Lineare Differenzengleichungen

H.R. Schneebeli

Version vom 25. Juni 2013

Zusammenfassung

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich auf mindestens zwei Arten lösen:

- rekursiv
- algebraisch

Beide Methoden werden an Beispielen entwickelt. Vertrautheit mit rekursiv definierten Folgen, exponentiellem Wachstum und den Regeln des Potenzrechnens wird vorausgesetzt.

1 Lineare Differenzengleichungen und Rekursion

Die Differenzengleichung $\Delta(w) = w$ lässt sich ausschreiben als

$$\Delta(w)(t) = w(t+1) - w(t) = w(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}_0$$

oder gleichbedeutend $w(t+1) = 2 \cdot w(t)$. Mit $w(0) = w_0$ folgt sofort $w(t) = w_0 \cdot 2^t$.

Alle linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich nach dem Muster dieses Beispiels in lineare Rekursionen umschreiben.

Betrachten wir das Beispiel $\Delta(w) = p \cdot w + r$ mit zwei Konstanten p und r und der Anfangsbedingung $w(0) = w_0$. Eine gleichbedeutende rekursive Beschreibung dieser Differenzengleichung lautet $w(t+1) = (1+p)w(t) + r$.

Mit der Abkürzung q=1+p ergibt sich der Reihe nach $w(1) = q \cdot w_0 + r$, $w(2) = q^2 w_0 + q \cdot r + r$ und allgemein mit Induktion

$$w(t) = w_0 \cdot q^t + r \cdot (\sum_{k=0}^{t-1} q^k)$$

Für $q \neq 1$ folgt mit der Summenformel für geometrische Reihen

$$w(t) = w_0 \cdot q^t + r \cdot \frac{q^t - 1}{p} = (w_0 + \frac{r}{p})\, q^t - \frac{r}{p}$$

und für $q = 1$ ist $w(t) = w_0 + r \cdot t$.

Dieses Beispiel ist auch aus der Rentenrechnung bekannt.

Bemerkungen

1. Das CAS kann ausgehend von rekursiv definierten Folgen und Anfangswerten die Anfangsstücke der Folgen erzeugen. [Graph, Mode sequence].

2. Anfangsstücke rekursiv definierter Folgen lassen sich ausgehend von den Startwerten auch iterativ erzeugen.

Aufgaben

1. Angenommen es gilt $\Delta(w) = \lambda \cdot w$ und $w(t) = 0$ für ein $t \in \mathbb{Z}$.
   Begründen oder widerlegen Sie:

   (a) Dann ist auch $w(t+1) = 0$.

   (b) Dann ist auch $w(t-1) = 0$.

   (c) Dann ist $w(s) = 0$ für alle $s \in \mathbb{Z}$.

2. Welche Folgen erfüllen $\Delta(w) = r$ mit einer Konstanten r und $w(0) = w_0$?

3. Die Differenzengleichung $\Delta(\Delta(w)) + \Delta(w) - w = 0$ werde als Rekursion ausgeschrieben.

   (a) Wie lautet die entsprechende Rekursionsvorschrift?

   (b) Wie lauten die ersten 10 Glieder der Folge, die zu dieser Rekursion und den Anfangsbedingungen $w(0) = 0$, $w(1) = 1$ passt?

4. Welches sind die ersten 10 Glieder der Folge, die zur Differenzengleichung $\Delta(\Delta(w)) = -w$ und den Anfangsbedingungen $w(0) = 1$, $w(1) = 0$ passt?

5. Es seien a, b, u, v Konstanten. Wie lauten die ersten fünf Glieder der Folge w, die durch die Differenzengleichung
   $$\Delta(\Delta(w)) + a \cdot \Delta(w) + b \cdot w = 0$$
   und die Anfangsbedingungen $w(0) = u$ und $\Delta(w)(0) = v$ definiert wird?

2 Lineare Differenzengleichungen, die algebraische Methode

Rekursion liefert die Glieder einer Folge eines nach dem anderen. *Die algebraische Methode* liefert zu geeigneten Daten eine Zahlfolge w als *Ganzes*.

Bei linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten ist die algebraische Methode besonders wirkungsvoll. Das hängt damit zusammen, dass die Struktur der Lösungsmenge einfach zu durchschauen ist.

Betrachten wir die lineare Differenzengleichung

$$\Delta(w) = p \cdot w + r \quad \text{mit Konstanten } p \text{ und } r.$$

Für $r = 0$ ist diese Gleichung homogen, sonst inhomogen.

Für die *inhomogene* Gleichung wird eine möglichst einfache Lösung gesucht. Ein Versuch mit einer konstanten Folge k, das heisst, $k : t \mapsto k$ für alle t, zeigt folgendes: Aus der Einsetzprobe in der Differenzengleichung folgt, dass jedenfalls $\Delta(k) = 0$ ist, also $p \cdot k + r = 0$. Für $p \neq 0$ folgt $k = -r/p$. Aus $p = 0$ folgt $\Delta(w) = r$. Das ist eine arithmetische Folge der Ordnung 0 und die allgemeine Lösung lautet $w(t) = w_0 + r \cdot t$. Damit ist die inhomogene Gleichung gelöst.

Für die *homogene Gleichung* suchen wir eine Folge der Art $w : t \mapsto q^t$ mit einer Konstanten $q \neq 0$ als Lösung.

Die Einsetzprobe in der Differenzengleichung ergibt $\quad q^{t+1} - q^t = p \cdot q^t \quad$ für alle t. Das ist wegen $q \neq 0$ nur möglich für $q = 1 + p$.

Für $p \neq -1$ darf $\mathbb{Z}$ als Definitionsbereich der Folge gewählt werden.

Für $p = -1$ wird $q = 0$ und q^t ist nur definiert für $t \geq 0$. Der Definitionsbereich der Lösung ist also $\mathbb{N}_0$ Die Lösungsfolge lautet dann $\{1 = 0^0, 0, 0, \dots\}$ und erfüllt $\Delta(w) = -w$.

Nun bemerken wir noch, dass die Lösungen einer homogenen Differenzengleichung nicht eindeutig festgelegt sind. Die Nullfolge ist immer auch eine (triviale) Lösung. Allgemein sind alle Linearkombinationen von endlich vielen Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung selbst wieder Lösungen dieser Gleichung.

Die *allgemeine* Lösung der homogenen Differenzengleichung $\Delta(w) = p \cdot w$ lautet also $w : t \mapsto w_0 \cdot (1 + p)^t$ mit der genannten Einschränkung für $p = -1$. Die Konstante w_0 wird erst festgelegt durch die Vorgabe einer weiteren Bedingung. Oft ist es eine Anfangsbedingung $w(0) = w_0$.

Nun kehren wir nochmals zur inhomogenen Differenzengleichung zurück. Ist w_i eine Lösung der inhomogenen Gleichung und w_h eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, so löst auch $w_h + w_i$ die inhomogenen Gleichung. Da wir einen vollständigen Überblick über alle Lösungen der homogenen Differenzengleichung besitzen, genügt es, eine beliebige (das heisst möglichst einfach zu bestimmende) Lösung der zugehörigen inhomogenen Gleichung zu kennen.

Die folgenden Lernaufgaben mögen die Verallgemeinerung auf Gleichungen mit Differenzen höherer Ordnung antippen.

Aufgaben

Zur Abkürzung schreiben wir $\Delta^2(w)$ für $\Delta(\Delta(w))$ und allgemein $\Delta^{n+1}(w) = \Delta(\Delta^n(w))$.

6. Wir betrachten nochmals die Differenzengleichung $\Delta^2(w) + \Delta(w) - w = 0$.
   (a) Für welche q gibt es exponentiell wachsende Lösungen der Art $w : t \mapsto q^t$ zu dieser Differenzengleichung?
   (b) Welche weiteren Lösungen gibt es?
   (c) Stimmt es, dass die Linearkombination von zwei Lösungen dieser Differenzengleichung immer auch eine Lösung ist?
   (d) Welche Lösungen erfüllen auch noch die Bedingungen $w(0) = 0$ und $w(1) = 1$?

7. Die bisherigen Erfahrungen sind zu ergänzen. Bekanntlich besitzt die Differenzengleichung $\Delta^2(w) = 0$ Lösungen $w : t \mapsto a \cdot t + b$ mit konstanten a und b.
   (a) Welche Lösungen von $\Delta^2(w) = 0$ findet der Exponentialansatz?
   (b) Für welche k löst die Potenzfunktion $w : t \mapsto t^k$ die Differenzengleichung $\Delta^3(w) = 0$? Wie lässt sich das Ergebnis verallgemeinern?

8. Versuchen Sie, die Differenzengleichung $\Delta^2(w) = -w$ mit $w(0) = 1$ und $\Delta(w)(0) = 0$ mit der rekursiven und mit der algebraischen Methode zu lösen.

9. Es seien a, b, r, u, v Konstanten.
   (a) Welches sind die Lösungen der Differenzengleichung

   $$\Delta^2(w) + a \cdot \Delta(w) + b \cdot w = 0$$

   mit den Anfangsbedingungen $w(0) = u$ und $\Delta(w)(0) = v$?
   Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen, damit der Exponentialansatz zum Ziel führt?
   (b) In welchen Fällen versagt der Exponentialansatz bei dieser homogenen Gleichung?

(c) Welches sind die Lösungen der Differenzengleichung

$$\Delta^2(w) + a \cdot \Delta(w) + b \cdot w = r$$

mit den Anfangsbedingungen $w(0) = u$ und $\Delta(w)(0) = v$?

(d) Vergleichen Sie die rekursive und die algebraische Methode in diesem Beispiel. Welche Vor- und Nachteile erkennen Sie bei den einzelnen Methoden?