Ein Prolog zur Vektorgeometrie

Vom Satz von Pythagoras zur analytischen Geometrie von Descartes

H.R. Schneebeli

Version vom 17. Dezember 2012

Voraussetzungen und Ziele

Dieser Text richtet sich an Lehrkräfte. Sein Kern besteht aus einer Sammlung von 40 Aufgaben. Diese sind für Schülerinnen und Schülern etwa im Alter von 15/16 Jahren gedacht, die am Übergang stehen von der konstruierenden Geometrie zur Vektorgeometrie. Der Prolog bereitet auf die den Lernenden noch wenig vertraute Verbindung von Algebra und Geometrie in der Vektorgeometrie vor. Kartesische Koordinatensysteme und Gleichungen werden benutzt, der Vektorbegriff selbst bleibt ausgespart.

Aus dem vorangehenden Geometrieunterricht wird nur der Satz von Pythagoras explizit vorausgesetzt. Natürlich ist ein gewisser Hintergrund in Planimetrie nötig, um zum Satz von Pythagoras zu gelangen. Der Prolog zeigt, wie sich die traditionellen Werkzeuge der Planimetrie, Zirkel und Lineal, im Rahmen der Algebra durch Gleichungen ersetzen lassen. Damit wird das Gebiet der analytischen Geometrie gestreift. Es ist angebracht, vor der Vektorgeometrie die analytische Geometrie von Descartes zur Kenntnis zu nehmen.

Aus der Algebra wird die elementare Gleichungslehre mit linearen Gleichungen mit *einer* Unbekannten vorausgesetzt. Im neuen Kontext ist es zwingend, die singulären Fälle mit Fallunterscheidungen zu erfassen und mehrere Unbekannte zu betrachten. Das Thema ist geeignet, fehlende Lücken zu erkennen und zu schliessen und in zwei Richtungen fortzuschreiten:

1. Anhand der Kreisgleichung werden quadratische Gleichungen eingeführt. *Quadratisches Ergänzen* wird für die Umformung bei Kreisgleichungen benutzt. Es ist auch der wesentliche Schritt, um quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten zu lösen.

2. Die Grundaufgaben der Lagegeometrie mit Punkten, Geraden und Kreisen führen auf Gleichungsysteme, die sich auf eine Gleichung mit einer Unbekannten reduzieren lassen. Die Reduktion, die hier vorgeschlagen wird, entspricht dem einfachsten nichttrivialen Fall des Buchberger-Algorithmus, der bei linearen Gleichungssystemen mit dem Gaussalgorithmus übereinstimmt. Die Formalisierung des Gaussalgorithmus in Matrixnotation ist nach dem Prolog vorgesehen.

Der Prolog ist eine Gelegenheit, um eine heterogene Klasse von Anfängern auf einen erwarteten Stand in der Algebra zu bringen, ohne alten Stoff zu wiederholen und ohne die leistungsfähigen Schüler mit Bekanntem zu langweilen.

Die Klasse kann mit Papier, Bleistift, Zirkel und Zeichendreieck arbeiten. Der Einsatz eines leistungsschwachen Taschenrechners wird nicht empfohlen. Hingegen kann es sehr sinnvoll sein, **Gerüstdidaktik** und das **Blackbox/Whitebox-Prinzip** mit einem Grafikrechner oder noch besser mit einem schultauglichen CAS zu realisieren. Wenig spricht dafür, die zu erwartenden Defizite in elementarem Rechnen an dieser Stelle explizit sichtbar zu machen und damit den Unterricht mit Frustrationen zu belasten, die mit dem eigentlichen Thema nichts zu tun haben. Der didaktische Einsatz eines CAS kann die folgenden Aufgaben zu einer interessanten Herausforderung machen, Erfolgserlebnisse vermitteln und die Neugierde wecken.

Zum Inhalt Die folgenden Aufgaben umreissen das Gerüst eines Lehrganges, in welchem die Kreisgleichung und die Geradengleichung aus dem Satz von Pythagoras hergeleitet werden. Am Ende der Unterrichssequenz können die Schüler Geraden oder Kreise durch Gleichungen beschreiben und die Grundaufgaben der Inzidenzgeometrie zu Punkt, Gerade und Kreis algebraisch lösen. Insbesondere werden in diesem Rahmen erstmals quadratische Gleichungen angesprochen und Lösungsstrategien für die Schnittaufgaben entwickelt.

Die Ausgestaltung des Unterrichtes bleibt weit offen. Es könnte attraktiv sein, eine Vielzahl der Aufgaben als Lernaufgaben zu verwenden. Solche Aufgaben werden nach minimaler Vorbereitung den Schülern überlassen. Deren Lösungen sind Grundlagen für Fortsetzung des Unterrichtes mit Kommentaren und Präzisierungen oder Bereinigungen von Fehlern und Missverständnissen, Festhalten wichtiger Erfahrungen. Unter anderem wird ein stufengerechtes algebraisches Kriterium erarbeitet, welches exakt Auskunft gibt, ob eine Aufgabe mit Zirkel und Lineal konstruktiv lösbar ist.

Lernaufgaben sind mehr als blosse Übungen Bei manchen Aufgaben gibt es verschiedene Lösungswege, zum Beispiel einen geometrischen oder einen algebraischen. Erkunden Sie alle Möglichkeiten und bewerten Sie den Aufwand beim Lösen. Wie gut ist die Lösung? Ist sie leicht zu gewinnen? Ist sie exakt? Stellt sie eine brauchbare Näherung dar? Ist sie plausibel, einsichtig, verständlich, sinnvoll, nachvollziehbar? Eine gut gelöste Lernaufgabe beinhaltet die Begründung für die Korrektheit der Lösung.

Oft können die Lernenden selbst einen Fortschritt erzielen, indem sie über die Lösungsmethode nachdenken. Könnten sie eine analoge Aufgabe auch mit anderen Daten lösen? Steckt ein System oder eine Einsicht hinter Ihrer Lösung? Lassen sich Erfahrungen aus mehreren Aufgaben zu einer Einsicht kombinieren, zusammenfassen, konzentrieren, systematisieren? Wie kann die Korrektheit der Lösung begründet werden?

Lernaufgaben sind gut für mehr als das Erfolgserlebnis, das Schüler erfreut, wenn ihre Lösung und jene aus dem Lösungsschlüssel gleich lauten. Eine solch triviales Kriterium für eine *gute Antwort* verpasst im vorliegenden Umfeld das Potential der Lernaufgaben.

Aufgaben

Bemerkungen Wir betrachten in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit Koordinaten $(x|y)$, sind aber offen für Kontakte zur Raumgeometrie in einem kartesischen Koordinatensystem mit drei Achsen.

1. (a) Wie lautet die Gleichung des Kreises mit Zentrum $P(3|-2)$ und Radius 4?
   (b) Wie lautet die Gleichung des Kreises mit Zentrum $Q(-2|5)$, der durch P verläuft?
   (c) Welches sind die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Kreise?

2. Welche der folgenden Gleichungen beschreiben einen Kreis? Wie gross ist gegebenenfalls der Radius und wo liegt der Mittelpunkt?
   $x^2 - y^2 = 4$ $\qquad$ $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 18$
   $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = 18$ $\qquad$ $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$
   $x^4 + y^4 = 1$ $\qquad$ $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -2$

3. Zeichnen Sie einen beliebigen Punkt $P(u|v)$ im Koordinatensystem ein. Wie lauten die Koordinaten des Spiegelbildes von P
   (a) beim Spiegeln an der x-Achse?
   (b) beim Spiegeln am Nullpunkt?
   (c) beim Spiegeln an einem Punkt $Q(a|b)$?
   (d) beim Spiegeln an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten?

4. Welche Eigenschaft haben die Koordinaten der Punkte, die auf den Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen liegen? Beschreiben Sie diese beiden Winkelhalbierenden durch Gleichungen.
5. Gegeben sind die Punkte $A(1|-2)$ und $B(3|4)$.
   (a) Beschreiben Sie die Bedingung, dass $P(x|y)$ von A und von B gleichen Abstand hat durch eine möglichst einfache Gleichung. Was ist an der Antwort bemerkenswert?
   (b) Wo liegen alle Lösungen des Problems? Wie lässt sich die Lösungsmenge mit Zirkel und Lineal konstruieren?
   (c) Wie lässt sich die Aufgabe verallgemeinern?
6. Warum ist es besser, die Lösungen einer Gleichung mit zwei Unbekannten x, y in der Form $(p|q)$ anzugeben als durch $x = p$ und $y = q$?
7. Beschreiben Sie die Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen zuerst in Worten und stellen Sie dann graphisch im Koordinatensystem dar, was die Ungleichungen bedeuten:
$$x^2 + y^2 < 25 \text{ und } (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \text{ und } (x+4)^2 + (y-3)^2 \geq 1$$
8. Wie lautet die Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt $(0|0|0)$ und Radius r? Erklären Sie anhand einer Skizze, wie Sie zur Antwort gelangen.
9. Zeichnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen im Koordinatensystem ein
$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 0 \\ 3x + 4y &= 12 \\ 6x + 8y &= 24 \\ 4x + 3y &= 12 \end{aligned}$$
   Welche 'Lehren' lassen sich aus den Ergebnissen ziehen?
10. Wie lautet die Normalform der Geradengleichung in folgenden Fällen, wie gross ist die Steigung der zugehörigen Geraden und wie gross ist der y-Achsenabschnitt?
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 0 \\ 3x - 4y &= 20 \\ 4x + 3y &= 9 \\ 5x + 4y &= 12 \\ 6x + 18y &= -24 \\ 4x - 5y &= 12 \end{aligned}$$
11. Wie lautet die Gleichung der Geraden durch den Punkt $Q(0|5)$ mit der Steigung $-\frac{1}{2}$?
12. Wie lautet die Gleichung der Geraden mit der Steigung 2 durch den Punkt $X(3|0)$? Welche Gleichung beschreibt die Gerade durch den Punkt $Q(5|2)$ mit der Steigung $\frac{4}{3}$?
13. Welche Gleichungen gehören zur Geraden die zur Geraden mit der Gleichung
$$19x - 11y = 0$$
   parallel ist und durch den Punkt $(1|-3)$ verläuft? Wie gross ist die Steigung und welches sind die Achsenabschnitte der beiden Geraden?

14. Wie lautet die Gleichung der Parallelen durch $(0|0)$ zur Geraden mit der Gleichung $2x + 5y = 20$?

15. Welche Koordinatenpaare erfüllen gleichzeitig beide Gleichungen?

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 30 \\ 6x &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x - 5y &= 30 \\ 2y &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x - 5y &= 30 \\ 4x + 3y &= 18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x - 5y &= 30 \\ 8x - 10y &= 30 \end{aligned}$$

16. Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Ungleichungen

$$\begin{aligned} y &\leq 0 \\ y &\leq 20 - 4x \\ 4x + 3y &\leq 9 \\ 5x + 4y &\geq 12 \\ 6x + 18y &> -24 \\ 4x - 5y &< 12 \end{aligned}$$

in einem geeignet gewählten Koordinatensystem.

17. Es sei $q \neq 0$. Warum haben die beiden Gleichungen

$$px + qy = r \qquad (1)$$
$$y = \frac{1}{q}(r - px) \qquad (2)$$

dieselben Lösungsmengen?

18. Gegeben sind die beiden Punkte $A(0|-3), B(5|0)$. Welche Gleichung beschreibt die Verbindungsgerade von A und B? Ist die Antwort eindeutig?

19. Wie lässt sich eine Gleichung für die Gerade finden, die $(2|-3)$ mit $(5|1)$ verbindet?

20. In der Physik ist es üblich, Bewegungsvorgänge in einem $(t|s)$-Koordinatensystem mit Achsen t 'Zeit' und s 'Ort' zu beschreiben. Für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v gilt $s = vt + s_0$.

    (a) Angenommen, s_0 und v seien gegeben. Wie schaut die Lösungsmenge der Gleichung im $(t|s)$-System aus?

    (b) Welche geometrische Bedeutung haben die Grössen v und s_0?

21. Bei einfachem Zins gilt für das Kapital K nach der Laufzeit t, den Zinsfuss p und ein Anfangskapital K_0 die Beziehung

$$K = K_0 + K_0 \cdot p \cdot t.$$

    Warum wird dieser Zusammenhang in der Grafik in einem $(t|K)$-Koordinatensystem durch eine Gerade beschrieben? Welche Grösse beschreibt den Achsenabschnitt, welche die Steigung der Geraden in der Graphik?

22. Zeichnen Sie die Lösungsmengen der Gleichungen $2x + 5y = 0$ und $5x - 2y = 0$ auf. Welche besondere Lage haben die zugehörigen Lösungsmengen?

23. Wie lässt sich nachweisen, dass die Geraden mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ bx - ay &= 0 \end{aligned}$$

für beliebige Werte a, b (nicht beide gleichzeitig $= 0$) aufeinander senkrecht stehen?

24. Fassen Sie Ihre mathematischen Erkenntnisse zur analytischen Geometrie aus den vorangehenden Übungen in Stichworten, gegliedert aber ohne Einzelheiten zusammen.

25. Schreiben Sie einige Kontrollfragen auf, um zu prüfen, ob Ihre Kameraden die wichtigsten Ideen zur analytischen Geometrie aus dem bisherigen Unterricht verstanden haben.

26. Welche Punkte der x-Achse haben den Abstand 4 vom Punkt $(3|2)$?

27. Eine typische quadratische Gleichung für *eine* Unbekannte x lautet

$$x^2 + px + q = 0.$$

Die Gleichung soll durch geometrische Überlegungen gelöst werden. Dazu führen wir eine neue Unbekannte y und folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + px + q &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

ein. Das macht die Sache scheinbar komplizierter, hat aber den Vorteil, dass wir das Gleichungssystem geometrisch interpretieren können.

(a) Welche geometrische Bedeutung hat die erste der beiden Gleichungen des Systems, welche die zweite?

(b) Wie lässt sich die Lösung der neuen Aufgabe geometrisch beschreiben?

(c) Wie ist der Zusammenhang zwischen der Lösung der ersten und jener der neuen Aufgabe?

(d) Beschreiben Sie die Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ durch eine Formel.

28. Löse die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 7 &= 0 \\ x^2 - 8x + 5 &= 0 \\ x^2 - 4x + 5 &= 0 \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2t^2 - 6t &= 3 \\ (u-2)(u+5) &= 6 \\ (3v-2)(5v+1) &= 24 \\ (1-x) : x &= x : 1 \end{aligned}$$

29. Wie lautet die Faktorzerlegung der folgenden Terme?

$(a)\quad u^2 + 4u - 1 \qquad (b)\quad 5v^2 - 4v - 3 \qquad (c)\quad 5w^2 + 4w + 3 \qquad (d)\quad 3x^2 + 4x + 5$

30. Wo schneidet der Kreis mit Mittelpunkt $Z(5|3)$ und Radius 5 die

(a) Winkelhalbierende des ersten Quadranten?

(b) Gerade mit der Gleichung $2x + 3y = 12$?

31. Wo schneidet der Kreis mit Mittelpunkt $M(4|-1)$ und Radius 6 den Kreis mit

    (a) der Gleichung $x^2 + y^2 - 4x + 5y = 0$?

    (b) der Gleichung $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 21$?

32. (a) Wie lautet die Gleichung des Kreises mit Zentrum $P(3|-2)$ und Radius 4?

    (b) Wie lautet die Gleichung des Kreises mit Zentrum $Q(-2|5)$, der durch P verläuft?

    (c) Welches sind die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Kreise?

33. Welche der folgenden Gleichungen beschreiben einen Kreis? Wie gross ist gegebenenfalls der Radius und wo liegt der Mittelpunkt?

    $x^2 - y^2 = 4$ $\quad$ $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 3$

    $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 18$ $\quad$ $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$

    $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = 18$ $\quad$ $x^4 + y^4 = 1$

34. Beschreibe die Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen zuerst in Worten und stellen Sie dann graphisch im Koordinatensystem dar, was die Ungleichungen bedeuten:

$$x^2 + y^2 < 25 \text{ und } (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \text{ und } (x+4)^2 + (y-3)^2 \geq 36$$

35. Wo schneidet der Kreis mit Mittelpunkt $Z(5|3)$ und Radius 5 die

    (a) Winkelhalbierende des ersten Quadranten?

    (b) Gerade mit der Gleichung $2x + 3y = 12$?

36. Wo schneidet der Kreis mit Mittelpunkt $M(4|-1)$ und Radius 6 den Kreis mit

    (a) der Gleichung $x^2 + y^2 - 4x + 5y = 0$?

    (b) der Gleichung $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 21$?

37. Welcher Kreis mit Mittelpunkt $M(3|4)$ berührt

    (a) die Gerade mit der Gleichung $2x - 5y = 10$?

    (b) den Kreis um $Z(2|-1)$ mit Radius 2?

38. Für welche Werte von x und y wird der Ausdruck $z = 3x + 2y$ maximal unter der Bedingung, dass

$$x \geq 0 \quad \text{und} \quad y \geq 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - 6x + 4y \leq 12$$

    gelten?

39. Begründen oder widerlegen Sie: Alle Konstruktionen mit Zirkel und Lineal lassen sich ersetzen durch Algebraaufgaben

    (a) mit Kreisgleichungen und Geradengleichungen.

    (b) in denen bloss quadratischen Gleichungen mit einer einzigen Unbekannten oder Systeme mit zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten auftreten.

40. Begründen oder widerlegen Sie: Jede Algebraaufgabe, die nur quadratische Gleichungen in einer Unbekannten oder Systeme von linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten enthält, lässt sich auch durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal lösen.