Rational schätzen

H.R. Schneebeli, `schneebe@othello.ch`

7. März 2018

Zusammenfassung

Gewisse Fragen lassen sich grob beantworten aufgrund von Erfahrung, Sachverstand, Einfühlung oder Intuition. Oft beinhaltet die Antwort auch eine rudimentäre Modellbildung mit wenigen oder ungenauen Daten und einer einfachen Rechnung. Eine solche Antwort ist eine *rationale Schätzung*, im englischen Sprachraum würde von einem *'educated guess'* gesprochen.

Etliche Beispiele von Schätzungen haben als sogenannte *Fermiaufgaben* (nach Enrico Fermi) Kultstatus erlangt. Fermi fand seine Antworten, indem er den Kern der Sache, den Haupteffekt herausarbeitete. Eine Einsicht oder eine gute Idee führte nach kurzer Rechnung auf eine brauchbare Näherung als Antwort. Die Einsicht oder die gute Idee ist unverzichtbar. Wer nicht so gut rechnen kann wie Fermi, darf auch mal einen Taschenrechner benutzen. Unsere Beispiele zeigen daher gelegentlich verschiedene Antworten, die von den verfügbaren Mitteln und den benutzten Kenntnissen beeinflusst sein können.

Rationale Schätzungen beinhalten vereinfachte Modellbildung. Sachverstand und vertiefte Einsichten sind notwendig, um den Kern der Sache, das Wesentliche, zu erkennen. In der Regel sind die Antworten bloss erste Näherungen, was kaum überrascht, wenn Theorien und Berechnungen stark vereinfacht werden. Eine rationale Schätzung gilt als gelungen, wenn die Antwort die richtige Grössenordung trifft und sachlich begründet ist. Die Gefahr naiver Fehlschätzungen bleibt.

Einführende Beispiele zeigen, wie Schätzungen zustande kommen und wozu sie gut sein können. Aufgaben und kommentierte Lösungen ergänzen den Text. Insbesondere werden auch Grenzen gezeigt.

Voraussetzungen Elementare Algebra, Rechnen mit Potenzen, Näherungsformeln, Taschenrechner, Grundkenntnisse aus Sachbereichen, speziell elementare Physik.

Ziele Modellbildung mit Näherungen und elementaren mathematischen Methoden. Anwendungen elementarer Mathematik und von Grundprinzipien aus der Physik (zB Erhaltungssätze). Plausibilitätstests mit einfachen Mitteln üben. Modelle und deren Konsequenzen beurteilen. Modelle mit unvollständigen Daten und mit Plausibilitätsargumenten handhaben.

1 Zwei Beispiele

Die folgenden Beispiele sind klassischen Fermiproblemen nachempfunden. Die Fragen werden mehrfach beantwortet, je mit verschiedenen Annahmen. Ein Vergleich verschiedener Methoden bietet Kontrollmöglichkeiten und zeigt möglicherweise die mit der Schätzung verbundene Unsicherheit auf.

Wie beim klassischen Problemlösen gehört eine *Analyse* der Aufgabe und die Beschaffung der nötigen Daten zur Lösung. Oft muss *mit unvollständigen Daten* gearbeitet werden. Fehlende Daten werden durch plausible Erfahrungswerte oder anhand von Analogien geschätzt.

1.1 Wie viele Zahnärzte gibt es in der Schweiz?

Die Standesorganisation der Schweizer Zahnärzte SSO veröffentlicht jährlich die Zahl der in der Schweiz in eigenständigen Zahnarztpraxen tätigen Zahnärtze, Männer und Frauen. Es waren im Dezember 2011 deren 4109, gezählt ohne angestellte Assistenten. Die Zahl beruht auf Umfragen. Die Antwort zeigt, dass die SSO den Begriff 'Zahnarzt' für die Zählung definiert. Die Zahl ist sicher kleiner als die Anzahl der ausgebildeten und zahnmedizinisch tätigen Personen in der Schweiz. Die Angabe 4109 gleicht einer flüchtigen Momentaufnahme. Schon wird sich die Zahl wieder verändert haben, nur die Grössenordnung bleibt als Information länger gültig. Für viele Fragen ist die Genauigkeit der SSO-Angabe illusorisch oder irrelevant.

Mit der Zahl 4109 ist keine besondere Einsicht verbunden. Wer die sozioökonomischen Verhältnisse berücksichtigt, kann die Zahl der Zahnärzte eines *beliebigen* Landes abschätzen. Alle folgenden Überlegungen benutzen je einen triftigen Grund, der die Zahl der Zahnärzte in einer gegebenen Bevölkerung begrenzt.

Ökonomische Begrenzungen Ich *schätze,* dass ein Zahnarzt rund 1/3 seines Umsatzes als Einkommen bezieht und dass dieses im schweizerischen Mittel bei etwa $2 \cdot 10^5$ CHF liegt. Also ist der Totalumsatz bei Z Zahnärzten $T \approx 6 \cdot 10^5 \cdot Z$. Ich *schätze* einen mittleren Jahresaufwand an Zahnarztkosten pro Kopf der Bevölkerung auf rund 300 CHF, allfällige Versicherungsanteile eingerechnet. Somit ist auch $T \approx 8 \cdot 10^6 \cdot 300 = 2.4 \cdot 10^9$. Es folgt $Z \approx 2.4/6 \cdot 10^4 = 4000$.

Diese Berechnung von Z hängt unmittelbar von den geschätzten mittleren Zahnarztkosten pro Person in der Wohnbevölkerung ab. Besser wäre eine Intervallschätzung, zum Beispiel 200 bis 400 CHF. Damit lässt sich ein Intervall angeben, in dem wir Z vermuten: $2700 \leq Z \leq 5300$

Begrenzung der Arbeitszeit Angenommen, im Durchschnitt beansprucht jede Person, die in einem Land wohnt, den Zahnarzt eine Stunde pro Jahr. Falls nun ein Zahnarzt in 50 Wochen je im Mittel 30 bis 35 Stunden mit der ärztlichen Behandlung beschäftigt ist, so ergibt sich folgende Abschätzung $1500 \cdot Z_1 \leq 8 \cdot \cdot 10^6 \leq 1750 \cdot Z_2$, also etwa $4500 \leq Z \leq 5300$.

Ausbildung und Verweildauer im System Pro Jahr verlassen rund 150 bis 250 ausgebildete Zahnärzte im Alter von etwa 27 Jahren die Hochschulen. Die meisten werden einige Jahre Assistenzzeit in einer Praxis beginnen. Etliche davon sind Frauen, die irgendwann Teilzeit arbeiten werden. Weitere wandern fertig ausgebildet in das attraktive Hochlohnland ein. Bei einer geschätzten mittleren Verweildauer im Beruf von 20 bis 25 Jahren ergibt sich eine Gesamtzahl von aktiven Zahnärzten zwischen 3000 und 6300. Die Spanne ist gross. Der Zentralwert liegt bei $\bar{Z} \approx 4650$.

Bemerkungen

1. Mehr als Plausibilität ist von Schätzungen nicht zu erwarten. Intervallschätzungen sind sinnvoll, weil sie eine Aussage zur Unsicherheit enthalten.

2. *Zusatzfragen:*

   2.1 Wie viele Zahnärzte gibt es in Deutschland mit 81.8 Millionen Bewohnern (2012)?

   2.2 Wie viele Zahnärzte gibt es auf der ganzen Welt mit rund 7.1 Milliarden Bewohnern (2012)?

Antworten: Mit Dreisatzrechnung findet man für Deutschland die Schätzung $42000 \leq Z \leq 50000$ und für die ganze Welt etwa $36 \cdot 10^6 \ldots 45 \cdot 10^6$. Die Zahlen für Deutschland sind plausibel, weil in Deutschland ähnliche sozio-ökonomische Verhältnisse gelten wie in der Schweiz. Die Zahlen für die ganze Welt sind reine Spekulation. Vermutlich ist die Schätzung zu gross, weil die beim Schätzen benötigten Sachverhalte implizit von Europa auf die ganze Welt übertragen wurden.

1.2 Sonnenenergie

1. Wieviel Energie erzeugt die Sonne pro Sekunde?

2. Wieviel Energie strömt pro Sekunde von der Sonne auf die Erde?

Analyse Wir nehmen vereinfachend an, dass

- die Sonne die Strahlung in alle Richtungen gleich verteilt und zeitlich konstant abgibt.

- kein Licht im Raum zwischen der Sonne und der Erde absorbiert wird.

- die Erde eine Kreisbahn mit Radius $a = 1.5 \cdot 10^{11}$ m um die Sonne beschreibt.

Im Abstand a von der Sonne wurde die Strahlungsleistung der Sonne auf einer Testfläche von einem Quadratmeter gemessen. Sie ist bis auf etwa 1% konstant und hat die Grösse $S = 1.366$ kWm^{-2} (Solarkonstante). Die Kugel mit Radius a um den Sonnenmittelpunkt fängt alle auf der Sonne erzeugte Energie auf. Ihre Oberfläche F_a empfängt die Energiemenge $E_{\text{tot}} = S \cdot F_a$. Weil die Solarstrahlung als konstant angenommen wurde, spielt nicht einmal die Laufzeit des Lichtes eine Rolle.

Wenn r den Erdradius bezeichnet und Q_r die Querschnittsfläche der Erde, so trifft jede Sekunde die Energiemenge $E = S \cdot Q_r$ auf die Erde. Wir verwenden den gerundeten Wert $r \approx 6.4 \cdot 10^6$ m.

Berechnungen Die Berechnungsformeln lassen sich sofort mit jedem Taschenrechner auswerten, sobald die numerischen Werte aller Modellparameter bekannt sind.

1. $E_{\text{tot}} = 1.366 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot a^2 \approx 3.86 \cdot 10^{26}$ W

2. $E = 1.366 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot r^2 \approx 1.76 \cdot 10^{17}$W

Es ist interessant, die Strahlungsleistung durch das Massenäquivalent auszudrücken. Die Sonne strahlt jede Sekunde elektromagnetische Strahlung mit einer Masse von etwa $4.3 \cdot 10^9$ kg ab. Das ist ein winziger Anteil von $2 \cdot 10^{-21}$, der gesamten Sonnenmasse.

Ein Plausibilitätstest: Angenommen, die Sonne strahlt mit konstanter Leistung seit ihrer Entstehung vor rund 5 Milliarden Jahren. Welcher Anteil der Gesamtmasse wurde dann schon abgestrahlt? Es sind rund $3 \cdot 10^{-4}$. Das scheint hinreichend wenig zu sein, aber in der Antwort stecken keine tiefen Kenntnisse der Kernphysik oder der Sonnendynamik, sondern bloss eine billige Annahme, die uns befähigt hat, eine Antwort durch einfache Division abzuschätzen. Menschliche Erfahrung vermag eine solche Extrapolation nicht abzudecken. Es darf auch einfache Dinge geben, die wir nicht wissen und nicht prüfen können.

Die Erde fängt aus dem Strom der Sonnenenergie jede Sekunde 1.96 kg auf. Das Energieäquivalent der auf der Erde jede Sekunde eintreffenden Sonnenenergie lässt sich drastisch damit vergleichen, dass jede Sekunde soviel Energie von der Sonne auf die Erde gestrahlt wird, wie sie in der Explosion von etwa 2000 Hiroshimabomben freigesetzt würde.

2 Schätzen, Sinn und Unsinn

Eine Schätzung ist gelungen, wenn *als Antwort eine Einsicht, nicht bloss Zahlen* gefunden wurde. Es stimmt, dass traditionell bei Schätzungen höchstens Papier und Bleistift, oft aber nur Kopfrechnen als zweckmässig anerkannt waren. Durch die überall billig verfügbare Rechenleistung wird das dogmatische Festhalten am Kopfrechnen bei Schätzungen mehr und mehr zu einem Anachronismus. Dieser würde zudem verhindern, dass an heutigen Schulen, wo die Fähigkeit zum fixen und sicheren Kopfrechnen eher selten anzutreffen ist, der Einstieg ins Modellieren durch Schätzen definitiv verbaut wäre. Das wollen wir aber nicht zulassen. Kopfrechnen soll angestrebt werden, wenn damit eine vertiefte Einsicht einhergeht. Die Verwendung eines Rechners darf anderseits kein Grund sein für schlecht durchdachte und unnötig komplizierte Modelle. Dank einem Rechner entfällt die Notwendigkeit mit Rücksicht auf die Rechenlast die Modelle sehr einfach zu halten oder vorhandene numerische Daten durch Runden zu vereinfachen oder gar nicht zu berücksichtigen.

Die entscheidende Fragen lauten:

- Woher stammen die Daten? Wie zuverlässig, wie genau, wie vollständig sind sie?
- Welche Vereinfachungen stecken in der benutzten Idee zur Berechnung (Modellbildung)?
- Wie lässt sich die Güte der Schätzung selbst beurteilen? [Intervallschätzungen]
- Welche *Einsichten* lassen sich *trotz den Vereinfachnungen* mit Sicherheit gewinnen?

Wenn wir die Daten mit dem Smartphone vom Internet beziehen und die Antwort der Schätzung ebenso gut dort nachfragen könnten, so macht der Verzicht auf Hilfsmittel zum Berechnen keinen Sinn. Wesentlich ist aber, dass die Modellbildung so einfach gemacht ist, dass eine sinnvoll angenäherte oder vereinfachte Berechnung mit allgemein zugänglichen Hilfsmitteln möglich ist.

Klar ist auch, dass es viele Fragen gibt, deren Antwort sich nicht abschätzen lässt, sogar dann nicht, wenn wir grosse Rechenmacht zulassen würden. Es ist also eher ein glücklicher Umstand, wenn eine Schätzung gelingt und Einsichten vermitteln kann. Oft werden beim Schätzen Vereinfachungen vorgenommen. Zum Beispiel werden schwach veränderliche Grössen durch Konstante ersetzt, kleine Grössen werden vernachlässigt. Linearität, Symmetrien oder Erhaltungssätze werden angenommen, obwohl sie nicht exakt gelten, aber für Abschätzungen bequem sind. Wir wissen aber, dass die Erwartung, kleine Wirkungen würden kleine Effekte erzeugen, nur in Ausnahmefällen gilt. Der Schmetterlingseffekt aus der nichtlinearen Dynmaik zeigt, dass die Vernachlässigung kleiner Effekte zu enormen Fehleinschätzungen führen kann.

Umgekehrt lässt sich feststellen, dass Schätzaufgaben eine besondere Art von Problemen darstellen, die sich so vereinfachen lassen, dass ganz wenige Haupteffekte das wesentliche Verhalten steuern und die Antwort dominieren. In der Kategorie der Schätzaufgaben gibt es genug interessante und zugleich einfachere Fragen, dass diese didaktisch nutzbar sind. Schätzaufgaben sollen nicht zur Hoffnung verführen, dass

Viele 'Milchmädchenrechnungen' begnügen sich mit elementarsten Rechenverfahren. Aber sie verzichten auf eine Analyse der Fragen oder auf Einsichten und erzeugen in naivem Gebrauch abseits des ursprünglichen Zweckes Glückstreffer oder Unsinn.

Kopfrechnen ist automatisierbar geworden. Modellbilden und einsichtiges Schätzen ist es nicht. In manche Schätzungen gehen semantische Informationen wesentlich ein. Schätzen lässt sich damit nicht auf Kopfrechnen reduzieren. Der sachliche Kontext ist wesentlich. Anwenderkenntnisse oder einschlägige Erfahrung sind unverzichtbar.

3 Aufgaben

1. Die Orte A und B sind durch eine 100 Kilometer lange Eisenbahnlinie verbunden. Um welche Strecke verändert sich der Schienenweg zwischen einer kalten Winternacht mit -30 C und einem Sommertag, wo die Schienentemperatur 70 C erreicht? Welche der Antworten passt am besten?
   0.1 m   1 m   10 m   50 m   60m   100 m   1000 m?

2. Die Ozeane bedecken 71% der Erdoberfläche. Die mittlere Tiefe der Ozeane ist rund 3700 m.

   2.1 Wenn die Temperatur des gesamten Wassers in den Ozeanen um 1 C zunimmt, so dehnt es sich aus und bewirkt eine Veränderung des Meeresspiegels um h Zentimeter. Welche der folgenden Antworten kommt der Wahrheit am nächsten?
   1 cm   5 cm   25 cm   50 cm   75 cm   100 cm?

   2.2 Welche Energiemenge ist nötig, um alles Meerwasser um 1 C zu erwärmen?

3. Wie gross ist der mittlere Abstand 'benachbarter' Teilchen in einem Gas unter Standardbedingungen?

   Um welchen Faktor wird der mittlere Abstand verkürzt, wenn das Gas kondensiert?

4. Wie gross ist die Masse der Lufthülle der Erde?

5. Wie gross ist die kinetische Energie der durch Luftströmungen bewegten Erdatmosphäre?

6. Wie gross ist das Massenäquivalent, der von einem Kraftwerk der 1 GW-Klasse pro Tag erzeugten elektrischen Energie? Wie viel thermische Energie wurde bei der Produktion mindestens umgesetzt, wenn das Kraftwerk durch Gasturbinen oder Dampfturbinen angetrieben wird?

7. Lasermessungen zeigen, dass sich der Mond pro Jahr um etwa 4 cm vom Erdmittelpunkt entfernt. Die dazu benötigte Energie wird der Erdrotation entzogen.

   7.1 Wieviel Energie wird pro Jahr und wie viel pro Sekunde von der Erdrotation auf den Mond übertragen?

   7.2 Angenommen, die Vergrösserung der Mondentfernung ist langfristig konstant. Ist diese Annahme verträglich mit einem Erdalter von rund 5 Milliarden Jahren? Warum ist die Annahme nicht sachgerecht?

8. An manchen Sommertagen erwärmt die Sonne den Boden und die Luft. Wasserdampf steigt mit der erwärmten Luft auf. Es bildet sich eine Gewitterwolke, die gegen Abend sich entlädt und ausregnet. Die grosse Gewitterwolke erstreckt sich auf einem Gebiet von $F = 10 \times 10$ km^2 in einer Höhe von 2000 m bis 10000 m über Grund. Aus der Wolke fallen im Mittel auf die Fläche F verteilt

   8.1 10 Liter Regen pro Quadratmeter

   8.2 20 Liter Niederschlag, Regen und Hagel

   Wieviel Energie wird beim Gewitter mindestens freigesetzt?

9. Jeder Mensch hat zwei verschiedene unmittelbare Vorfahren, Vater und Mutter. Wir betrachten alle Vorfahren eines einzelnen Menschen, der heute lebt? Dazu gehören zwei Eltern, vier Grosseltern, ... Wie viele seiner Ahnen haben vor 2000 Jahren gelebt?

10. **Eine Fallstudie: Durchhang der Kabel bei einer Hochspannungsleitung.** Bei Hochspannungsleitungen werden Aluminiumkabel zum Transport elektrischer Energie eingesetzt. Diese Kabel werden auf Stahlmasten aufgehängt. Im einfachsten Fall durchquert die Leitung eine Ebene. Angenommen, der Abstand von einem Mast zum nächsten sei a, die Kabellänge zwischen den Masten sei $k > a$. Es sind folgende Fragen zu klären

    10.1 Wie gross ist der Durchhang Δh der Kabel zwischen den Masten?

    10.2 Zwischen welchen Werten verändert sich der Durchhang als Folge der Wärmeausdehnung der Kabel im Temperaturbereich zwischen -30 und $+70$ Celsius?

    10.3 Angenommen $a = 500$ Meter und und das Kabel wird bei 20 C so gespannt, dass seine Länge $k = 501$ m beträgt. Im ganzen Temperaturbereich muss der tiefste Punkt des durchhängenden Kabels mindestens 15 m vom Boden entfernt sein. Welche Masthöhe ist unter diesen Bedingungen notwendig?

    10.4 Lohnt es sich, den Abstand a der Masten auf 1000 Meter zu verdoppeln? Begründen Sie die Antwort nach rationalen Kriterien.

    Daten: Wärmeausdehungskoeffizient für Aluminium: $\lambda = 2.4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}^{-1}$

4 Kommentierte Lösungen

Berechnungen werden in der Regel in SI-Einheiten ausgeführt. Ausnahmen werden mit den Daten mitgeteilt. Masseinheiten werden nur in den Daten und den Ergebnissen genannt.

Da die meisten Aufgaben offen gestellt sind, sollen die unten mitgeteilten 'Lösungen' *begründbare Diskussionsvorschläge* bleiben. In jedem Falle wird eine Minimalvariante skizziert. Je nach dem Kenntnisstand der Schüler müssen die Vorschläge flexibel und mit Augenmass angewendet werden. Es sind sicher keine Normen für Musterlösungen oder Leitungsbeurteilungen. Freuen sie sich, wenn in Ihren Klassen noch andere Ideen zu erfolgreichen Schätzungen führen. Die Begründungen sind oft wichtiger, aufschlussreicher und interessanter als die numerischen Ergebnisse.

1. Die Länge eines Eisenstabes ist temperaturabhängig. Für jede Temperaturzunahme um 1 C nimmt die Länge L eines Eisenstabes um rund $10^{-5}L$ [Tabellenwert] zu. Bei 100 C Temperaturzunahme und 10^5 m Länge beträgt die Zunahme rund 100 m.

    Bemerkung Diese durch Temperaturschwankungen verursachten Längenveränderungen könnte zu starken Verwerfungen der Geleise führen. Sie müssen durch technische Massnahmen aufgefangen werden.

2. 2.1 Daten für die Abschätzung [Tabellenwerte, Google]: Erdradius $r = 6.38 \cdot 10^6$ m. Das Meer bedeckt 71% der Erdoberfläche bei einer mittleren Tiefe von $h \approx 3700$ m. Pro Kelvin Temperaturzunahme erfolgt eine Volumenausdehnung von V auf $(1 + \gamma) \cdot V \approx 1.000206 \cdot V$

Frage: Ist die Volumenausdehnung oder eine fiktive Längenausdehnung relevant? Der Längenausdehnungskoeffizient α lässt sich formal aus γ durch $\alpha \approx \gamma/3$ erhalten.

Modelle, die zeigen, wie die Wassertemperatur die Höhe des Meeresspiegels beeinflusst, gehen in der Regel davon aus, dass das Ozeanwasser in einem Kasten eingesperrt ist, dessen Wände senkrecht stehen und dessen Wassermasse von der Wassertemperatur unabhängig ist. Die Pegelerhöhung wird dann bei konstanter Grundfläche F alleine auf die Höhe abgewälzt: $\Delta h \approx \gamma \cdot V/F = \gamma \cdot h$. Die Küstenlinie ist jedoch nicht ein mathematisch exakt definiertes Objekt. Das Modell könnte also die von der Erwärmung verursachte Pegelveränderung überschätzen. Wenn die Ausdehnung in alle Richtungen möglich ist, reduziert sich die Pegelerhöhung auf $\Delta h \approx \alpha \cdot h = \gamma \cdot h/3$. Jederman weiss, dass die Pegelerhöhung gerade darum problematisch ist, weil die Ozeane nicht in einem Kasten eigesperrt sind. Eine sinnvolle Antwort ist $3700 \cdot \alpha \approx 0.25$ m $\leq \Delta h \leq \gamma \cdot 3700 \approx 0.75$ m.

Bemerkungen

- Die rechnerischen Ungenauigkeiten sind viel geringer als die Unsicherheiten über die zu verwendenden Modellannahmen. Die durchgehende Temperaturerhöhung des gesamten Ozeanwassers um 1 C lässt sich wohl nur im Mittel erreichen. Die Tiefenwasser grösster Dichte bei 4 C dürften wenig betroffen sein, die Oberflächenwasser hingegen deutlich.
- Der im Modell verwendete Volumenausdehnungskoeffizient ist eine lineare Näherung und gilt für Temperaturen um 20 C. Bekanntlich hat Wasser die maximale Dichte bei etwa 4 C. Daher kann das Modell für die Volumenausdehnung im betrachteten Bereich nicht als linear angenommen werden. Bei geringer Erwärmung zieht sich Wasser im Temperaturbereich zwischen 0 C und 4 C zusammen (*Dichteanomalie*). Wir erwarten, dass grosse Bereiche des Tiefseewassers Temperaturen um 4 C aufweisen. Eine Temperaturerhöhung um 1 C würde das Volumen dieses Wassers kaum verändern.
- Die ganze Atmosphäre müsste erwärmt werden mit möglichen globalen Auswirkungen auf Verdunstung, Niederschläge, Bewölkung und auf die im Festlandeis gebundenen Wassermengen. Die Annahme, dass die im Ozean vorhandene Wassermenge bei veränderlicher Temperatur der Atmosphäre konstant bleibt, ist nicht haltbar.

2.2 Das Volumen der Ozeane ist etwa

$$V \approx 0.71 \cdot 4\pi \cdot 3700 \cdot 63800000^2 \approx 1.34 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$$

Die Wärmekapazität von Wasser ist $\kappa \approx 4.2 \cdot 10^3$ J kg^{-1} K^{-1}. Folglich benötigt die gleichmässige Erwärmung der Ozeane um 1 K (bzw 1 C) $E = \kappa \cdot V \approx 5.6 \cdot 10^{21}$ J oder in Massenäquivalent ausgedrückt $E \approx 6 \cdot 10^4$ kg. Es ist nicht einfach, sich diese Energiemenge vorzustellen. Die gesamte Sonnenenergie, die in rund 9 Stunden auf die Erde strömt, ist etwa von derselben Grössenordnung. Für die Erwärmung der Meere zählt aber ein weit geringerer Teil der Sonnenenergie. Die Erde sendet ja einen Teil der Wärmeenergie als langwellige Strahlung wieder aus. Wird diese Ausstrahlung verringert (Treibhauseffekt), so wird ein neues Temperaturgleichgewicht zwischen Landmassen, Ozeanen und Atmosphäre eingestellt. Die damit verbundenen komplexen Vorgänge lassen sich nicht mit einfachen Modellen nachbilden.

Schätzungen finden in der Komplexität der Natur bald ihre Grenzen. Die Tatsache, dass wir etwas rechnen können, heisst noch lange nicht, dass wir gültige Einsichten gewinnen. Auf viele Fragen wird die Natur erst in Zukunft selbst antworten.

Lineare Modelle sind Abschätzungen oft zugänglich, nichtlineare oder andere komplexe Systeme entziehen sich der Methode der Schätzung, wenn es keine brauchbaren Näherungen gibt.

3. Die Bewegung der Teilchen in einem Gas nach der kinetischen Gastheorie wird ersetzt durch eine statische Anordnung der Teilchen in einem für die Berechnung günstigen Gitter, das die gleiche Dichte aufweisen würde wie das Gas.

   Vereinfachung Wir denken uns die Teilchen des Gases in einer Momentaufnahme in einem Würfelgitter angeordnet. Unter Standardbedingungen wird das Volumen von $V = 22.4$ Liter pro mol besetz. Nach Avogadro beträgt im Molvolumen V die Zahl der Moleküle $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$.

   Berechnungen $a :=$Kantenlänge des Würfels mit Volumen V. Anzahl Teilchen auf a ist $n := N_A^{1/3}$. Kantenlänge des mikroskopischen Würfelgitters $k := a/n \approx 3.3$ nm.

   Kritik Diese Zahl ist als ‘Mittelwert unter Nachbarn’ zu gering. Von jedem inneren Punkt P des Gitters gehen 6 Kanten der Länge k, 12 Verbindungen der Länge $\sqrt{2}\cdot k$ und 8 Verbindungen der Länge $\sqrt{3} \cdot k$ zu Teilchen in Gitterwürfeln, von denen P eine Ecke ist. Das Mittel über diese 26 Streckenlängen ist $\bar{k} \approx 1.42 \cdot k \approx 5$ nm. Diese Korrektur verändert die Grössenordnung der Antwort k *nicht*. Rückblickend ist sie für eine grobe Abschätzung nicht gerechtfertigt.

   Flüssigkeit und Gas: 1 mol Wasser belegt ein Volumen von $W = 18$ cm^3. Wir wählen Wasser als Vertreter der Flüssigkeiten, weil seine Daten allgemein bekannt sind. Bei der Kondenstation wird die Zahl der Teilchen erhalten, aber das Volumen V schrumpft auf W. Der Verkürzungsfaktor ist $f := (W/V)^{1/3} = (18/22400)^{1/3} \approx 1/10$. Folglich beträgt der Abstand zwischen Wassermolekülen rund 0.3 nm.

   Abstände zwischen Gasteilchen liegen im Bereich von einigen Nanometern. Abstände der Teilchen in Flüssigkeiten und Festkörpern liegen unterhalb dieser Grössenordnung.

   Bemerkung Beim Erstarren einer Flüssigkeit zu einem Festkörper nimmt die Dichte in der Regel etwas zu. Der Faktor 100 ist sicher zu gross aber bequem für eine Abschätzung. Die Grössenordnung der Abstände zwischen ‘benachbarten’ Teilchen in einer Flüssigkeit bleibt beim Erstarren zu einem Festkörper etwa dieselbe, da $100^{1/3} < 5$ ist.

4. Die Masse m der Atmosphäre wird von der Erdanziehung g beschleunigt und wirkt auf der Erdoberfläche als Gewicht. Zwischen dem Gesamtgewicht auf der ganzen Erdoberfläche A, dem Druck p und dem Gewicht besteht die Beziehung $m \cdot g = A \cdot p$

   Überschlagsmässig ist $m \approx 10^5/10 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 6400000^2 \approx 12 \cdot 64^2 \cdot 10^{14} = 3 \cdot 2^{14} \cdot 10^{14} \approx 3 \cdot 2^4 \cdot 10^{17} \approx 5 \cdot 10^{18}$ kg.

   Die Rechnung mit dem Rechner und den Daten $p = 101300$ Pa, $r = 6.380 \cdot 10^6$ m ergibt $m \approx 5.182 \cdot 10^{18}$ kg.

Bemerkung Das Beispiel zeigt, dass der wesentliche Punkt die physikalische Einsicht ist, auf der die Bestimmungsgleichung beruht. Die Überschlagsrechnung mit Bleistift und Papier ist möglich. Sie stellt eine zusätzliche Schwierigkeit dar, aber sie vermittelt keine Einsichten in die Natur der Sache.

5. Die Lufthülle der Erde wird ständig bewegt. Für die kinetische Energie kann die Masse m von Aufgabe 4 und eine 'mittlere' Geschwindigkeit benutzt werden. Es gilt $E = \frac{m}{2} \cdot w^2$, wo w^2 den Mittelwert für das Quadrat aller Windgeschwindigkeiten bezeichnet. Beim Mitteln über das Volumen der Atmosphäre müsste die Werte v^2 mit der lokalen Dichte gewichtet werden. Für eine Abschätzung der Grössenordnung genügt ein plausibler Erfahrungswert für die Windgeschwindigkeit. Grosse Wettersysteme bewegen sich in mittleren Breiten etwa mit 10 m/s vorwärts. Damit ergibt sich eine Schätzung für $w^2 \approx 10^2$. Die gesamte kinetische Energie erreicht so die Grössenordnung von $E \approx 2.5 \cdot 10^{20}$ J.

   Ein Plausibilitätstest mit der Strahlungsleistung der Sonne: Die Sonne würde etwa 20 Minuten benötigen, um diesen Energiebetrag E auf die Erde zu übertragen [ohne Reflexion durch die Albedo]. Sonst rund eine Stunde.

   Hinweis: Nur ein winziger Bruchteil von E steht zur Verfügung zum Erzeugen von elektrischer Energie in Windkraftwerken.

6. $m = E/c^2 = 10^9 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot c^{-2}$, mit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, der Lichtgeschwindigkeit. Ausrechnen ergibt $\quad m \approx 1 \cdot 10^{-3}$ kg.

   Der Wirkungsgrad beim Umwandeln thermischer Energie in mechanische und elektrische Energie beträgt etwa 1/3. Folglich ist etwa die dreifache Menge an Primärenergie nötig. Als äquivalente Masse ausgedrückt, rund 3 Gramm pro Tag werden zu Abwärme und zu elektrischer Energie umgewandelt.

7. Eine realistische Berechnung der Mondbewegung umfasst mindestens ein Dreikörperproblem, mit Erde, Sonne und Mond. Wir vereinfachen sogar das Zweikörperproblem mit Erde und Mond, in welchem die Sonne fehlt.

   7.1 **Vereinfachung und Analyse** Der Mond bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius r gleichförmig um das Erdzentrum (statt um den gemeinsamen Schwerpunkt). Diese Näherung ist brauchbar, weil die Erdmasse M deutlich grösser ist als die Mondmasse m.
   Die Gesamtenergie ist $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$.
   Wir zeigen, dass E bei gegebenen Massen M und m alleine vom Bahnradius r abhängt und berechnen $\quad E(r + \Delta r) \approx E(r) + \Delta r \cdot \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}(r)$.
   Diese lineare Näherung ist unproblematisch, weil $\Delta r << r$ gilt ($r \approx 3.84 \cdot 10^8$ m und $\Delta r = 0.04$ m).
   Notation: γ universelle Gravitationskonstante, $C := \gamma \cdot M \cdot m$

   a) Auf der Kreisbahn erzeugt die Gravitationskraft die Zentripetalkraft

   $$C/r^2 = m \cdot r \cdot \omega^2$$

   b) Die kinetische Energie beträgt

   $$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot C/r \quad \text{wegen (a)}$$

c) Die potentielle Energie beträgt $E_{\text{pot}} = -C/r$

d) Die Gesamtenergie als Funktion des Bahnradius ist $E(r) = -\frac{1}{2} \cdot C/r$

e) Energieaufwand pro Jahr:

$$\Delta E \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} E(r) \cdot \Delta r = \frac{1}{2} C/r^2 \cdot \Delta r \approx 3.96 \cdot 10^{18} \mathrm{J/yr}$$

Die pro Jahr für das Anheben des Mondes in der Bahn um die Erde benötigte Energie hat ein Massenäquivalent von rund 44 kg. Würde diese Energie durch eine konstante Leistung erbracht, so wäre eine Leistung von rund 126 GW nötig. Das entspricht in etwa der Leistung von 130 grossen (nuklearen) Kraftwerken.

Bemerkung Die gröbere Näherung $\Delta E \approx C/r^2 \cdot \Delta r$ vernachlässigt die kinetische Energie des Mondes.

Kommentar Insgesamt wurde die Bewegung der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond vernachlässigt und angenommen, dass die Bahnveränderung ohne Reibungsverluste vor sich geht. Tatsächlich wird Rotationsenergie von der Erde auf den Mond übertragen, weil die Massenverteilung auf der Erde nicht perfekt symmetrisch ist. Die Gezeiten im Erdkörper und in den Ozeanen setzen Rotationsenergie in Wärme um. Der Effekt, der den Mond von der Erde wegtreibt ist mit Reibungsverlusten verbunden, die im rudimentären Modell der Abschätzung nicht berücksichtigt werden können. Die Verlangsamung der Erdrotation ist jedoch messbar und kann bis in weit zurückliegende Epochen anhand geologischer Evidenzen abgeschätzt werden.

7.2 Ein Anwachsen der Mondentfernung von $3.84 \cdot 10^8$ m erfolgt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 4 cm/yr, so dauert der Prozess rund $9.6 \cdot 10^9$ Jahre.

Mit wachsendem Abstand verkleinern sich die Gezeiteneffekte, welche die Drehimpulsübertragung verursachen. Daher ist die Hypothese einer langfristig konstanten Zunahme des Abstandes zwischen Erde und Mond zu einfach und physikalisch nicht begründbar.

8. Es werden zwei Abschätzungen gegeben. Mehr als die bei der Wolkenbildung aufgenommene Sonnenenergie kann nicht umgesetzt werden und weniger als die Energie des fallenden Regens steht nicht zur Verfügung.

eingestrahlte Sonnenenergie Die umgesetzte Energie wird von der Sonnenstrahlung auf der Fläche von 10^8 m^2 im Laufe von etwa 10 Stunden bezogen. Mit der Solarkonstante $S \approx 1.37$ kWm^{-2} wird die Strahlungsleistung überschätzt wegen der Rückstreuung eines Teils des Lichtes an der Atmosphäre und an der Wolke und weil die Sonne nicht senkrecht auf den Boden strahlt. Wir rechnen mit einer reduzierten Leistung von $s \approx 0.3$ kWm^{-2} und erhalten die Abschätzung. $E > 10^9 \cdot 3600 \cdot 300 > 10^{15} J$

Energie des fallenden Regens Die mittlere Energie der fallenden Wassermasse beträgt $E = m \cdot g \cdot h$, wobei h die Höhe des Schwerpunktes der Wassermasse in der Wolke gegenüber dem Boden bezeichnet. Es ist 2000m$< h <$ 5000m, weil der Schwerpunkt der Wassermassen in der unteren Hälfte der Wolke liegt. Hagelschlag ist ein Anzeichen, dass erhebliche Wassermassen gefroren sind. Wir wählen zwei Schätzungen $h_1 = 3000$ m für Regen, $h_2 = 4000$ m für Regen mit Hagel. Daraus ergeben sich mit $g \approx 10$ m$\cdot$ s^{-2} die beiden Schätzungen für die Energie:

$$E_1 \approx 10^8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3000 = 3 \cdot 10^{13} J \quad \text{und} \quad E_2 \approx 8 \cdot 10^{13} J$$

Kommentar Die Abschätzung der verfügbaren Energie ist etwa auf einen Faktor 3 unsicher wegen der Berücksichtigung der zurückgestrahlten Energie. Ferner ist die Wolke eine Wärme-Kraft-Maschine mit einem begrenzten Wirkungsgrad. Ein Teil der Energie wird in die Bewegung der Luftmassen oder bei Phasenumwandlungen des Wassers und in die Erwärmung von Wasser und Luft umgesetzt oder als Wärmestrahlung ausgesandt. Die Energie des fallenden Regens ist nur ein Bruchteil der Gesamtenergie. Selbst dieser Bruchteil erreicht aber die Tagesproduktion der elektrischen Energie in einem Kraftwerk der 1 GW Leistungsklasse.

Die fallenden Regentropfen werden von der Luft gebremst und sie verdampfen teilweise bereits im Fallen. Daher kommt – zum Glück – von der berechneten Fallenergie tatsächlich wiederum nur ein Bruchteil am Boden an. Bei gegebener Grösse der verfügbaren Fallenergie E in der Wolke sind die Dauer Δt des Regens und die Grösse A der betroffenen Fläche entscheidend für das Schadenspotenzial, das sich durch die Leistunggsdichte $P/A \approx E/(A \cdot \Delta t)$ abschätzen lässt.

9. Die Reihe der Anzahl Ahnen in der Generation n beginnt mit $1, 2, 4, 8, \ldots$ Die Funktion $a : n \mapsto 2^n$ berechnet allgemein eine Anzahl die sich von Generation zu Generation verdoppelt. Im Mittel über 2000 Jahre dürfte das Alter der Mutter bei der Geburt eines Kindes etwa bei 25 Jahren liegen. Für ein Intervall von 2000 Jahren werden rund 80 Generationen benötigt. Damit wird $a(80) = 2^{80} = (2^{10})^8 \approx (10^3)^8 = 10^{24}$

   Diese Antwort ist viel zu gross. Heute leben weniger als 10^{10} Menschen. Vor 2000 Jahren müssen es deutlich weniger gewesen sein. Haben wir die Anzahl der Generationen zu grosszügig geschätzt? Auch mit 40 Generationen wird $a(40) > 10^{12}$. Der Fehler kann nicht in den Daten liegen.

   Das Zählverfahren muss einen Fehler enthalten. Es ist klar, dass jeder Mensch zwei verschiedenbe Vorfahren hat. Wir haben daraus voreilig den Schluss gezogen, dass ein binärer Baum vorliege.

   Zyklen im Stammbaum sind das Zeichen für gemeinsame Vorfahren. Sie zeigen, dass gewisse Vorfahren der Mutter identisch waren mit gewissen Vorfahren des Vaters.

   Die verwendete Zählformel $a(n) = 2^n$ gilt nur in binären Bäumen. Die Schätzung $a(n)$ erzeugt für hinreichend grosse n gegenüber historischen Fakten massive Widersprüche.

   Die vor 2000 Jahren vorhandene Bevölkerung war sicher geringer als die heutige. Die falsche Schätzung belegt, dass unter den Vorfahren jedes heute lebenden Menschen immer wieder gemeinsame Vorfahren der beiden Eltern auftreten *mussten*. (Ahnenschwund)

   Die Analyse der falschen Antwort hat eine neue und unerwartete Einsicht erzeugt. Die ursprüngliche Frage ist damit aber nicht beantwortet.

10. **Eine Fallstudie: Hochspannungsleitung**

Ein Standardmodell für das hängende Kabel ist die Kettelinie. Sie wird als Referenzlösung beigezogen, um gröbere Näherungen zu beurteilen. Jede glatte Kurve lässt sich durch Polygonzüge beliebig gut annähern. Wir begnügen uns mit den beiden gröbsten Näherungen durch Diskretisierung. Eine weitere elementargeometrische Näherung ersetzt die Kettenlinie durch ein gleich langes Stück eines Kreisbogens zwischen den Aufhängepunkten. Es wäre naheliegend, als weitere Option einen Parabelbogen zu betrachten. Seine Bogenlänge lässt sich formal exakt mit Integralrechnung bestimmen. Allerdings kann man mit dem selben Aufwand gleich die Kettenlinie behandeln. Darum wird die Parabel nicht näher betrachtet.

In den folgenden Lösungen werden ausgewählte Ideen im Sinne von Anwendungen der Schulmathematik skizziert. Dies bedingt eine Beschränkung vor allem auf geometrische Zusammenhänge, die bei der Konstruktion eine Rolle spielen.

Die ingenieurmässige Konstruktion von Freileitungen ist viel komplexer, weil sie eine gesamtheitliche Betrachtung aller Aspekte von Geometrie, Mechanik, Elektrik, Materialwissenschaften, Umweltbedingungen, Ökonomie und Ökologie verlangt. Diese Vielfalt kann die Schule zur Kenntnis nehmen aber nicht selbst abdecken.

Die Modellierung benutzt hypothetische Daten zur Spannweite zwischen zwei Masten und zu den Materialeigenschaften der Kabel. Die Kabel selbst sind technische Konstruktionen, die in der Regel nicht aus reinem Aluminium gefertigt sind. Der im folgenden angenommene Wert für den thermische Längenausdehnungskoeffizienten λ bezieht sich auf reines Aluminium. Würde ein Kabel mit einem Stahlkern verwendet, so wäre der Längenausdehnungskoeffizient nur etwa halb so gross wie für Aluminium.

10.1 Diskretes Ersatzproblem 1

Über der Strecke a zwischen den beiden Aufhängungen des Kabels wird ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkellänge $k/2$ eingepasst. Die Höhe h_1 ist eine 'rationale Schätzung' für den Durchhang Δh des Kabels. Sicher ist $h_1 > \Delta h$, denn dieses Dreieck entsteht, wenn die ganze Masse des Kabelstücks in der Mitte konzentriert ist und diese die tiefst mögliche Lage einnimmt. Es gilt $h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - a^2}$. Benutzt man die Dehnung des Kabels $d := k - a$, so wird

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a \cdot d + d^2} \approx \sqrt{\frac{a \cdot d}{2}} \quad \text{für } d \ll a.$$

Die numerischen Näherungswerte sind in der Tabelle 1 zu finden.

10.2 Diskretes Ersatzproblem 2

Die Kabellänge $k = a + d$ wird in drei gleichlange Stücke geteilt. Mit drei Strecken der Länge $k/3$ wird über einer Strecke der Länge a ein gleichschenkliges Trapez errichtet. Dessen Höhe h_2 eine weitere einfach zu handhabende 'rationale Schätzung' für Δh. Die Grössenbeziehung zwischen h_2 und Δh ist nicht offensichtlich. Analog zur ersten Diskretisierung gibt es eine Näherungsformel, die für $d \ll a$ brauchbar ist:

$$h_2 \approx \sqrt{\frac{a \cdot d}{3}}$$

Die numerischen Näherungswerte sind in der Tabelle 1 zu finden.

10.3 Geometrisches Ersatzproblem

Das durchhängende Kabel folgt einer gekrümmten Kurve, die ihr Minimum zwischen den beiden Aufhängepunkten annimmt. Im Vergleich zur Länge der Kurve ist der Durchhang gering. Wäre die Krümmung der Kurve konstant, so würde ein Kreisbogen vorliegen. Das geometrische Ersatzproblem lautet: Welcher Kreisbogen verbindet die Punkte $A(-\frac{a}{2}|0)$ und $B(\frac{a}{2}|0)$ und hat die Länge k?

Es sei $M(0|m)$ der Mittelpunkt des Kreises und $\alpha := \angle BMA$.

Dann gilt $\sin(\alpha/2) = \frac{a}{2r}$ und im Bogenmass gilt $\alpha/2 = \frac{k}{2r}$. Mit der Taylorentwicklung für Sinus ergibt sich

$$\frac{a}{2r} = \sin(\frac{k}{2r}) \approx \frac{k}{2r} - \frac{1}{6} \cdot \frac{k^3}{8r^3}$$

In der Näherung sind a und k bekannt. Mit $d := k - a$ ergibt sich die Näherung $r \approx \sqrt{\frac{k^3}{24d}}$

Somit lässt sich der Durchhang schätzen als

$$\delta h := r - \sqrt{r^2 - a^2/4}$$

Die numerischen Ergebnisse sind in Tabelle 1 eingetragen.

10.4 Kettenlinie und Referenzlösung

Kettenlinien lassen sich beschreiben durch Graphen der Funktionen vom Typ

$$c : x \mapsto p \cdot \cosh(\tfrac{x}{p}) \qquad \text{mit einem Parameter } p \text{, der die Form beeinflusst}$$

Diese Beschreibung der Kettenlinie geht von der Annahme aus, dass sich die Aufhängungen des Kabels an den Stellen $(a/2|c(a/2))$. Der tiefste Punkt befindet sich dann in $(0|p)$, $p > 0$ und für den exakten Wert des Durchhangs gilt $\Delta h = c(a/2) - p$. Die Länge des Kabels $k > a$ bestimmt den Parameter p bei gegebenem a als Lösung der Gleichung für p

$$\frac{k}{2} = \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + (c'(x))^2}\, \mathrm{d}x = p \cdot \sinh(\frac{a}{2p})$$

Diese Gleichung für p ist transzendent. Übrigens lässt sich p als Radius des Krümmungskreises an die Kettenlinie an der Minimalstelle interpretieren (vgl auch Tabelle 1)

Für konkrete Werte von a wird ein numerisches Näherungsverfahren (CAS) zur Bestimmung von p verwendet. Obwohl der Lösungsansatz eine physikalisch begründbare exakte Modellierung benutzt, ist der Einsatz von Näherungsverfahren typisch für eine etwas komplexere Ingenieuranwendung. Dieser Umstand beeinträchtigt die Qualität der Lösung keinesfalls. Auch eine formal exakte Lösung könnte nicht 'besser' sein. In jedem Fall muss dieses Modell experimentelle Daten verwenden (zB λ).

Für das gewählte Beispiel enthält Tabelle 1 die Ergebnisse der verschiedenen Methoden.

Ein Vergleich der verschiedenen Verfahren zeigt, dass die Diskretisierung mit einem Zwischenpunkt in den drei Beispielen je zu grosse Werte liefert, während die Diskretisierung mit zwei Zwischenpunkten zu kleine Werte liefert. Dies ist eine gute

Tabelle 1: Durchhang eines Aluminiumkabels bei drei Temperaturen, $a = 500$ m

Temperatur [C]	k [m]	h_1 [m]	h_2 [m]	δh [m]	r [m]	Δh [m]	p
-30	500.4	10.0	8.17	8.66	3612.9	8.66	3608.9
20	501.0	15.8	12.91	13.69	2289.0	13.70	2282.9
70	501.6	20.0	16.33	17.32	1812.9	17.34	1805.1

Ausgangslage, um aus den beiden systematisch falschen Näherungen eine Konvexkombination $u \cdot h_1(d) + (1-u) \cdot h_2(d)$ mit $0 < u < 1$ zu bilden. Durch geeignete Wahl des zusätzlichen Parameters u kann die Referenzlösung besser angenähert werden als durch die beiden Extremfälle h_1 und h_2.

Durch systematisches Probieren (Bisektion) findet man die Linearkombination

$$h_3(d) := 0.275 \cdot h_1(d) + 0.725 \cdot h_2(d)$$

Sie stimmt im Beispiel $a = 500$ m und im praktisch interessierenden Temperaturbereich bis in den Zentimeterbereich perfekt mit den Daten von $\Delta h(d)$ überein.

Es ist uns nachträglich gelungen, eine handliche Näherungsformel zu finden, um die interessierende Grösse $H_A \approx \Delta h$ ohne den Umweg über den Parameter p mit elementaren Mitteln aus den Daten zu bestimmen. Mit Hilfe der Näherungslösung lässt sich einsehen, wie sich die Lösungen verhalten, wenn die Anfangsdaten $a =$ 500 m und $d(20) := k(20) - a = 1$ m proportional verändert werden.

Wegen $d(T) = \lambda \cdot (T - 20) \cdot a$, lässt sich in der Formel für $h_3(d(T))$ ein Faktor a ausklammern. Es bleibt dann ein Term der Gestalt $h_3(d(T)) = a \cdot f(\lambda, T - 20)$, wobei die Funktion f nicht von a abhängt. Dies bedeutet: Bei gegebener Temperatur ist der Durchhang h_3 (angenähert und in dem Bereich, für den die Näherungen gelten) proportional zum Abstand a zwischen den Masten.

Aus dem maximalen Durchhang ist eine Masthöhe in der Grössenordnung von mindestens 35 Metern vorzusehen. Eine Maximaltemperatur von 70 C scheint hoch zu sein. Sie ist auf Aluminium abgestimmt und sie berücksichtigt, dass sich das Metall unter der Sonneneinstrahlung und durch den elektrischen Widerstand beim Durchfluss des Stromes deutlich über die Lufttemperatur erwärmen kann.

Bemerkung Mit der Bestimmung des Durchhanges für den interessierenden Temperaturbereich ist natürlich die Berechnung einer Hochspannungsleitung noch nicht bewältigt. Wir haben angenommen, dass sich das Kabel bei 20 C so anspannen lässt, dass seine Länge 501 m beträgt und dass das Material im ganzen Temperaturbereich der Kabelspannung widersteht. Solche und weitere Fragen müssen bei der Konstruktion unter Berücksichtigung von Materialeigenschaften und Umweltfaktoren (z.B. Windlast, Vereisung) zusätzlich abgeklärt werden.

10.5 Benutzt man die verbesserte Näherungsformel und Daten $a = 1000$ m, so wird der Durchhang rund 17 m bei -30 C, 27.4 m bei 20 C und 34.7 m bei 70 C.

Damit müsste die Aufhängung mindestens 50 Meter über dem Boden liegen. Der Durchhang der Kabel würde nach der Modellrechnung zwischen den Extremtemperaturen um bis zu 17 m variieren. Einige Stichworte:

- Wie gross ist der Mehraufwand für den Bau von Masten mit einer Höhe von über 50 Metern gegenüber zwei Masten mit etwa 35 Metern Höhe?

- Montage und Wartung der Leitung mit kleineren Masten sind einfacher und billiger.
- Kann der Wind die Kabel zu unerwünschten Schwingungen anregen, wenn der Durchhang und die Länge gross sind?
- Hohe Masten ergeben womöglich Probleme mit dem Landschaftsschutz.
- Können die Kabel das Eigengewicht und die nötige Seilspannung aushalten?