

Zur virtuellen Realität der reellen Zahlen

H.R. Schneebeli

Version vom 17. November 2017

Zusammenfassung

Erfahrung und didaktische Einsicht zeigen, dass die Behandlung der reellen Zahlen im Gymnasium ein Balanceakt ist zwischen dem fachlich Nötigen und dem didaktisch Möglichen. Die *Umstände*, die zur Entwicklung der Analysis geführt haben, gehören zu einem Unterricht, in welchem die *Ideen* wachsen können. Die Analysis und der Zahlbegriff sind durch eine gemeinsame Evolution verbunden. Sie beanspruchte mehr als zwei Jahrtausende. Es gibt damit gute Gründe, einen ersten Einstieg in die Analysis gerade *nicht* mit KAPITEL 1, REELLE ZAHLEN zu eröffnen, sondern vorerst mit der virtuellen Realität der reellen Zahlen zu leben.

Einblicke in die historische Tradition der Analysis und numerische Experimente unterstützen ein Vorgehen, das Motivation, eigene Erfahrungen und Einsichten höher gewichtet als eine angelernte Theorie oder eine Dressur mit Ableitungsregeln.

1 Reelle Zahlen im Unterricht

Die reellen Zahlen sind *der* Prototyp für ein Kontinuum. Daher bilden sie eine wesentliche Grundlage im Aufbau der Analysis. Eine *Einführung in die reellen Zahlen* gehört zum Lehrplan der Maturitätsschulen. Welche Kenntnisse über die reellen Zahlen gehören zur Allgemeinbildung? Offenbar sind mehrere Gesichtspunkte zu beachten:

1. Weshalb genügen die rationalen Zahlen oder Dezimalzahlen mit endlich vielen Ziffern nicht zum Aufbau der Kontinuumsmathematik? Wozu ist das Kontinuum gut?
2. Einzelne irrationale Zahlen sollen konstruiert werden. Welche Darstellungsprobleme ergeben sich?
3. Die reellen Zahlen als Ganzes zeichnen sich durch eine Verbindung verschiedener mathematischer Bereiche aus:
 - (a) Algebra: \mathbb{R} ist ein Zahlkörper, der die rationalen Zahlen umfasst.
 - (b) Geometrie: \mathbb{R} ist eine Gerade und ein Kontinuum. Warum ist \mathbb{Q} kein Kontinuum?
 - (c) Mengenlehre: \mathbb{R} ist überabzählbar.
 - (d) Ordnung: \mathbb{R} ist linear geordnet, dicht geordnet und jeder Dedekindschnitt definiert genau eine reelle Zahl [Vollständigkeit].

Jede dieser Komponenten kann zu gegebener Zeit eine Einsicht zum Begriff der reellen Zahlen beitragen. Einiges davon lässt sich im Gymnasium erst informell vermitteln. Auch das Offenlassen von Lücken muss eine didaktische Option sein.

Die Entwicklung des Begriffs der 'reellen Zahlen' erstreckt sich von der *Entdeckung irrationaler Zahlen* zur Zeit des Pythagoras bis zur *Charakterisierung von \mathbb{R} als Vervollständigung*

von \mathbb{Q} durch Cauchy und Dedekind im 19. Jahrhundert. Das ist eine Spanne von mehr als zwei Jahrtausenden. Insbesondere haben Newton, Leibniz und andere Pioniere die Analysis entwickelt und angewandt, bevor \mathbb{R} als mathematisches Objekt im heutigen Sinn verstanden wurde. Gauss hatte die komplexen Zahlen benutzt und den Fundamentalsatz der Algebra begründet, bevor Cauchy und Dedekind formulierten, was die reellen Zahlen zum Kontinuum macht. Die Mengenlehre, die nötig ist, um die Mächtigkeit von \mathbb{Q} und \mathbb{R} zu vergleichen, ist noch später entstanden.

Es ist daher plausibel, dass eine didaktisch sinnvolle Einführung in die Analysis sich genug Zeit lassen muss, um die Notwendigkeit der reellen Zahlen gut zu motivieren. Die allgemeinbildende Schule wird ein provisorisches Bild für die reellen Zahlen vertreten. Im Lernprozess werden idealerweise einzelne wesentliche Konzepte zum Aufbau von \mathbb{R} eingebracht, miteinander verwoben und in Anwendungen erprobt. (vgl. [H+W, SIM, TOE])

2 Irrationale Zahlen

Die Länge d der Diagonalen im Einheitsquadrat löst nach dem Satz des Pythagoras die Gleichung $x^2 = 2$. Ironie des Schicksals: Pythagoras lehrte, dass alle Zahlen rational seien. Allerdings gibt es für d keine Darstellung als Bruch, $d = \sqrt{2}$ ist irrational – ein Widerspruch zu einer pythagoreischen Ideologie.

Diese Konfliktsituation wird gerne didaktisch ausgebeutet. Der algebraische Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, hat Beispielcharakter. Wer im geometrischen Kontext auf das Thema stößt, wird nicht an der Existenz von $\sqrt{2}$ als Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat zweifeln, da diese Strecke ja mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Bei der Gleichung $x^3 = 2$ liesse sich ähnlich argumentieren, um zu zeigen, dass $\sqrt[3]{2}$ irrational ist. Aber in welchem Sinne *existiert* eine Lösung? Keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal kann aus der Einheitslänge die Kantenlänge eines Würfels mit Inhalt 2 liefern. Dessen Kantenlänge würde $x^3 = 2$ erfüllen. Eine symbolische Bezeichnung $\sqrt[3]{2}$ genügt in der Analysis nicht als Nachweis, dass es eine reelle Zahl gibt, welche die Gleichung $x^3 = 2$ erfüllt.

Eine Argumentation mit dem Bisektionsverfahren liefert im Sinne der Analysis einen guten Grund. Bisektion kann eine Folge von Intervallen mit rationalen Endpunkten erzeugen, welche die Lösung enthalten und deren Durchschnitt aus genau einer reellen Zahl besteht, der gesuchten Lösung.

Allgemein ist es zweckmässig, numerische Verfahren im Unterricht einzuflechten. Sie lassen sich automatisieren und können im Sinne der Gerüstdidaktik und des Blackbox-Whitebox-Prinzips didaktisch genutzt werden, um Näherungsverfahren zu erkunden. Als elementar zugänglich gelten das auf Quadratwurzeln spezialisierte Heronverfahren oder das universellere Bisektionsverfahren. Mit beiden lässt sich eine *für die Analysis zentrale Idee* erkunden: Näherung innerhalb einer beliebig vorgegebenen, positiven Toleranz. Letztlich wird das Experiment aber an den Unzulänglichkeiten der Zahldarstellungen auflaufen, etwa an den Gleitkommazahlen, der Rechenzeit oder beim algebraisch exakten Rechnen mit rationalen Zahlen beim Verstehen der Antwort.

Eine vertiefte Behandlung des Newtonverfahrens in [BLU] zeigt, dass Numerik und Berechnungstheorie verschiedene Wege und verschiedene Prioritäten verfolgen in ihrem Umgang mit reellen Zahlen. Für Computernutzer ist ein Grundverständnis der Gleitkommazahlen unverzichtbar.

Iterative Verbesserungen, Gleitkommazahlen und \mathbb{R} Die Idee der Bisektion ist nützlich, um den *Zwischenwertsatz für stetige Funktionen* etwas tiefer zu verstehen als nur mit einer Skizze. Angenommen, eine stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf einem endlichen und abgeschlossenen Intervall $I := [a, b]$ definiert und es gelte $f(a) \cdot f(b) < 0$. Das heisst, dass die Funktion f auf dem Intervall I das Vorzeichen wechselt. Weil das Bild $f(I)$ zusammenhängend ist (es besteht aus einem einzigen Stück, weil f stetig im naiven Sinne ist), schliesst das Intervall $[f(a), f(b)]$ die 0 ein. Das zeigt auch eine Prinzipskizze, die als vorläufig noch naives Modell genügen soll. Wer nun das Prinzip der Bisektion versteht, wird einsehen, dass mit jedem Bisektionsschritt das Suchintervall halbiert wird. Seine Länge lässt sich also unter jede beliebig kleine positive Toleranzschranke drücken. Immer, wenn das geschieht, wird genau eine reelle Zahl definiert. Freilich wird das Rechnerexperiment in der Regel weniger glücklich enden: Nach endlich vielen Schritten zeigt sich Sättigung der Dezimalziffern, die Obergrenze und die Untergrenze lassen sich nicht mehr unterscheiden und bei der Einsatzprobe wird zwar meist $f(s) \approx 0$ festgestellt, aber nicht exakt $f(s) = 0$. Kommentierte numerische Experimente können den Weg zur Begriffsbildung ebnen. Naive Rechnergläubigkeit ebenso wie prinzipielle Rechnerskepsis sind keine didaktisch produktiven Haltungen, weil sie einer wichtigen Auseinandersetzung aus dem Wege gehen: Dem Muster \mathbb{R} steht die Computerimitation, Gleitkommazahlen vom Typ *real*, als pragmatischer Ersatz und Approximation gegenüber. Ähnlich ist das Verhältnis zwischen den abstrakt definierten stetigen Funktionen, auf welche die Aussagen der Analysis zutreffen, und berechenbaren Funktionen, welche die Berechnungstheorie für ihre Zwecke definiert oder gar jene numerischen Näherungen, die wir in realen Rechnerexperimenten antreffen.

Es ist verführerisch, den Schritt von den endlichen Dezimalbrüchen zur Dezimaldarstellung irrationaler Zahlen rasch und gedankenlos zu vollziehen. Was wir uns damit einhandeln, wird selten thematisiert. Vielleicht ist es sogar didaktische Weisheit, dieses Thema vorerst naiver Unschuld anheimzustellen.

Wie sollen die Grundoperationen in \mathbb{R} verstanden werden? Sie lassen sich nicht mehr als endliche Algorithmen in der Zifferndarstellung bewältigen. Ein Ausweg bleibt: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in einer Ebene mit markierten Punkten $0 \neq 1$. Diese Option ist von prinzipieller Bedeutung für eine Berechnungstheorie mit finiten Operationen in \mathbb{R} , für praktische Operationen aber bedeutungslos.

Im Schulbereich finden alle konkreten und finiten Berechnungen, die \mathbb{R} betreffen, effektiv in \mathbb{Q} oder in einem endlichdimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraum, zum Beispiel in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, statt. Es ist daher angemessen, *im Rahmen von \mathbb{Q} praktisch zu rechnen und im Rahmen von \mathbb{R} zu denken*.

Nicht konstruktive Existenzbeweise Die formalistische Mathematik lässt es zu, die Existenz gewisser Objekte logisch zu begründen, ohne auch nur ein konkretes Musterexemplar vorzuweisen. Indirekte Existenzbeweise wirken auf die Lernenden eher wie Glaubensbekenntnisse, sie lassen sinnlich wahrnehmbare Erfahrungen vermissen.

Ein Beispiel: Cantors Diagonalargumente zeigen, dass \mathbb{Q} abzählbar, \mathbb{R} jedoch überabzählbar ist. Daraus ergibt sich ein nicht konstruktiver Existenzbeweis für überabzählbar viele irrationale Zahlen. Daher muss es massenhaft irrationale Zahlen geben. Warum haben wir sie bloss nie bemerkt? Fehlen uns die Worte, um sie zu beschreiben oder zu benennen?

Überzeugender als Cantor's Existenzbeweis ist möglicherweise doch die Konstruktion einer Folge rationaler Zahlen, welche eine zunächst hypothetische Lösung einer Gleichung mit beliebiger Genauigkeit annähern. Bei folgenden Gleichungen $x^2 = 2$ oder – noch einfacher – bei $2^x = 3$ lässt sich elementar zeigen, dass keine rationale Zahl die Einsatzprobe besteht.

Wer nach einer *typischen irrationalen Zahl* fragt, sollte sich nicht wundern, wenn die

Antwort sehr oft lautet $\sqrt{2}$ oder π . Aber richtig *typisch* im Sinne der Masstheorie sind die anonymen reellen Zahlen, deren Namen uns zwangsläufig fehlen.

Reelle Zahlen für die Schule Die reellen Zahlen sind für die Analysis wichtig, weil sie zum Beweis von wichtigen Existenzsätzen unverzichtbar sind.

Aus Eigenschaften der reellen Zahlen folgt, dass jede monotone und begrenzte Zahlfolge genau einen Grenzwert anstrebt. Aber Vorsicht! Die formale Definition des Grenzwertes einer Folge von Zahlen verlangt, dass Näherungswerte beliebiger Güte nachgewiesen werden. Die effektive *Berechenbarkeit* des Grenzwertes, etwa im Sinne von Turing, ist damit nicht gegeben (vgl. [RIC]).

Die Schulmathematik bleibt meist auf sicherem Grund. Wenn eine konkrete Berechnung von Grenzwerten verlangt wird, so sichert die Absicht bei der Aufgabenstellung bereits, dass es eine Lösung gibt, die mit ‘richtig’ oder ‘falsch’ taxiert werden kann. Zudem wird der Infinitesimalrechnung (Calculus) aufgebaut, eine Erweiterung der Algebra, deren Zweck darin besteht, Grenzwertbestimmung im Sinne der analytischen Definition effektiv zu vermeiden und statt dessen formal exakte Antworten (zB. Ableitungen) im Sinne des Calculus allein mit endlichen Operationen zu finden.

3 Konstruierbare reelle Zahlen

Ein unumgänglicher Prototyp für eine Grenzwertberechnung und numerische Näherungen gehört zur Kreisgeometrie. Wir müssen wissen, wie gross die Fläche und der Umfang des Einheitskreises sind. Weil je zwei Kreise ähnlich sind, ermöglichen die beiden Antworten die Kreismessung allgemein – und mehr!

Die Einheitskreisfläche wird traditionell mit π bezeichnet. Aber der *Name* sagt noch nichts über den *Wert* dieser Zahl. Der Wert von π ist nur näherungsweise bekannt, allerdings auf eine riesige Zahl von Dezimalstellen. Ein mathematisch anerkannter Existenznachweis für π verlangt mehr: Jede Abweichung zwischen Näherung und Ideal muss sich durch weitere Verbesserung mindestens halbieren lassen.

Da π nicht nur irrational sondern sogar *transzendent* ist, schafft auch keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal die *Quadratur des Kreises*.

Bei den hochgenauen Computernäherungen steht nicht mehr der *Wert* von π im Fokus. Das Interesse gilt dann dem Berechnungsverfahren an sich oder der Hardware des verwendeten Rechners oder Eigenschaften des Ziffernstroms, der damit erzeugt wird. (vgl. [BOR]).

Obschon jede Dezimalstelle von π im Prinzip in endlicher Zeit berechenbar ist, bleiben viele Fragen über π offen, weil wir den Überblick über die Gesamtheit der nicht abbrechenden Kette von Ziffern nie gewinnen können. Andernfalls könnten wir mit einem einzigen Blick erkennen, dass die Zifferndarstellung von π nie periodisch wird. Tatsächlich sind aber die endlich vielen Bits, die wir je lesen können, immer ein Nichts im Vergleich zum ungelesenen Rest. In diesem Sinn taugt kein Algorithmus, der zur Eingabe n die n -te Ziffer von π berechnet, als Ersatz oder Definition für π . Der ganze (unendliche) Ziffernstrom, der zu π gehört, trägt mehr Information als die Abfrage einzelner Ziffern preisgeben kann. Zudem mag kein endliches Hirn die ganze Zifferndarstellung einer irrationalen Zahl fassen.

Angenommen, wir sammeln alle Aussagen, die konkrete reelle Zahlen deterministisch beschreiben. Diese Sammlung (in einer konkreten Sprache formuliert) lässt sich lexikographisch ordnen. Sie umfasst unser gesamtes Wissen über konkrete Vertreter der reellen Zahlen. Es können aber nur abzählbar viele sein. Sie umfassen alle algebraischen Zahlen und manche

transzendente wie e oder π . Nennen wir sie die *konstruierbaren reellen Zahlen* \mathbb{K} .

Denken wir uns in der Tradition der euklidischen Geometrie Zirkel und Lineal als theoretisches Werkzeug, das absolut exakte Antworten gibt, so lassen sich die arithmetischen Grundoperationen mit beliebigen Zahlen aus \mathbb{R} algorithmisch realisieren (vgl. [HIL]) und Abschnitt 5), wenn die Daten auf einer Zahlgeraden in der euklidischen Ebene gegeben sind. Die Menge \mathbb{K} bildet dann einen abzählbaren Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$.

Arithmetische Operationen lassen sich bloss in den endlichen Körpererweiterungen von \mathbb{Q} mit Hilfe der Operationen aus \mathbb{Z} algorithmisch realisieren. Arithmetische Operationen mit transzendenten Zahlen sind in der notwendigerweise unendlichen Zifferndarstellung algorithmisch nicht exakt ausführbar. Da der Körper \mathbb{K} abzählbar ist, unterscheidet er sich wesentlich von der überabzählbaren Menge \mathbb{R} , über die Cantor nachgedacht hat. Eine im Sinne der Mengenlehre typische reelle Zahl gehört also gerade *nicht* zu \mathbb{K} .

4 Typische reelle Zahlen bleiben anonym

Angenommen, wir wählen reelle Zahlen auf der Zahlgeraden, indem wir sie mit einem idealen Zirkel als einzelne Punkte auslesen. Dann können wir auf den gewählten Punkt als solchen verweisen. Wir sind aber prinzipiell unfähig, alle Punkte eines Einheitsintervalles zu zählen. Dazu müssten wir jeden mit dem Namen einer nur ihm zugeordneten natürlichen Zahl benennen. Das Ergebnis liefert eine abzählbare Auswahl reeller Zahlen. Cantor hat gezeigt, dass unter diesen Bedingungen immer eine reelle Zahl in der Liste fehlt.

Ist es angemessen, von einer Zufallsauswahl zu sprechen, wenn mit dem Zirkel eine namenlose Zahl angetippt wird? Schiebt hier sogar die Mathematik ihr Unwissen der Physik in die Schuhe? Ist die Redeweise ‘Zufallsauswahl’ eine Chiffre, die unser Unwissen tarnt?

Angenommen, ein Laplaceversuch erzeugt die Binärziffern 0 oder 1 einer Zahl. Jede Folge mit n Binärziffern tritt mit Wahrscheinlichkeit 2^{-n} auf und kodiert eine rationale Zahl im Einheitsintervall. Soll diese Folge aber explizit eine positive, reelle Zahl aus dem Einheitsintervall kodieren, müssen alle Binärziffern explizit angegeben sein. Eine abbrechende Folge mit mindestens einer Binärziffer 1 kodiert eine positive rationale Zahl. Ihre Ziffernfolge enthält somit genau eine letzte Ziffer 1. Die endliche Binärdarstellung soll nun auf eindeutige Art in die Binärdarstellung der reellen Zahlen eingefügt werden. Dazu wird die letzte 1 ersetzt durch eine 0 gefolgt von lauter Ziffern 1. Damit wurde die rationale Zahl ohne Veränderung ihres Wertes mit einer einheitlichen normierten Kodierung versehen.

Zur Fiktion der ‘fairen Münze’ gehört die Vorstellung, dass jede unendliche Bitfolge als Antwort möglich sei und dass alle diese Folgen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Allerdings ist diese Wahrscheinlichkeit gleich 0.

Bei jeder unendlichen Folge von Binärziffern, die positive reelle Zahlen im Einheitsintervall kodieren, können wir je nur endlich viele Bits konkret lesen. Damit lässt sich nicht mehr entscheiden, ob die Zahl rational sei, weil immer ein unendliches ungelesenes Reststück bleibt. Das notwendig und hinreichende Kriterium für rationale Zahlen sagt, dass in der Binärdarstellung ein unendliches Reststück auftreten muss, das ein periodisches Bitmuster zeigt.

Wie lassen sich die arithmetischen Operationen mit reellen Zahlen in diesem Rahmen definieren und verstehen? Gewiss nicht algorithmisch anhand der Zifferndarstellung. Folglich kann kein Computer mit typischen reellen Zahlen rechnen, auch kein Computer-Algebra-System, obwohl es mit gewissen algebraischen Zahlen oder mit Symbolen für reelle Konstanten wie π oder mit Variablen, die wir uns als reelle Zahlen denken müssen, formal exakt umzugehen versteht.

Wer kennt nicht die Redeweise ‘*Sei x eine reelle Zahl*’? Hier steht das Symbol x stellvertretend für eine beliebige wählbare Zahl mit gewissen Eigenschaften. Was bezeichnet das generische Zahlsymbol x aber genau? Es ist offen für jede mögliche reelle Zahl unserer Wahl. Wie aber können wir eine derartige Zahl *wählen*? Gehört diese Zahl zur abzählbaren Liste der in endlich vielen Worten definierbaren reellen Zahlen? Sie tut es dann, wenn wir nach deterministischem Rezept eine Wahl treffen könnten. Offenbar setzt die Idee einer *beliebigen* reellen Zahl die Idee einer nicht spezifizierbaren Vorgehensweise voraus. Müssen wir uns auf ein fiktives Orakel berufen, das auch die anonymen Zahlen ausgibt? Wäre das vielleicht ein perfekter nichtdeterministischer Generator von reellen Zufallszahlen? Wie viel Zufall steckt in unserem Denken? Können wir wirklich etwas rein *Zufälliges* denken? Ist es berechtigt, von der virtuellen Realität einer derart unspezifizierbaren reellen Zahl zu sprechen? Wir erwarten ja, dass der Zufall jedes Exemplar mit gleicher Wahrscheinlichkeit trifft. Dann aber muss diese Wahrscheinlichkeit 0 sein. Das gilt sogar für jede abzählbare Teilmenge von \mathbb{R} . Insbesondere wird auch die ganze Menge \mathbb{K} der *konstruierbaren reellen Zahlen* nur mit Wahrscheinlichkeit 0 zufällig getroffen. Ist das ein Paradox? Oder ist es ein Beweis, dass die Gesamtheit aller reellen Zahlen nicht abzählbar sein kann?

5 Folgerungen für den Unterricht

Wen erstaunt es, dass die Idee der reellen Zahl schwierig zu begreifen ist? In Dezimaldarstellung sind die arithmetischen Operationen mit reellen Zahlen keine endlichen Prozesse mehr.

Die *Körperoperationen* in \mathbb{R} und Quadratwurzeln aus positiven Zahlen lassen sich durch *endliche geometrische Operationen mit idealen Werkzeugen* nachbilden. Die Idealisierung, welche in der Zifferndarstellung zu unendlich vielen Ziffern führt, bedingt in der geometrischen Verwirklichung der Rechenoperationen die Verwendung von idealisierten, unendlich genauen Werkzeugen. Auch dies ist ein praktisch unerreichbares Ideal. Aber wir sind es gewohnt, denn es ist eine Konvention aus der klassischen Geometrie.

Alle arithmetischen Operationen von \mathbb{R} lassen sich in einer affinen Ebene als endliche Konstruktionen mit den idealisierten Werkzeugen Zirkel und Lineal ausführen. Es ist noch nötig, zwei Punkte $0 \neq 1$ vorzugeben, um die Zahlgerade festzulegen. Multiplikation und Division werden von den Strahlensätzen vermittelt. Das ist Grund genug, die Strahlensätze zu beweisen und zu behandeln. Der Satz von Pappus-Pascal aus der projektiven Geometrie impliziert, dass die geometrische Realisierung der arithmetischen Operationen die Körperaxiome erfüllt. Eine Konstruktion von \sqrt{p} zu gegebenem $p > 0$ benutzt den Höhensatz. (vgl. [HIL])

Es gibt noch einen weiteren Ausweg, um die anonymen Zahlen zu erfassen und dabei bloss über \mathbb{Q} oder \mathbb{K} zu sprechen: An Stelle von Operationen, die auf einzelne Zahlen wirken, können wir Operationen auf Teilmengen in \mathbb{R} betrachten, zum Beispiel Operationen mit Intervallen $[a, b]$ mit rationalen Grenzen. Stetige Operationen mit Intervallen entsprechen der Vorstellung vom Arbeiten in einem Kontinuum besser als Operationen mit einzelnen Zahlen, die eher zu diskreten Strukturen passen. Ein Schritt über die rationalen Zahlen hinaus wird dann durch eine *Intervallarithmetik* vollzogen. Praktisch müssen die Intervallgrenzen konkret bestimmbare Zahlen sein, aber jedes Intervall nimmt auch die namenlosen typischen Vertreter von \mathbb{R} mit, ohne sie explizit anzusprechen. Dieser Schritt ist zwar nicht einfach, aber er leistet einen nützlichen Brückenschlag von der Analysis zu einer robusten Numerik.

Keinesfalls darf eine Behandlung der *Gleitkommazahlen* oder des *Datentyps* real als Computerimitation von \mathbb{R} fehlen. Die Diskrepanz zwischen dem mathematischen Idealbild eines *Kontinuums* \mathbb{R} und dem Ersatz durch *endlich viele Gleitkommazahlen* auf einem endlichen

Automaten muss bewusst gemacht werden. Sie ist der wahre Grund für manche Unterschiede zwischen der theoretischen Analysis und der Numerik, etwa der Rundungsfehler oder von overflow und underflow.

Jede experimentell gemessene Zahl ist ein rationales Vielfaches einer Einheit. Irrationale Zahlen als Ergebnis einer Messung sind eine Fiktion. Viele Messgeräte benutzen Mikroprozessoren und digitale Speicher, die Rohdaten sind Binärzahlen mit einer begrenzten Zahl von Bits. Zudem werden Rohdaten im Computer statistisch bearbeitet, geglättet oder gefiltert. Es wird versucht, ein einfacheres ‘Signal’ von einem komplizierten ‘Rauschen’ zu trennen. Die Ergebnisse sind immer Gleitkommazahlen vom Typ *real* und damit keine typischen Vertreter von \mathbb{R} .

Die Tatsache, dass reelle Zahlen denkbar aber mit unseren Messinstrumenten nicht beobachtbar sind, ist bedeutsam für alle, die Mathematik anwenden oder über das Verhältnis von Theorie und Erfahrung nachdenken werden. Manche Denker stellen alles Erfahrbare als Schatten einer bloss denkbaren Idealwelt dar. Die Idealisierung soll der Mathematik und dem logischen Denken den Boden ebnen. Daher ist sie viel einfacher zu denken als die bruchstückhafte und widersprüchliche Wirklichkeit, der wir in unseren Sinneserfahrungen und Messungen begegnen. Das Verhältnis zwischen diesen beiden Weltansichten spiegelt sich einerseits in den idealen Eigenschaften von \mathbb{R} aus der Welt der Mathematik und andererseits in der Rechenpraxis mit den *real*-Zahlen, die unsere Messinstrumente und Computer ausgeben. Diese beiden gegensätzlichen Standpunkte erzeugen Spannungen wie zwischen ‘Himmel’ und ‘Hölle’. Die beiden Lager lassen sich blenden durch Vorurteile. Die einen klagen über eine weltfremde Mathematik, die andern bedauern eine hochkomplexe Realität, der keine Theorie beikommt.

Es ist aus didaktischen Erwägungen angemessen, verschiedene Aspekte der reellen Zahlen in verschiedenen Modellen auszudrücken. Der Reichtum, der die Struktur \mathbb{R} auszeichnet, erfordert auch in der Elementarmathematik Anspielungen und erste Erfahrungen mit Ideen und Begriffen aus Algebra, Geometrie, Stochastik, Logik und Grundlagen der Mathematik, auch wenn konkrete Bezüge oft nur angetönt, erst provisorisch, vereinfacht und in groben Linien skizziert werden können!

Vergessen wir beim Unterrichten die Numerik und die Anwendungen nicht. Sie sind notwendig, damit Mathematik mehr als eine heile Welt aufbaut, die ausschliesslich Insidern zugänglich ist. Analysis, die sich in Kurvendiskussionen und Ableitungsregeln erschöpft, ist kein brauchbares Fundament und kein lohnendes Ziel! Newton hat die Analysis gebraucht, um die Himmelsmechanik besser zu verstehen, als es vor ihm je möglich war.

Eine Einführung in die Analysis entlang der geschichtlichen Entwicklung [SIM, TOE, H+W] gestattet auch, Bekanntschaft zu machen mit den Entdeckern. Sie haben mit Intuition bemerkenswerte Einsichten gefunden und Ideen zur Analysis entwickelt. Eine deduktive Darstellung der Analysis mit Logik und Mengenlehre als Grundlage erscheint erst im 20. Jahrhundert. Sie beschreibt einen Endzustand in einem kollektiven Lernprozesses von mehr als 2000 Jahren Dauer aus der Perspektive einer logisch strukturierten und zum Archivieren aufbereiteten Mathematik. Entsprechend sind diese Ergebnisse für Spezialisten gedacht und erst zugänglich nach einer didaktisch konzipierten Vorbereitung, die auf Schwierigkeiten bei der Begriffsbildung angemessen eingeht, motiviert und typische Anwendungen der Analysis exemplarisch behandelt.

Literatur

- [BLU] L. Blum, *Computing over the Reals: Where Turing meets Newton*, Notices AMS, Vol. 51, No. 4, 2004.
- [BOR] J. Borwein, *The World of PI*, www.pi314.net [visited 7.6.2014]
- [HIL] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart, 1972, ISBN 3-519-12020-8
- [H+W] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer Verlag, UTM, Readings in Mathematics, New York, Berlin, 2000, ISBN 0-387-94551-4
- [RIC] D. Richardson, *Some unsolvable problems involving elementary functions of a real variable*. Journal of Symbolic Logic 33 (4), pp. 514 -520.
- [SIM] G.R. Simmons, *Calculus Gems*, McGraw-Hill, New York, 1992, ISBN 0-07-057566-5
- [TOE] O. Toeplitz, *The Calculus, A Genetic Approach*, The University of Chicago Press, Chicago, 2007, ISBN-13 978-0-226-80668-6