik. Atomismus – Ausdruck einer diskretisierten Weltsicht – war unter griechischen Denkern weit verbreitet. Die Gefahren, die im naiven Umgang mit 'unendlich' lauern, wurden plakativ als Paradoxa formuliert.

Elementare Analysis handelt vom Kontinuum, von stetigen oder differenzierbaren Funktionen und von Methoden und Werkzeugen, um sie zu konstruieren oder zu bearbeiten. Die Auseinandersetzung mit Unendlichkeiten wird in der Analysis unausweichlich. Die Paradoxa Zenos weisen auf Verständnisprobleme hin. Ihre Auflösung kann als didaktische Vorbereitung auf die Analysis dienen.

Zwei *Paradoxa von Zeno* werden vorgestellt. Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte zeigt, wie Überlegungen mit unendlich vielen Schritten zu Fehlschlüssen verleiten. Beim Paradoxon vom fliegenden Pfeil dominieren anschauliche, aber unklare Begriffe und führen in die Irre.

Die *Vorstellungen von Raum und Zeit* sind beeinflusst von der verfügbaren Messtechnik. Mit deren Verfeinerung wuchsen auch die Ansprüche an die mathematischen Modelle von Raum und Zeit. Tickt die Uhr oder fliesst die Zeit? Es wird gezeigt, dass intuitive Vorstellungen über die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ohne eine strenge Formalisierung der Vollständigkeitseigenschaft genügen, um die Paradoxien aufzulösen. Dabei werden begriffliche Grundlagen für eine propädeutische Analysis gelegt.

Wir übernehmen von der griechischen Mathematik die Forderung nach finiten Methoden. Daher sind in allen Beispielen *Diskretisierungen* als Vorstufe der Lösungen wesentlich. Wir übernehmen aus der Kontinuumsmathematik den *Grenzwertbegriff,* der unter geeigneten Umständen dazu dient, die Diskretisierungsfehler zu beseitigen.

Diskretisierung und Idealisierung durch Grenzübergang sind die zwei Schritte, die alle Methoden der elementaren Analysis abstützen. Die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen garantiert, dass eine Anzahl von Eigenschaften, die wir von einem Kontinuum erwarten, in $\mathbb{R}$ tatsächlich gelten. Allerdings sind die Grenzwerte, deren Existenz die Analysis beweist, im allgemeinen nicht berechenbar. So zeigt sich eine nicht-konstruktive Seite der Analysis, weil sich reelle Zahlen nur ausnahmsweise algorithmisch exakt berechnen lassen. Es öffnet sich eine Diskrepanz zu den rationalen Zahlen und zu den 'Maschinenzahlen' $\mathbb{R}_{\mathbb{M}} \subset \mathbb{Q}$, mit denen die Computerarithmetik arbeitet. Es gibt nur endlich viele Rechnerzahlen. Berechnungen müssen nach endlicher Zeit beendet werden.

Die zentralen Begriffe *Grenzwert, Ableitung, bestimmtes Integral* werden als Grundlagen der Analysis im historischen Kontext so eingeführt, dass sie in zahlreichen Anwendungen nutzbar sind. Dazu ist der Einsatz von *schultauglicher Mathematiksoftware* notwendig. Auf dieser Einsicht beruht *Gerüstdidaktik* nach Kutzler und das *black-box – white-box Prinzip* nach Buchberger [Bu]. Das CAS erlaubt in vielen Beispielen, Grenzwerte zu bestimmen, welche für Anfänger prohibitiv hohe Hürden darstellen würden. Erste Priorität hat dabei die Einsicht, dass Grenzwerte notwendig sind, um die Probleme der Analysis zu lösen. Die formale oder numerische Berechnung von Grenzwerten ist aber ein anderes Thema. Wesentlich ist, dass einsichtige Berechnung die Begriffsbildung voraussetzt. Diese Bedingung ist insbesondere zu beachten, wenn mit Gerüstdidaktik die Berechnungen von Ableitungen oder Integralen an ein CAS delegiert werden. Das Vermitteln von Einsichten und Verständnis in die *Begriffsbildung* ist das hohe Ziel. Das automatische Reproduzieren spezieller Ableitungs- oder Integrationsregeln ist mit Gerüstdidaktik ein Einsatzgebiet für computergestütztes Arbeiten ebenso wie die Anwendung numerischer Näherungsverfahren.

Der algebraische *Infinitesimalkalkül* wird damit im Unterricht erst *nach* der grundlegenden *Begriffsbildung* zu Ableitung und Integral entwickelt.

Konstruktive Verfahren aus der Numerik und Computereinsatz erlauben schon früh einen Praxisbezug. *Kontrollierte Näherungen* sind ein zentrales Thema und wesentlich für viele echte Anwendungen.

Die numerischen Verfahren sind wieder finit. Sie sind konstruktive Approximationen an die idealisierten Methoden der Analysis. Die Stichworte *finit* und *konstruktiv* weisen auf eine besondere didaktische Qualität hin: es sind notwendige Bedingungen, um konkrete Erfahrungen zu vermitteln.

Die *Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen wird nicht explizit behandelt.* Motivation und Grundlagen für einen universitären Unterricht werden vermittelt, obwohl – oder gerade weil – aus mathematischer Sicht die Behandlung der reellen Zahlen als Zahlgerade in einer Maturitätsschule unformal und anschaulich bleiben muss. Dies ist ein in der Schule didaktisch bedingtes Restrisiko. Tatsächlich hat auch Gauss den Fundamentalsatz der Algebra bewiesen, *ohne die Vollständigkeit* von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ explizit zu erwähnen. Diese Eigenschaft wurde erst später von Cauchy oder Dedekind thematisiert.

Grosser Dank geht an Werner Hartmann (Didaktik) und Hansruedi Vollmer (LaTeX, Korrekturen) für ihre konstruktive Unterstützung und Beratung. Ihr Fachwissen ist dem Text zugute gekommen.

2 Die Paradoxien des Zeno

Die beiden folgenden hypothetischen Sachverhalte und ihre absurden Folgerungen werden dem Philosophen Zeno von Elea (ca. 490 – 425 v. Chr.) zugeschrieben. Es ist anzunehmen, dass er sie zu didaktischen Zwecken benutzte, etwa um vor Überlegungen zu warnen, die nicht in endlich vielen Schritten ans Ziel gelangen. Vielleicht erahnte Zeno auch, dass Mängel in den verwendeten Grundbegriffen 'Ort', 'Zeit', 'Geschwindigkeit' zu den absurden Folgerungen führen könnten.

Rückblickend ist es nötig, auf beide Aspekte einzugehen. Somit lassen sich die Paradoxa als Motivation und Ausgangspunkt für erste Schritte in Richtung Analysis benutzen, die sowohl wesentliche mathematische Methoden als auch Begriffsbildungen beinhalten.

2.1 Achilles und die Schildkröte

Wie geht ein Wettlauf zwischen Achilles und einer Schildkröte aus, wenn folgende Annahmen gelten? Achilles läuft doppelt so schnell wie die Schildkröte. Er gewährt der Schildkröte ein Stadion Vorsprung.

Zeno argumentiert, dass es Achilles nun nicht mehr gelingen kann, die Schildkröte einzuholen.

Die *Behauptung* von Zeno lässt sich mit vollständiger Induktion angehen:

Verankerung Am Anfang (Zeitpunkt t_0) liegt Achilles hinter der Schildkröte, die an der Position P_1 ein Stadion vor Achilles startet. Wenn Achilles nach einiger Zeit den Punkt P_1 zur Zeit $t_1 > t_0$ erreicht, ist die Schildkröte schon um die Hälfte der Strecke P_0P_1 weitergelaufen und erreicht den Punkt P_2, sie liegt also vor Archimedes.

Induktionsschritt Im Zeitpunkt t_n ist Achilles beim Punkt P_n angelangt und immer noch hinter der Schildkröte her. Da er vorher die Schildkröte noch nicht eingeholt hatte, benötigte er etwas Zeit, um von P_{n-1} nach P_n zu gelangen, also ist $t_{n-1} < t_n$ und die Schildkröte ist schon wieder um die Hälfte der von Archimedes zuletzt bewältigten Strecke $P_{n-1}P_n$ weiter als P_n in einem Punkt P_{n+1}, der auch vor P_n liegt.

Diese Argumentation gilt für alle natürlichen Zahlen n, also liegt Archimedes in jedem der unendlich vielen Zeitpunkte t_n hinter der Schildkröte.

2.2 Der fliegende Pfeil

Achilles soll von einem Ort A aus einen Pfeil ins Ziel $Z \neq A$ schiessen. Zeno argumentiert, dass dies prinzipiell unmöglich sei. *Behauptung:* Es gibt gar keinen fliegenden Pfeil.

Begründung: Angenommen, es gäbe einen Pfeil, der von einem Punkt A zu einem Punkt $Z \neq A$ fliegt. Dann dauert dieser Prozess eine gewisse Anzahl von Momenten, in denen der Pfeil je irgend einen Ort im Raum einnehmen muss. Wenn er aber einen Moment lang einen Ort einnimmt, dann bewegt er sich nicht und wenn er sich bewegen würde, so hätte er in diesem Moment keine klare Position. Wie immer wir es drehen und wenden, es gibt einen Widerspruch. Also gibt es keinen fliegenden Pfeil.

3 Bemerkungen zu den Paradoxien des Zeno

3.1 Alles in endlich vielen Schritten verstehen – wie sonst?

Wer etwas erklären will, muss zunächst von vereinbarten Wahrheiten ausgehen, den Axiomen oder den Voraussetzungen. Wer etwas verstehen will, kann von der Erklärung nur endlich viele Zeichen lesen, endlich viele Worte aufnehmen, endlich viele Konstruktionsschritte mit Zirkel und Lineal ausführen oder endlich viele Rechenschritte nachvollziehen. Zu Recht beharrten griechische Mathematiker und Philosophen auf der exklusiven Anwendung finiter Methoden. Wer ein Stück Marmor nimmt und es in zwei Stücke teilt und die Teile immer weiter zu teilen versucht, der wird nach endlich vielen Schritten bei den Atomen gestoppt, jenen hypothetischen Teilchen, die denknotwendig sind, damit die materielle Welt verstehbar oder erklärbar sein kann. Nun ist es auch klarer, was mit 'Moment' gemeint war oder mit 'Ort' oder 'Position'.
Es ist plausibel zu vermuten, dass ein griechischer Denker sich einen 'Moment' als ein Zeitatom vorstellt, eine kleinste unteilbare Zeit, kürzer als ein Blitz, kürzer als ein Augenblick, aber von einer geringen endlichen Ausdehnung. Die Positionen des Pfeils auf dem Weg von A nach Z sind wie eine Perlenkette aufgereihte 'Raumatome'. Das Paradoxon vom fliegenden Pfeil steht und fällt mit der Anwendung atomistischer Gedanken auf Raum und Zeit. Da der Pfeil offensichtlich von einem Punkt A zu einem anderen Punkt Z fliegen kann, wird das Paradoxon durch gewisse Vorstellungen erzeugt, die aus philosophischen Überlegungen als wünschbar erscheinen oder gar ideologisch gefordert werden, aber zu Widersprüchen führen. Insbesondere ist unklar, was es heisst, der Pfeil 'besitzt' einen 'Moment' lang seinen 'Ort'. Kann man diesen Ort im Sinne der Geometrie genauer angeben? Ist für griechische Denker ein 'Punkt' ein Raumatom? Ist ein 'Moment' ein Zeitatom und dauern alle 'Momente' gleich lang?

Euklid definiert bekanntlich: *Ein Punkt ist, was keine Teile hat.* Kann man die Dauer eines Momentes oder die Grösse eines 'Ortes' messen? Beide Fragen müssten griechische Denker verneinen. Ihre Messinstrumente waren untauglich, um die postulierte Dauer eines Momentes zu messen oder, um den genauen Ort des fliegenden Pfeiles zu einem gewissen Zeitpunkt zu bestimmen. Die Argumentation im Paradoxon vom fliegenden Pfeil setzt voraus, dass ein 'Ort' und ein 'Moment' je eine positive Ausdehnung haben.

3.2 Raum, Zeit und Zahlen

Aus heutiger Sicht beruhen die beiden Paradoxien auf einer Vermischung von intuitiv verwendeten Bezeichnungen aus der Umgangssprache und solchen aus einer Fachsprache, deren genaue Definition rückblickend unklar erscheint.

Die beiden Paradoxien des Zeno werden entzaubert, indem Eigenschaften der reellen Zahlen verwendet werden, die erst im 19. Jahrhundert explizit formuliert wurden. Haben wir damit bloss einen feudalen Teppich geknüpft, unter den wir unverdaute Reste antiken Denkens kehren können?

Lässt sich wirklich verstehen, was $\mathbb{R}$ bezeichnet, wenn wir die meisten der überabzählbar vielen reellen Zahlen mangels Worten oder anderer Bezeichnungen niemals als Individuen ansprechen können? Solange Mathematik verzichtet, ihre 'Dinge' beim Namen zu nennen und nur widerspruchsfreie Eigenschaften und Beziehungen für die Existenz verlangt, hat sie sich von der materiellen Welt verabschiedet, deren Objekte aus je endlich vielen Elementarteilchen bestehen.

Raum und Zeit ohne Messung

Ein intuitives Zeitgefühl wird durch chemische, biologische oder physiologische Prozesse in unserem Körper vermittelt. Den Raum können wir durch unsere Bewegungen aber auch in anderer Form durch den Tastsinn, den Hörsinn und den Gesichtssinn erfahren. Die Koordination der verschiedenen Raumerfahrungen zu einem Raumbegriff in der Geometrie ist eine Leistung unseres Gehirns. Allerdings sind diese Erfahrungen intuitiv und kaum formalisierbar. (Vgl. [P1], [P2])

Experimente und genaue Messungen sind unabdingbar, um unsere Sinne zu potenzieren und Begriffe so zu schärfen, dass widerspruchsfreie Theorien der Geometrie oder der Physik möglich werden. Weil Experimente auch Quellen von Irrtümern sein können, wurde ihnen in der klassischen Geometrieausbildung durch die vorherrschende Ideologie keine Bedeutung beigemessen: Alle Wahrheit musste aus den Axiomen der Geometrie rein logisch korrekt erschlossen werden. In der Tat: Eine geometrische Skizze oder Konstruktion stellt bestenfalls ein Beispiel dar, allenfalls ein Gegenbeispiel, das eine Vermutung widerlegt. Aber die ungenaue Materialisierung geometrischer Abstraktion in der Skizze könnte selbst ein Grund für Fehler sein.

Eine mögliche Interpretation der zwei Paradoxa von Zeno ist der Schluss, dass die intuitiven Begriffe zu wenig tragfähig sind für gewisse philosophisch oder wissenschaftlich exakte Betrachtungen mit Wahrheitsanspruch.

Raum und Zeit vermessen mit Knotenschnur und Sanduhr

Stellen wir uns vor, jemand möchte mit altertümlichen Geräten Raum und Zeit vermessen, etwa mit Elle oder Messschnur und Sanduhr oder Sonnenuhr. Das ist in etwa das Szenario für den Nachweis der Kugelgestalt der Erde und die erste Bestimmung des Erdradius durch Erathostenes. Aber diese Geräte reichen nicht aus, um das reine Denken durch ein Experiment wirklich in Frage zu stellen. So ist etwa das Parallelenaxiom in Euklids Geometrie mit antiker Messtechnik und antikem Geometrieverständnis unanfechtbar. Für antike Geometer drängt sich die Frage kaum je auf, ob die Geometrie etwas mit der materiellen Welt zu tun habe.

Die absurden Folgerungen aus den Paradoxa waren vielleicht ein erster Versuch, auf Schwachstellen einer Philosophie hinzuweisen, die durch rein deduktives Denken die Welt verstehen möchte. Allgemein wird Galileo Galilei das Verdienst zugesprochen, einen induktiven Zugang zur Physik mit Experimenten erschlossen zu haben. Wir wissen aber nicht, welche Versuche Archimedes gemacht hat. Hat er das archimedische Prinzip einfach in der Badewanne entdeckt und sofort begriffen? Hat er seine erstaunlichen Mechanismen ohne Modelle, Versuche und Verbesserungen auf Anhieb aus dem Denken realisiert? War messendes Experimentieren eines seiner Erfolgsgeheimnisse? Sicher verfügte Archimedes über die notwendige Intuition, um die Grundlagen der Analysis sowie das Paradox von Achilles und der Schildkröte zu durchschauen. (Vgl. [Po],[Si],[To])

Das Ticken der Uhr: diskrete Zeitmodelle

Eine Uhr, die tickt, ein Kristall der vibriert, Cäsiumatome, die im Takt schwingen, zerlegen die Zeit in jeweils gleich lange Intervalle einer Grösse $\Delta t > 0$. Die Zeitmarken des Tickens sind dann an den Stellen $k \cdot \Delta t$ mit ganzzahligem k angeordnet. Mathematische Modelle für diese Zeitvorstellung sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ oder Intervalle davon. Zeitmessung reduziert sich dann auf *Zählen* der Ticks. Wer mit dem diskreten Zeitmodell arbeitet, kann nur beim Ticken der Uhr beobachten oder messen. Die Daten sind also *Zahlfolgen* oder diskrete *Abtastungen* von Funktionen. Wir gehen davon aus, dass sich die Ticks zuverlässig und fehlerfrei zählen lassen.

Das Fliessen der Zeit: kontinuierliche Zeitmodelle

Sanduhren – noch besser Wasseruhren – suggerieren eine kontinuierlich fliessende Zeit, die sich beliebig unterteilen lässt. Klar, die Sanduhr ist eine diskrete Näherung an dieses Idealbild, das noch besser von einer Wasseruhr verkörpert wird. (Nur kompromisslose Atomisten würden dies verneinen.
Als ein erstes mathematisches Modell für eine Zeit, die sich beliebig unterteilen lässt, können die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dienen. Obwohl alle Messungen rationale Zahlen liefern, ist dieses Modell für die Zwecke der Analysis noch ungeeignet. Es wäre denkbar, dass ein punktförmiges Ereignis zu einem Zeitpunkt stattfindet, den wir mit rationalen Zahlen nicht beschreiben können. Diese Schwierigkeit wird umgangen, indem die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Modell für eine stetig fliessende Zeit gewählt werden. Damit handelt man sich eine neue Schwierigkeit ein. Es gibt mehr als abzählbar viele reelle Zahlen, aber der Umfang einer formalen Sprache mit einem endlichen Zeichensatz ist höchstens abzählbar. Es gelingt uns nicht, über alle reellen Zahlen als Individuen zu sprechen. Wir benötigen generische Bezeichnungen. Zum Beispiel wird ein beliebiger Zeitpunkt mit $t \in \mathbb{R}$ mit Hilfe einer Variablen bezeichnet. Oder wir tun so, als ob wir alle Punkte der reellen Zahlgeraden als Namen für die möglichen Zeitpunkte zur Verfügung hätten. Solche Namen sind unaussprechlich. Die meisten der Punkte lassen sich nur zufällig auslesen, weil wir sonst eine Vorgehensweise benennen könnten, die als Rezept algorithmisch in endlich vielen Handlungsschritten von endlich vielen benannten Punkten aus zum Ziel führte. Die Idealisierung der reellen Zahlen hat enorme mathematische Vorteile gegenüber den abzählbar vielen 'benennbaren' Zeitpunkten. Wesentliche Existenzsätze aus der Analysis beruhen auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Darum wird auch in der Physik $\mathbb{R}$ oder ein reelles Intervall als Modell für die Zeit gewählt. Die Experimentalphysik hat nun die Option, Zeit zu messen statt Intervalle zu zählen. Exakte Zeitmessung mit beliebigen reellen Zahlen als Ergebnis ist nicht möglich, denn die Ergebnisse werden als Dezimalzahlen oder als Dualzahlen abgelesen. Sie sind also rationale Vielfache einer Einheit. Die reelle Zahl versteckt sich hinter einer rationalen Näherung und ist zudem maskiert durch unvermeidliche – und hoffentlich kleine – zufällige Messfehler.

Reelle Zahlen, Koordinaten und fundamentale Ideen der Analysis

Die beiden Paradoxien lassen sich mit Begriffsbildungen bewältigen, die den antiken Denkern noch nicht zur Verfügung standen. Wir verwenden ein Intervall der reellen Zahlgerade als Modell für die Rennstrecke und eine reelle Achse als Modell für die Zeit. Aber dabei benutzen wir Begriffe, welche die Mathematik erst im 19. Jahrhundert geklärt hat.

Ein brauchbarer Geschwindigkeitsbegriff wurde rund 2000 Jahre nach Zeno entwickelt. Er lässt sich mathematisch erst richtig formulieren im Rahmen der analytischen Geometrie oder der Vektorgeometrie. Newton hat die Begriffe Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung für die mathematische Behandlung der Mechanik entwickelt und dabei den Grund für eine Mathematik gelegt, die wesentlich über alles hinausgeht, was wir aus der Antike wissen. Dennoch zollt er Vorgängern wie Archimedes den Tribut mit seiner Selbsteinschätzung: I stood on the shoulders of giants. In der Tat, wir verdanken Archimedes eine Methode, um schwierige Probleme zu behandeln. Er hat sie mit der Quadratur der Parabel oder mit Versuchen zur Quadratur des Kreises exemplarisch behandelt. Wenn es gelingt, ein schwieriges oder unlösbares Problem so zu behandeln, dass eine Näherungslösung innerhalb einer garantierten Toleranz gefunden werden kann, so ist das bereits ein Fortschritt gegenüber einer fehlenden Lösung. Wenn es aber eine Methode gibt, die für jede noch so kleine positive Toleranz eine Näherungslösung mit finiten Methoden erzeugt, so ist das Problem für alle praktisch relevanten Fälle so gut wie gelöst. Dank der Analysis, die seit Newton und Leibniz der Mathematik neue Methoden zur Verfügung stellt, lässt sich sogar sagen, dass die Idee von Archimedes noch mehr an Gewicht gewonnen hat. *Im Rahmen der Analysis erklären wir, dass ein Problem gelöst ist, wenn es für jede positive Toleranz eine Näherung gibt, die diese Toleranz einhält.*

Die Idee, auf Näherungen mit vorgegebener Toleranz auszuweichen, wenn finite Methoden keine Lösungen ergeben, wurde in neuerer Zeit mit den probabilistischen Algorithmen erneut ins Spiel gebracht. Wenn in jedem von n *stochastisch unabhängigen* Schritten mit Wahrscheinlichkeit $p < 1$ kein Fehler auftritt, so lässt sich durch geeignete Wahl von n die Fehlerwahrscheinlichkeit p^n unterhalb jede beliebig vorgegebene positive Toleranz drücken. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit 0 nur in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum ein Kennzeichen für das unmögliche Ereignis.

Maschinenzahlen

Im Zeitalter der computergestützten Messung drängt sich eine weitere Bemerkung auf. Alle durch digitale Messung oder numerische Rechnung gefundenen Zahlen gehören zu den *Maschinenzahlen* $\mathbb{R}_{\mathbb{M}} \subset \mathbb{Q}$.

Genau genommen sind diese Zahlen abhängig von der benutzten Hardware und Software. Es reicht jedoch, im Unterricht eine vereinfachte Darstellung von $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ zu verwenden. Bezogen auf den im Unterricht verwendeten Rechner könnte man mit $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ die Dezimalzahlen benennen, die der Rechner anzeigen kann. Für viele gängige Rechner sind dies die Zahlen, die sich mit einer Mantisse von 15 Dezimalstellen, einem Vorzeichen und einem Zehnerexponenten im Bereich -999 bis 999 darstellen lassen. Es gibt nur endlich viele Maschinenzahlen, und alle sind rational. Für technische Zwecke gibt es Standards von IEEE, welche Maschinenzahlen und ihre Arithmetik inklusive Rundungsalgorithmen definieren, Weil $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ eine *endliche* Menge ist, fehlen ihr alle wesentlichen algebraischen Eigenschaften, die mit der Definition von $\mathbb{Q}$ gewonnen werden (Primkörper der Charakteristik 0). Da $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ eine endliche Menge ist, die 1 enthält, gibt es beispielsweise ganzzahlige Vielfache $n \cdot 1 \notin \mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ (overflow). Oder es gibt Maschinenzahlen $p > 0$ mit $p^2 = 0$ (underflow).

Es lohnt sich, mit den Besonderheiten von $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ vertraut zu werden, weil Numerik in Symbiose mit der Analysis und Algorithmik in vielen Fällen einen Weg zu *brauchbaren Näherungslösungen* in $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ findet, die für informatikgestützte Methoden typisch, aber rein analytisch unzugänglich sind.

Manche der Probleme, die beim Einsatz von Computern wegen der Maschinenzahlen auftreten, sind charakteristisch und nur in Einzelheiten von technischen Spezifikationen abhängig. Generische Tücken von $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ werden auch bei der raffiniertesten technischen Weiterentwicklung von Hard- und Software nicht verschwinden. Auch im menschlichen Hirn mit seinen endlich vielen Zellen und Verbindungen lassen sich die Eigenschaften von $\mathbb{R}$ nur unvollkommen abbilden und erfassen. Numerik hat das Potenzial, neue Paradoxa zu erzeugen. So ist es angemessen zu lernen, mit Numerik und möglichen Fehlschlüssen umzugehen.

4 Diskrete Näherung – exakte Idealisierung

Alle gängigen Begriffe aus der Schulanalysis müssen im Lernprozess mit noch unfertigen Vorstellungen über das Kontinuum $\mathbb{R}$ behandelt werden. Beispielsweise können bei rationalen Ausdrücken Grenzwerte nach geeigneten algebraischen Termumformungen erraten werden. Aber dieses Verhalten ist nur typisch für die Beispiele, nicht für Grenzwertberechnung an sich. Die Investition in eine ausgebaute Theorie der konvergenten Folgen und Reihen wäre erheblich, ist jedoch für das Gymnasium nicht zwingend. Geometrische Folgen und geometrische Reihen sind für Abschätzungen und Berechnungen jedoch unverzichtbar. In einer *allgemeinbildenden Schule* kann der Einsatz eines CAS-Rechners zusammen mit Gerüstdidaktik und dem black-box–Prinzip handwerkliche Schwächen im Umgang mit Grenzwerten kompensieren, ohne ein Verständnis für den Gesamtzusammenhang zu beeinträchtigen.

4.1 Das Grundprinzip

Eine wesentliche Erfahrung lautet: Eine Aufgabe, die nicht in endlich vielen Schritten algebraisch oder geometrisch exakt lösbar ist, kann allenfalls im Rahmen der Analysis gelöst werden nach folgendem Schema:

1. *Das Problem wird diskretisiert.* Es entstehen diskrete Ersatzprobleme, die durch einen Diskretisierungsparameter mit einander verbunden sind. Wenn sich dieses parametrisierte Ersatzproblem mit finiten Methoden (das heisst im Rahmen der Algebra) lösen lässt, werden die Lösungen noch vom Diskretisierungsparameter abhängen. Eine solche Abhängigkeit zeigt an, dass *Diskretisierungsfehler* auftreten. Die Diskretisierungsfehler lassen sich zähmen, wenn es für jede positive Toleranz $\tau > 0$ eine Schranke im Bereich der Diskretisierungsparameter gibt, so dass es jenseits dieser Schranke noch Parameterwerte gibt und alle zugehörigen Näherungen innerhalb der Toleranz τ übereinstimmen. Dieser Fall muss sich nicht zwingend einstellen [z.B. Fraktale]. Wenn er es aber tut, so folgt ein zweiter Schritt: die Idealisierung.

2. *Die Diskretisierungsfehler werden rückgängig gemacht durch einen Grenzübergang* mit $\tau \to 0$ wobei die Diskretisierung verschwindet. Zur Folge der Näherungslösungen wird ein Grenzwert gesucht. Existiert der Grenzwert, so sagen wir, dass im Sinne der Analysis eine Lösung existiert. Ein solcher Grenzwert kann abstrakt existieren, ohne dass es finite Mittel gibt, um ihn als reelle Zahl zu identifizieren. Im Sinne der Gerüstdidaktik kann die konkrete Grenzwertberechnung in manchen Fällen dem CAS überlassen werden.

Alle wesentlichen Aufgaben der Schulanalysis lassen sich nach diesem Schema behandeln.

4.2 Kommentierte Beispiele

Quadratur des Kreises

1. *Näherungsweise Quadratur des Einheitskreises nach der Methode des Archimedes.* Der Kreis wird ersetzt durch ein regelmässiges 2^n-Eck, das dem Kreis einbeschrieben wird. Dann ist n der Diskretisierungsparameter und für jedes n lässt sich der Inhalt des 2^n-Ecks durch einen algebraischen Ausdruck F_n exakt beschreiben. Es ist mindestens plausibel, dass sich die Annäherung an die Kreisfläche mit wachsendem n beliebig verbessern lässt. Genauer: Eine Folge von Näherungen, die ganz im Innern des Kreises liegen, wächst monoton und eine solche, mit Näherungen von aussen fällt monoton. Die Differenz zwischen einer inneren und einer äusseren Näherung ist als Fläche erkennbar, die sich mit wachsendem n der Kreislinie beliebig gut angleicht. Wird mit τ der Inhalt dieser Differenzfläche zwischen innerer und äusserer Näherung bezeichnet, so ist das Toleranzkriterium erfüllt. Der unbekannte Wert π der Kreisfläche wird dabei nicht erwähnt.

2. *Idealisierung, Grenzübergang* Die Zahlen F_n bilden eine monoton wachsende Folge von Zahlen, die alle kleiner sind als 4, weil 4 die Fläche eines Quadrates angibt, das den Kreis enthält. Nach einem Satz aus der Analysis konvergiert in $\mathbb{R}$ jede monoton wachsende und beschränkt Zahlfolge gegen einen Grenzwert. Erst dieser Grenzwert definiert den Inhalt des Einheitskreises, der konventionell mit π abgekürzt wird.

Archimedes hat nur den ersten Schritt in diesem Verfahren ausgeführt. Es muss ihm aber klar gewesen sein, dass er damit im Prinzip jede gewünschte Genauigkeit in der Annäherung an eine ideale Masszahl für den Flächeninhalt des Einheitskreises finden kann. Schritt zwei ist damit eine Frage des Formalismus, der erst ab dem 19. Jahrhundert voll entwickelt wurde. Die Problematik der reellen Zahlen lässt sich anhand der Zahl π thematisieren. Die Zahl π ist irrational, ja sogar transzendent. Wir können jeweils nur ein Anfangsstück ihrer Dezimalbruchdarstellung bestimmen. Die Zahl π als reelle Zahl ist aus der Sicht der rationalen Zahlen unfassbar. Entweder brauchen wir rationale Näherungen wie $\pi \approx 22/7$. Oder wir benutzen ein besonderes Symbol, π, das aus der Sicht der rationalen Zahlen wie eine Unbestimmte hinzugenommen werden muss und mit dem rein algebraisch zu rechnen ist. Weil π transzendent ist, erfüllt es keine algebraischen Relationen. Erst transzendente Funktionen erfüllen exakte Beziehungen wie $\sin(\pi) = 0$ oder die Eulerrelation $\exp(i \cdot \pi) + 1 = 0$. In allen numerischen Rechnungen muss π letztlich durch eine geeignete Näherung ersetzt werden. Das Symbol π spielt die Rolle einer Konstanten, die sich numerisch nur durch Näherungswerte ersetzen lässt. Beim Test von Hochleistungsrechnern wurden bisher einige 10^{10} Dezimalziffern von π berechnet [Universität Tokyo].

Achilles und die Schildkröte

Wir zeigen zwei mögliche Auflösungen: Eine mit finiten Methoden, eine mit Diskretisierung und Grenzübergang.

1. *Algebra* Wenn sich Achilles mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt und die Schildkröte mit Geschwindigkeit $w := v/2$, lässt sich der Ort und die Zeit ihres Zusammentreffens mit *Algebra* finden. Es sei $A(t)$ die Position von Achilles zur Zeit t, also $A(t) := v \cdot t$. Die Position der Schildkröte zur Zeit t sei $S(t)$, dann gilt $S(t) = 1 + w \cdot t$. Die Bedingung, dass Achilles die Schildkröte einholt lautet $A(t) = S(t)$, also $v \cdot t = 1 + w \cdot t$ unter der Bedingung $v = 2w$.

Es liegt also ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die drei Grössen t, v, w vor. Für $w = 0$ ist die Aufgabe unlösbar, für $w \neq 0$ gibt es genau eine Lösung $t = 1/w$. Damit wird $S(1/w) = v/w = 2$. Nach zwei Stadien hat Achilles die Schildkröte eingeholt.

2. *Analysis: Diskretisierung und Grenzübergang*
Der Induktionsbeweis zum Paradoxon von Achilles und der Schildkröte betrachtet nur diskrete Zeitpunkte. Er ist formal korrekt, so auch die Folgerung: Zu keinem der betrachteten Zeitpunkte t_n holt Achilles die Schildkröte ein. Die Argumentation beweist aber nur, dass Archimedes hinter der Schildkröte steht, wenn er in einem Punkt steht, den die Schildkröte vorher erreicht hat. Das bedeutet nicht, dass es Achilles unmöglich ist, die Schildkröte zu überholen. Sobald nämlich Achilles die Schildkröte überholt, lässt sich mit Zenos Argumentationsweise zeigen, dass Achilles von nun an immer vor der Schildkröte läuft.

   (a) *Diskretisierung* der Bewegung: Angenommen, Achilles legt ein Stadion in einer Zeiteinheit zurück, dann bewegt sich die Schildkröte in der gleichen Zeit um 1/2 Stadion. Wir betrachten also die Zeitpunkte $t_0 := 0$ (Start des Wettlaufes), $t_1 := 1$, $t_2 := 1 + 1/2, \ldots, t_k := 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots 1/2^{k-1}$ in denen Achilles zum k-ten mal nach Zenos Argumentation auf einen jener Orte tritt, den die Schildkröte inzwischen schon wieder verlassen hat.
   Wir erkennen in der Darstellung von t_k eine geometrisch Summe. Sie lässt sich einfacher schreiben als
   $$t_k = \frac{1 - 2^{-k}}{1 - 2^{-1}} = 2 - 2^{-k+1}$$
   Welchen Vorsprung hat die Schildkröte dann? Für $t_0 = 0$ hat die Schildkröte den Vorsprung 1, für t_1 den Vorsprung 1/2 und mit Induktion für t_k den Vorsprung 2^{-k}.
   Nun kommt der entscheidende Punkt: Der Diskretisierungsparameter ist k. Der Diskretisierungsfehler ist der Vorsprung der Schildkröte vor Achilles. Er wird halbiert, wenn k um eins zunimmt. Die gewählten Masseinheiten bringen es mit sich, dass dem zeitlichen Vorsprung und dem räumlichen Vorsprung die gleiche Masszahl 2^{-k} zukommt. Für jede positive Toleranz $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Fälle k, in denen der Vorsprung grösser ist als ε. Damit ist die Diskretisierung geeignet für eine Idealisierung mit Grenzübergang.

   (b) *Grenzwerte* für $k \to \infty$. Die bisherigen Überlegungen umschreiben den Sachverhalt
   $$\lim_{k\to\infty} 2^{-k} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2$$
   Nach zwei Zeiteinheiten und zwei Stadien Laufstrecke überholt Achilles die Schildkröte und die Voraussetzungen für Zenos Argumentation wird nicht mehr erfüllt.

Bemerkungen

1. Das Paradoxon vom fliegenden Pfeil zeigt, dass der Schlüsselbegriff *Geschwindigkeit* möglicherweise im antiken Griechenland nicht Allgemeingut war. Ferner mussten alle Argumentationen in Worte gefasst werden. Die übersichtliche Notation der Algebra und Formelmanipulation erreichte Europa erst gut 1000 Jahre nach Zeno.

2. Archimedes hat bereits Überlegung mit geometrischen Reihen zu diesem Paradox angestellt. Er verstand erstaunlicherweise ohne jegliche Algebra, mit Summen von geometrischen Reihen zu argumentieren und er beherrschte die Idealisierung mit unendlichen geometrischen Reihen.

3. Durch die Diskretisierung wurde beim zweischrittigen Vorgehen der Analysis eine *Grenzwertbetrachtung* für die Idealisierung auf unendlich viele Zeitschritte unumgänglich.
   Die physikalische Argumentation mit zwei konstanten Geschwindigkeiten ist viel einfacher, aber man muss den *Begriff 'Geschwindigkeit'* kennen. Auch da hilft das allgemeine Schema: Diskretisieren und Idealisieren mit Grenzwerten. Mehr dazu im Abschnitt 5.5.

4. Es ist möglich, dass das Paradoxon ursprünglich auch den Zweck erfüllen sollte, die Zöglinge der Philosophenschule vor den Fallstricken von Argumentationen zu warnen, die unbegrenzt viele Schritte beinhalten. Wer in Gedanken nach jedem der fiktiven Schritte t_k einen 'Moment' wartet oder nachdenkt, findet die Argumentation im Paradoxon durchaus akzeptabel.

4.3 Weitere Hinweise

Natürlich ist es mit zwei Schlüsselbeispielen nicht getan, den Zugang zur Analysis vorzubereiten. Weitere Beispiele, die ein Fundament zum Aufbau der Begriffe *Integral* und *Ableitung* legen können, finden sich in [P2]. Wichtige Grundbegriffe der Analysis lassen sich mit diesem Schema erarbeiten, insbesondere die Ableitung und das bestimmte Integral.

5 Grundbegriffe der Analysis: Ableitung, Mittelwert, Integral

Der hier skizzierte Zugang zur Analysis setzt keine Kenntnisse der Trigonometrie voraus. Er schränkt das Blickfeld nicht schon von Anfang an auf ein einziges Beispiel ein, indem die Tangentensteigung gleichbedeutend mit Ableitung benutzt wird. Der begriffliche Kurzschluss 'bestimmtes Integral'='Fläche unter der Kurve' wird ebenso vermieden. Eine mögliche Anwendung des bestimmten Integrals bleibt die Inhaltsberechnung bei Flächen unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen. Wie bei der Ableitung streben wir aber nach einer Definition, die unmittelbar zu den verschiedensten Anwendungen führt, ohne einen oft unnatürlichen und erzwungenen Umweg über eine 'Fläche unter der Kurve' zu erzwingen. Wir versprechen uns von diesem Zugang mehr Flexibilität im begrifflichen Denken mit zwei Grundwerkzeugen der Analysis.

5.1 In zwei Schritten zur Ableitung

Allgemein beschreibt die Ableitung einer Funktion eine *momentane oder lokale spezifische Veränderung,* falls sie überhaupt exisitert.

Erster Schritt:

Die *mittlere* spezifische Veränderung der Funktion f zwischen den Stellen x_0 und $x_0 + \Delta x$ und wird mit dem *Differenzenquotienten* berechnet.

$$\mathrm{DQ}(f, x_0, \Delta x) := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Dies ist in der Nähe von x_0 eine diskrete Näherung für die lokale spezifische Veränderung von f. Die Zahl $\Delta x \neq 0$ spielt die Rolle des Diskretisierungsparameters.

Zweiter Schritt: *Idealisierung mit Grenzübergang*

$\Delta x \to 0$ tilgt die Diskretisierungsfehler, vorausgesetzt der Grenzwert $\lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{DQ}(f, x_0, \Delta x)$ existiert in $\mathbb{R}$. Dieser Grenzwert definiert dann den Wert der *Ableitung* $f'(x_0)$.
Wenn der Grenzwert nicht existiert, ist die Funktion f in x_0 *nicht differenzierbar*. Damit ist f untauglich für die Bestimmung einer lokalen spezifischen Veränderung in x_0.

5.2 In zwei Schritten zum Mittelwert bei stetigen Funktionen:

Jede auf einem endlichen und abgeschlossenen Intervall definierte und stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt dort einen Mittelwert.
Begründung:
Erster Schritt: Diskretisierung, *arithmetisches Mittel einer Abtastung von f in n Punkten*, Diskretisierungsparameter n.

$$\mathcal{M}(f, a, b, n) := \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f(a + r \cdot \Delta x) \quad \text{mit } \Delta x := (b - a)/n$$

Zweiter Schritt: Idealisierung mit Grenzübergang $n \to \infty$. Dann existiert bei der auf $[a, b]$ stetigen Funktionen f der Grenzwert $m(f, a, b) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}(f, a, b, n)$. Er definiert den Mittelwert der stetigen Funktion f auf $[a, b]$ und ist unabhängig von der verwendeten Abtastung.

5.3 Vom Mittelwert zum Integral:

Das *bestimmte Integral* lässt sich im propädeutischen Unterricht mit Hilfe des Mittelwertes definieren:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := (b - a) \cdot m(f, a, b)$$

Bemerkung: Das bestimmte Integral lässt sich auch wie folgt ohne Umweg über die Mittelbildung in zwei Schritten mit (einer der Schule angemessenen Form) der Riemannsumme und mit dem Grenzwert von Riemannsummen mit $n \to \infty$ definieren. Dann folgt umgekehrt [vgl. Aufgabe 12.]:

$$m(f, a, b) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } a \neq b \quad \text{und es ist offensichtlich} \quad m(f, a, a) = f(a)$$

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $F' = f$ und der Mittelwert von f im Intervall $[a, b]$

ist der Differenzenquotient.

$$m(f, a, b) = \frac{F(b) - F(a)}{(b - a)}$$

Die Aussage $m(f, a, a) = f(a)$ leuchtet sofort ein, wenn man die Summendefinition mit einem einzigen Summanden benutzt. Die Tatsache, dass diese Beziehung im Grenzfall $a = b$ gilt, wenn der Differenzenquotient zur Ableitung wird, führt unmittelbar zum *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung,* einem zentralen Ergebnis in der elementaren Analysis.

5.4 Analysis versus Calculus: eine Bemerkung zum Unterricht

Es ist wichtig, dass die zweischrittige Methodik *vor der Formalisierung* in zahlreichen und verschiedenen Anwendungen mit Diskretisierung und Grenzübergang behandelt und in den verschiedensten Beispielen benutzt wird, um das Vorgehen zu vertiefen und einzuüben. Damit kann Vertrauen in die Anwendbarkeit der Analysis gewonnen werden, bevor die Formalismen des Infinitesimalkalküls diese wichtigen Gedankengänge abkürzen.

Es stimmt zwar, dass der Infinitesimalkalkül (der 'Calculus') in manchen Anwendungen oft bequemer zum Ziel führen würde. Das Restproblem, welches dann ausgeklammert wird, ist die anwendungsbezogene Begründung für die Wahl der Methode und des spezifischen Werkzeuges. In der Physik oder in der Geometrie werden mit der Anwendung von Ableitung oder Integral jeweils auch neue Begriffe eingeführt. Das ist ein Hinweis, dass es semantische Überlegungen zu beachten gibt, die nicht aus der *Syntax des Calculus* ableitbar sind. Beim Lehren, Lernen und Verstehen sind wir auf die *Semantik* angewiesen. Sie wird durch das zweistufige Vorgehen mit Diskretisierung und Idealisierung unterstützt.

Wir haben absichtlich zwei Standardinterpretationen für Ableitung und Integral vermieden, da sie zu gedanklichen Kurzschlüssen der Art 'Ableitung = Tangentensteigung' und 'Integral = Flächeninhalt' verleiten. Die Kurzschlüsse behindern oft genaue Argumentationen, zum Beispiel im Zusammenhang mit der Interpretation der höheren Ableitungen oder bei der Interpretation des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung mit diesen all zu schwachen Hilfsbegriffen. Anderseits können Anfänger verwirrt werden, wenn Integrale negative Werte liefern, aber angeblich Flächeninhalte berechnen, oder wenn 'Flächeninhalte' als Rotationsvolumen oder Bogenlängen plötzlich ganz andere Dimensionen annehmen sollen, als 'Flächeninhalte' suggerieren.

Der *Infinitesimalkalkül* ist eigentlich eine *Erweiterung der Algebra* durch generische Ableitungsregeln und spezielle Ableitungsregeln für elementare Funktionen, die sich *finit* behandeln lassen.

Die *generischen Regeln* lassen sich für allgemeine differenzierbare Funktionen formulieren. Die Regeln für die Ableitung von Summen, Produkten, Quotienten, die Kettenregel oder die Regel für die Ableitung der Umkehrung zu einer differenzierbaren Bijektion sind die wesentlichen Beispiele.

Die *speziellen Ableitungsregeln* betreffen konkrete einzelne Funktionen, zum Beispiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x) = \exp(x) \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(t) = 1/t$$

Dabei folgt aber in diesem speziellen Beispiel jede der beiden Regeln aus der anderen nach der generischen Regel für Umkehrfunktionen.

Dank dem *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* lässt sich jede Ableitungsregel umgekehrt als Integrationsregel interpretieren. Aber die Methode greift nur im Sonderfall, wenn elementare Funktionen mit elementaren Stammfunktionen auftreten. Sie versagt bereits in Beispielen der Art $\int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Die Macht des Calculus liegt in seinen suggestiven Formalismen. Wie Computer-Algebra-Systeme zeigen, lässt sich der Calculus weitgehend automatisieren. Seine Schwäche betrifft die Heuristik in Anwendungen. Deshalb lohnt es sich, Diskretisierung und Idealisierung als Ansatz zu vertiefen und damit die Anwendung des Calculus von Fall zu Fall zu begründen. Wenn aber nach der Diskretisierung die Algebra das diskretisierte Problem nicht bewältigt oder wenn die Grenzwerte zwar abstrakt existieren, aber sich der formalen Berechnung entziehen, bleibt die Option, *numerische Näherungen* zu suchen. Eine angenäherte numerische Lösung mit beherrschbarem Approximationsfehler ist allemal besser als keine Lösung!
Diese Option kann auch helfen, wenn der Calculus mit finiten Methoden keine Lösung findet. Numerische Verfahren sind eine grundsätzlich wichtige Ergänzung zum Calculus.

5.5 Physik, Analysis und der fliegende Pfeil

Das Paradoxon vom fliegenden Pfeil zeigt, wie verführerisch intuitive Sprechweisen verbunden mit unangemessenen Begriffsbildungen sein können. Es hat nach Zeno rund 2000 Jahre gedauert, bis die physikalische Begriffsbildung für die *Momentangeschwindigkeit* mathematisch klar definiert wurde. Die Definition beinhaltet folgende Schritte

1. *Vorbereitung*: Exakte *Begriffsbildung*
   Der Pfeil wird idealisiert als Punkt P, zum Beispiel gedacht als Schwerpunkt des Pfeiles oder als Spitze, damit die Position des Pfeiles in einem Koordinatensystem exakt und unzweideutig beschreibbar wird. Ferner wird angenommen, dass zu jedem Zeitpunkt t die Position von P definiert und bekannt sei. In einem Koordinatensystem ist beispielsweise $\overrightarrow{OP}(t)$ für jedes t bekannt. In mathematischer Sprache: Die Position des Pfeiles wird als *Parameterdarstellung* $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t) := \overrightarrow{OP}(t)$ mit der Zeit t als Parameter beschrieben.

2. *Diskretisierung* beantwortet die Frage: Mit welcher *mittleren Geschwindigkeit* bewegt sich der Pfeil zwischen den Zeiten t_0 und $t_0 + \Delta t$ für $\Delta t > 0$?

Antwort: Die mittlere Ortsveränderung pro Zeiteinheit ist

$$\bar{\vec{v}}(t_0, \Delta t) := \frac{1}{\Delta t}\left(\vec{x}(t_0 + \Delta t) - \vec{x}(t_0)\right) \qquad \text{(Differenzenquotient)}$$

Dies ist *definitionsgemäss* die mittlere Geschwindigkeit, die zur Parameterdarstellung $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$ gehört.

Die Momentangeschwindigkeit des Punktes P im Zeitpunkt t_0 wird als *Grenzwert* der mittleren Geschwindigkeiten für $\Delta t \to 0$ definiert, falls dieser Grenzwert existiert.

$$\vec{v}(t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\vec{x}(t_0 + \Delta t) - \vec{x}(t_0))$$

Wenn die Grenzwerte existieren, so ist das Beispiel ein Fall für die elementare Analysis, sonst kümmern wir uns nicht weiter darum. Allgemein ist die Existenz der Grenzwerte der Differenzenquotienten nicht gesichert. Modelle für die Brownsche Bewegung besitzen zwar mittlere Geschwindikgeiten für die Zitterbewegung, aber deren Grenzwerte für $\Delta t \to 0$ existieren nicht.
Nun wird klar, dass das Paradoxon vom fliegenden Pfeil alles andere als harmlos ist. Seine Auflösung ruft nach einer Klärung der nötigen geometrischen und physikalischen Begriffe. Die physikalische Begriffsbildung hat schon im 17. Jahrhundert stattgefunden: Die Momentangeschwindigkeit wird erklärt als Grenzwert von mittleren Geschwindigkeiten, die über Zeitintervalle gemessen werden, die beliebig kurz gemacht werden. Technisch ausgedrückt: *Die Geschwindigkeitsfunktion ist die Ableitung der Positionsfunktion nach der Zeit, falls die Ableitung existiert.*

$$\vec{v}(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t)$$

Numerik leistet Beiträge zur *Computergrafik,* die hochkomplexe Ergebnisse und grosse Datenmengen von Berechnungen oder Simulationen so aufbereiten kann, dass diese für Menschen überhaupt erfassbar werden. Numerische Mathematik ist daher mit Spitzentechnologien verbunden, deren Fortentwicklung sie selbst wieder fördert. Aber numerische Mathematik arbeitet mit Maschinenzahlen $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$, während die formale Mathematik sich mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ befasst.

Wir erachten es als wichtig, bereits in der Schule auf diesen Umstand hinzuweisen. Das kann man auf nachhaltige Art aber nur tun, wenn auch Erfahrungen mit der Numerik vermittelt werden. Ein exemplarischer Kontakt mit elementaren Schlüsselbeispielen muss ausreichen. Wer dann Numerik und Analysis durcheinander bringt, $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ mit $\mathbb{R}$ vermischt, kann mühelos paradoxe Ergebnisse erzeugen. Aus jeder Paradoxie wird ein Erfolgserlebnis, wenn der Unsinn aufgedeckt wird und ein Sinn dahinter steckt, AHA!

Numerische Mathematik ist deutlich von der diskreten Mathematik mitgeprägt. Sie lässt sich auch als propädeutische Analysis betreiben, in der zwar die Diskretisierungen gemacht werden, die Grenzübergänge aber noch nicht vollzogen werden. So ist es möglich, in einem frühen Stand der Ausbildung bereits die Diskretisierung als Methode zu vertiefen, um Lösungen, die sich finiten Methoden entziehen, wenigstens angenähert zu bestimmen. Statt Ableitungen werden Differenzenquotienten berechnet. Anstelle von bestimmten Integralen treten beispielsweise Riemannsummen oder andere numerische Integrationsverfahren. Durch diese Vorstufe wird der zweite Schritt, der die Analysis prägt, nämlich die Idealisierung durch Grenzübergänge, welche die Diskretisierungsfehler wieder tilgen, auf den Zeitpunkt aufgehoben, in dem die Methoden der Analysis dann auch verfügbar sein werden. Das ist ja in der Regel erst kurz vor der Matutität der Fall. Erfahrung zeigt, dass dann kaum mehr Zeit für wichtige Anwendungen besteht. ex

Unser Anliegen ist es, *Numerik dosiert aber schon früh einzusetzen, um interessante Modellbildung in Anwendungen zu betreiben und dabei die Rolle der Diskretisierung zu erfahren.* Tatsache ist, dass sich echte Probleme sehr selten exakt lösen lassen. Denn oft fehlen schon exakte Daten oder die postulierten Gleichungen beruhen bereits auf Vereinfachungen oder Näherungen.

Damit lässt sich ein *Wirklichkeitsbezug* mehrfach knüpfen, auch und gerade darum, weil die Analysis ihre eigenen unlösbaren Probleme hat, von denen manche wenigstens in guter Näherung mit numerischen Verfahren bewältigt werden können. Es gibt keinen Grund, im digitalen Zeitalter der Numerik aus dem Weg zu gehen. Analysis und Numerik verstärken einander gegenseitig und die Last numerischer Berechnungen wird auf Hardware, Software und Computergrafik abgewälzt, die allgemein und kostengünstig zur Verfügung stehen.

7 Beispiele zu Aufgaben

1. Dichotomie: Ich bin im Punkt A und möchte nach $B \neq A$ gelangen. Das ist unmöglich, denn, wenn ich mich auf B zubewege, muss ich erst einmal bis zu einem Punkt A_1 bei Hälfte des Abstandes $r = \overline{AB}$ gelangen. Aber wenn ich dort bin, besteht das gleiche Problem wie am Anfang, ich bin in $A_1 \neq B$ und will nach B.

2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Dichotomie-Paradoxon und jenem von Achilles und der Schildkröte?

3. Ein Pfeil wird von der Höhe x_0 senkrecht nach oben abgeschossen. Zur Zeit t befindet er sich an der Stelle $x(t) := x_0 + v \cdot t - c \cdot t^2$. Dabei sind x_0, v und c positive Konstanten.

   (a) Wie gross ist die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t_0 und $t_0 + \Delta t$?

   (b) Wie gross ist die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten $t_0 - \Delta t$ und $t_0 + \Delta t$?

   (c) Wie gross ist die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t_0?

   (d) Zu welcher Zeit t_1 ist die Momentangeschwindigkeit $v(t_1)$ gleich gross wie die mittlere Geschwindigkeit zwischen t_0 und $t_0 + \Delta t$?

   (e) Zu welcher Zeit t_2 ist die Momentangeschwindigkeit gleich 0 ? Welche Bedeutung hat der entsprechende Bahnpunkt?

4. Angenommen, eine Feder schwingt so, dass die Position ihres Endes bestimmt wird durch $x(t) := \sin(t)$ [t im Bogenmass]. Wie gross ist ihre mittlere Geschwindigkeit

   (a) zwischen $t_1 = 0$ und $t_2 = \pi/2$?

   (b) zwischen $t_3 = -\pi/4$ und $t_4 = \pi/4$?

   (c) zwischen t_1 und $t_5 = \pi$?

5. Warum lässt sich π mit dem Computer nie exakt bestimmen?

6. Warum lässt sich π mit der Monte-Carlo-Methode prinzipiell nicht exakt bestimmen?

7. (a) Warum gilt die Formel für die Kreisfläche $F = \pi \cdot r^2$ exakt?

   (b) Warum ist sie praktisch erst brauchbar, wenn π durch eine Näherung ersetzt wird?

   (c) Was ist der Vorteil der exakten Formel, auch wenn sie in jeder konkreten Anwendung mit rationalen Näherungen für π 'interpretiert' werden muss?

8. Warum erfüllt keine Zahl $s \in \mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ die Einsetzprobe in der Gleichung $x^2 = 2$ exakt?

9. (a) Wie sieht man ohne exakte Rechnung ein, dass folgende Ungleichungen gelten?

$$1/2 < 1/3 + 1/4 < 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 < \cdots < \sum_{r=2^n+1}^{2^{n+1}} 1/r$$

   (b) Warum folgt, dass die Summe $\sum_{r=1}^{N} 1/r$ keinen Grenzwert hat, wenn N unbegrenzt wächst?

   (c) Warum gibt es in $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ eine Zahl M, so, dass $\sum_{r=1}^{M} 1/r = \sum_{r=1}^{N} 1/r$ für alle $N > M$?

10. (a) Warum ist $(1 + 1/n)^n \geq 2$ für alle n?

   (b) Berechnen Sie $(1 + 1/n)^n$ für $n = 2^{64}$ auf Ihrem Rechner als Rechnerzahl in einem numerischen Modus (Mode approximate). Was zeigt sich?

11. Angenommen, wir verwenden die anschauliche Sprechweise: *Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der stetigen Funktion $f : x \mapsto f(x)$ und dem endlichen Intervall $[a, b]$ der Abszisse.*

   (a) Wie begründen Sie nun die Rechenregel $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$?

   (b) Wie rechtfertigen Sie das Ergebnis $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$?

   (c) Warum kann ein Integral, das einen Flächeninhalt berechnet, auch Inhalte in anderen Dimensionen, zum Beispiel ein Rotationsvolumen oder eine Bogenlänge berechnen?

12. Formulieren Sie eine mathematisch brauchbare Definition für $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mit dem zweistufigen Vorgehen: Diskretes Ersatzproblem und Grenzübergang. Welchen Vorteil hat dieses Vorgehen?

13. (a) Wie lässt sich der Mittelwert der Funktion $j : x \mapsto 1/x$ im Bereich $1 \leq x \leq 2$ mit 1000 gleichverteilten Zufallszahlen $1 \leq z_i \leq 2$ annähern?

   (b) Wie lässt sich $\int_1^2 j(x)\mathrm{d}x$ mit 1000 gleichverteilten Zufallszahlen $\{z_i\}$ (Monte-Carlo-Verfahren) annähern?

14. (a) Wie lässt sich der Mittelwert der Funktion $j : x \mapsto 1/x$ im Bereich $1 \leq x \leq 2$ mit einer Abtastung $\{j(x_k)\}$ mit $1 \leq x_k := x_0 + k/1000 \leq 2$ mit $0 \leq k \leq 999$ annähern? Zwischen welchen Extremwerten liegen die Antworten? Wie gross ist der Diskretisierungsfehler höchstens?

   (b) Wie lässt sich $\int_1^2 j(x)\mathrm{d}x$ mit einer Abtastung mit 1000 gleichabständigen Punkten x_k, $1 \leq x_k \leq 2$ annähern? Wie gross ist der Diskretisierungsfehler höchstens?

15. Wie lässt ich das Kugelvolumen auf drei prinzipiell verschiedene Arten diskretisieren? Zu welchen Arten von Integraldarstellungen für das Kugelvolumen führen diese drei Ansätze?

8 Literaturhinweise und Bemerkungen

Literatur

[Bu] Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules? ACM SIGSAM Bulletin, 24(1), 10-17.

[H&W] E. Hairer, G. Wanner, Analysis by Its History, Springer Verlag, 1996, Berlin, New York, ISBN 0-387-94551-2

[KW] Kügler, P., Windsteiger, W., Algorithmische Methoden, Zahlen, Vektoren, Polynome, Mathematik Kompakt, Birkhäuser, Basel, 2009, ISBN 978-3-7643-8434-0

[Ov] Overton, Michael L., Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic, SIAM, Philadelphia, 2001, ISBN 0-89871-571-7

[P1] H. Poincaré, La Science et l'Hypothèse, Flamarion

[P2] H. Poincaré, Science et Méthode

[Po] G. Pólya, Mathematical Methods in Science, MAA, New Mathematical Library, Vol. 26, ISBN 0-88385-600-X

[Sc] H.R. Schneebeli, On Teaching Analysis, and the Role of the Calculus, Il Volterriano Nr. 14 – 2014.

[Si] G. Simmons, Calculus Gems, McGraw-Hill & Co. New York, ISBN 0-07-057566-5

[St] J. Stillwell, Mathematics and its History, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1989, New York, ISBN 0-387-96981-0

[To] O. Toeplitz, The Calculus, a generic approach, Chicago University Press, 1963, ISBN 978-0-226-80668-6

Hinweise Poincaré [P1], [P2] spricht in seinen beiden Schriften ein allgemein gebildetes Publikum an. Er betont Begriffsbildung, die Entwicklung der Vorstellungen über Zahlen, Raum und Zeit. Während für Formalisten (Hilbert) die Syntax besonders wichtig ist, sieht Poincaré auch eine Rolle für die Semantik, insbesondere beim Lernen. Es lohnt sich, seine Gedanken zur Mathematik, ihren Methoden und ihrer Entwicklung inklusive des Unterrichtes zur Kenntnis zu nehmen. Die Texte sind im Internet frei zugänglich.
Simmons und Stillwell sind neuere Texte, die eine historische Perspektive in der Entwicklung der Mathematik betonen. Sie bilden gute Grundlagen für einen genetischen Unterricht, der davon ausgeht, dass jeder in seiner individuellen Entwicklung im wesentlichen die gleichen Stufen durchlaufen wird wie das Kollektiv in seiner historischen Entwicklung. Der 'generic approach' von Toeplitz entspricht der genetischen Methode. Sein 'Calculus' fasst auf weniger als 200 Seiten eine Einführung in die Grundbegriffe der Analysis und die historischen Umstände und Fragestellungen, die die Entwicklung dieses Zweiges der Mathematik seit der hellenistischen Zeit, besonders aber ab Beginn der Neuzeit angetrieben haben. In der Literaturliste fehlen Hinweise auf den Einsatz des Computers im Unterricht. Hier ist noch vieles im Umbruch. Eines der stabilsten Fundamente stammt von Bruno Buchberger [Bu] und Bernhard Kutzler (Black Box / White Box – Prinzip, Gerüstdidaktik).

9 Lösungen, Hinweise

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$, unendliche geometrische Reihe.

2. Das Problem von Achilles und der Schildkröte kann aus der Sicht der Schildkröte betrachtet werden. Dann ruht die Schildkröte in ihrem Bezugssystem und für Achilles ergibt sich das Dichotomieparadox.

3. (a) $\bar{v}(t_0, \Delta t) = v - c \cdot (2t_0 + \Delta t)$

   (b) $\frac{1}{2\Delta t}(x(t_0 - \Delta t) - x(t_0 + \Delta t)) = v - 2c \cdot t_0$, [vgl. 3c.]

   (c) $\lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}(t_0, \Delta t) = v - 2c \cdot t_0$

   (d) $t_1 = t_0 + \frac{1}{2}\Delta t$

   (e) $v(t_2) = 0$ für $t_2 = v/(2c)$, höchster Bahnpunkt.

4. (a) $\bar{v}_a = 2/\pi$

   (b) $\bar{v}_b = 2\sqrt{2}/\pi$

   (c) $\bar{v}_c = 0$

5. Alle Antworten gehören zu $\mathbb{R}_{\mathbb{M}} \subset \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$

6. Beim Monte-Carlo Verfahren werden N Punkte im Einheitsquadrat zufällig und gleichmässig verteilt und der Anteil k der Treffer im Einheitskreis gezählt. Die Näherung lautet $\pi \approx 4k/N \in \mathbb{Q}$.

7. (a) Der Kreis vom Radius r entsteht aus dem Einheitskreis durch zentrische Streckung mit dem Faktor r, der den Radius des Kreises misst. Die Formel $F = \pi \cdot r^2$ folgt aus dem Gesetz für die Flächenverhältnisse bei ähnlichen Figuren, angewandt auf Kreise.

   (b) Für praktische Anwendungen wird die Fläche als Dezimalzahl gebraucht, also muss π durch eine rationale Näherung ersetzt werden. Welche Näherung benutzt wird, bleibt offen. Eine feste Näherung $\pi \approx 3$ oder $\pi \approx 22/7$ wäre unzweckmässig.

   (c) Die Verwendung der symbolischen Grösse π lässt im Einzelfall die Wahl einer passenden Näherung zu. Das Symbol π spielt in der Anwendung die Rolle eines Symbols, das bei numerischen Berechnungen durch fallweise passende Näherungswerte zu ersetzen ist.

8. $x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \supset \mathbb{R}_{\mathbb{M}}$

9. (a) $1/2 = 1/4 + 1/4 < 1/3 + 1/4$, $1/3 = 1/6 + 1/6 < 1/5 + 1/6$ $1/4 < 1/7 + 1/8$ usw.

   (b) Jeder Block von Summanden $1/r$ mit $2^n < r \leq 2^{n+1}$ ergibt einen Beitrag an die Gesamtsumme von mindestens $1/2$. Es gibt aber beliebig viele solche Blöcke, also kann die ganze Summe nicht endlich sein.

   (c) In $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ gilt wegen der begrenzten Stellenzahl $1 + 1/r = 1$ für alle hinreichend grossen r, z. B. $r > 2^{64}$ bei einer 64-Bitarithmetik in $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$. Daher tritt ab einer gewissen Zahl M Sättigung ein, und die Summe verändert sich nicht mehr.

Offene Frage: Man könnte die Summe in Blöcken wie oben angedeutet in umgekehrter Reihenfolge der Summanden abarbeiten, also jeweils mit grossen $r = 2^n$ beginnen. Dann wird jeder Block mindestens 1/2 beitragen. Damit wird sichtbar, dass für Summen in $\mathbb{R}_{\mathbb{M}}$ das Kommutativgesetz nicht mehr gilt. *Im Gegensatz zur analytischen Abschätzung beweist Rechnersimulation die Divergenz der Summe nicht.*

10. (a) $(1 + 1/n)^n \geq 1 + n \cdot 1/n = 2$ (allgemeine binomische Formel oder Bernoulli-Ungleichung)

    (b) $(1+1./n)^n = 1.$ für $n = 2^{64}$ [mode approximate], numerische Paradoxie aus (a) und (b): $2 \leq 1.$

11. (Zu stark vereinfachte Erklärungen verschieben Verständnisprobleme bloss.)
Vorbemerkung: 'Flächeninhalte' werden elementargeometrisch nur für endliche Polygone definiert. Bei krummlinig begrenzen Flächenstücken wird die Existenz und Bestimmung seines Inhaltes erst durch Integralrechnung (allgemeiner Masstheorie) ermöglicht.

    (a) Hier müssten die *Orientierung des Integrals* und orientierte Flächeninhalte angesprochen werden. Im bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ist $\mathrm{d}x = 1$, wenn die Integration in Richtung wachsender x-Werte vorgenommen wird, also falls $a < b$ ist.

    (b) Wird $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ mit dem Hauptsatz der Integralrechnung ausgewertet, so folgt die Regel korrekt aus dem Kalkül, aber sie ist nicht einsichtig begründet. Korrekt ist die Konvention: Beim Berechnen orientierter Flächenstücke zählen jene links des orientierten Integrationsweges positiv, jene rechts negativ. Das ist aber eine Merkregel und keine tiefere Einsicht.

    Bemerkung: Die Frage der *Orientierung* wird beim Integral oft unterschlagen, indem selbstredend *immer* $a < b$ angenommen wird. Auch die banale Erklärung: 'Flachenstücke unterhalb der Abszisse werden negativ gezählt' ist so nicht richtig, weil die Orientierung von $\mathrm{d}x$ nicht beachtet wird. Manche zu einfache 'Erklärungen' sind unvollständig und daher unbefriedigend oder falsch. Die Aussage 'Integral=Flächeninhalt' wird erst unter wichtigen Präzisierungen korrekt. Der *Hauptsatz der Integralrechnung* ist für manche Anwendung weder eine Hilfe für die Erklärung der Methode noch zur Berechnung (von praxisrelevanten Näherungen), denn die Existenz einer *'elementaren'* Stammfunktion ist nicht gegeben, während Mittelwerte oder gar Riemannsummen unmittelbar Einsichten, Näherungen und Zusammenhänge erschliessen.

    (c) Das Integral muss je nach dem Vorzeichen der Funktionswerte in zwei Abschnitte aufgeteilt werden. Im Bereich $\pi < x < 2\pi$ ist zu begründen, warum diese 'Fläche' einen negativen Inhalt haben soll. Das ist eigentlich eine Korrektur zur naiven Definition, die hier bereits versagt.

    (d) In manchen Anwendungen ist es künstlich, auf den Flächeninhalt auszuweichen. Aber es ist immer angemessen, mit Riemannsummen inhaltlich zu argumentieren. Versuchen Sie zum Beispiel mit Flächeninhalten und Tangentensteigungen die Regel $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$ plausibel zu machen. "Der Flächeninhalt unter der Tangentensteigungsfunktion..." ist kein wirklich hilfreiches Konzept.

12. Die Diskretisierung liefert eine 'Riemannsumme' (R-Summe), z.B.

$$\sum_{r=1}^{n} f(a + r \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \quad \text{mit } \Delta x := (b-a)/n$$

Der Grenzwert der R-Summe für $\Delta x \to 0$ mit $n \to \infty$ existiert für stetige Funktionen und definiert den Wert des bestimmten Integrals (R-Integral).

13. (a) Jeder Mittelwert einer Liste von n Funktionswerten $\{j(x_i)\}$ ist eine Näherung für den Mittelwert $\bar{j}$ der Funktionswerte von j auf $1 \leq x \leq 2$. Die Antworten variieren und hängen von den 1000 Zufallszahlen $x_i := 1 + \text{rand}()$ ab. (rand() bezeichnet den Aufruf für gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $[0, 1]$.)

    (b) Weil das Intervall die Länge 1 hat, ist der exakte Mittelwert $\bar{j}$ gleich dem Wert von $\int_1^2 j(x)\mathrm{d}x$ $(= \ln(2))$.

14. (a) allgemein ist $\bar{j} \approx \mu(x_0) := \frac{1}{1000} \sum_{k=0}^{999} j(x_k)$, das ist der Mittelwert bei der Abtastung, die mit x_0 beginnt und 1000 Punkte berücksichtigt.

    Weil j monoton fällt, folgt $\mu(1) \approx \mathbf{0.693}397 \cdots \geq \mu(x_0) \geq \mu(1.001) \approx \mathbf{0.69}2897\ldots$, maximaler Fehler $\leq 5 \cdot 10^{-4}$.
    Verbesserte numerische Näherungen: Abtastung in den Mittelpunkten der Teilintervalle $\mu(1.0005) \approx \mathbf{0.69314714}931\ldots$
    Trapezwert $(\mu(1) + \mu(1.001))/2 \approx \mathbf{0.693147}24305\ldots$

    (b) Die in (a) betrachteten Durchschnitte sind auch Riemannsummen für

    $$\int_1^2 j(x)\mathrm{d}x = \ln(2) \approx \mathbf{0.6931471805}5\ldots$$

    denn die Länge des Integrationsintervalles ist 1.

    Es spielt keine wesentliche Rolle, ob die Liste durch eine Abtastung auf einem regelmässigen Muster oder mit Zufallszahlen gewonnen wurde. Entscheidend ist, dass n gross ist und die Abtastpunkte möglichst dicht liegen.

15. Zerlegung der Kugel mit Radius R

    (a) durch parallele ebene Schnitte in dünne Kreisscheiben mit Abstand Δx.
    Integraldarstellung $V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\mathrm{d}x$

    (b) durch konzentrische Kugeln in dünne Kugelschalen der Dicke Δs.
    Integration über Kugelschalen $V = \int_0^R A(s)\mathrm{d}s = 4\pi \int_0^R s^2 \mathrm{d}s$

    (c) durch eine feine Triangulation in Pyramiden mit gemeinsamer Spitze im Kugelzentrum und Grundfläche ΔF_i.
    Integraldarstellung $V = \frac{R}{3} \cdot A = \frac{R}{3} \cdot \int_S \mathrm{d}F$,
    es bezeichnen S die Kugeloberfläche, A ihr Flächeninhalt.