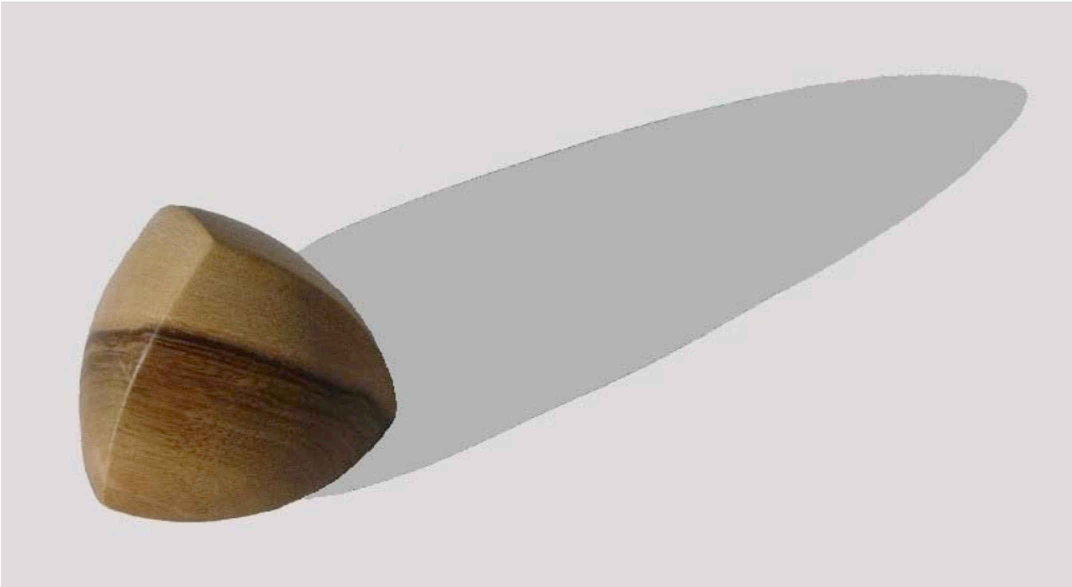
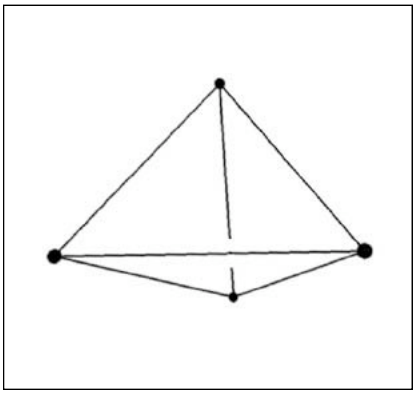
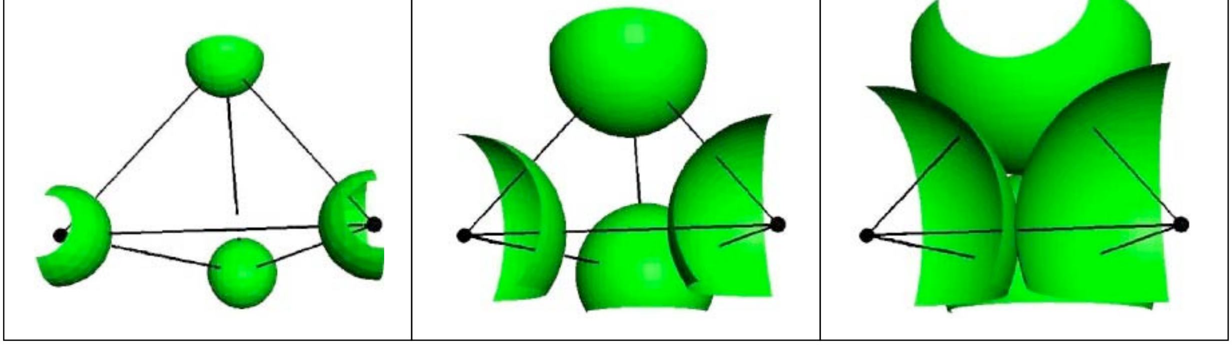
Was hat dieser Körper mit Kugeln zu tun?



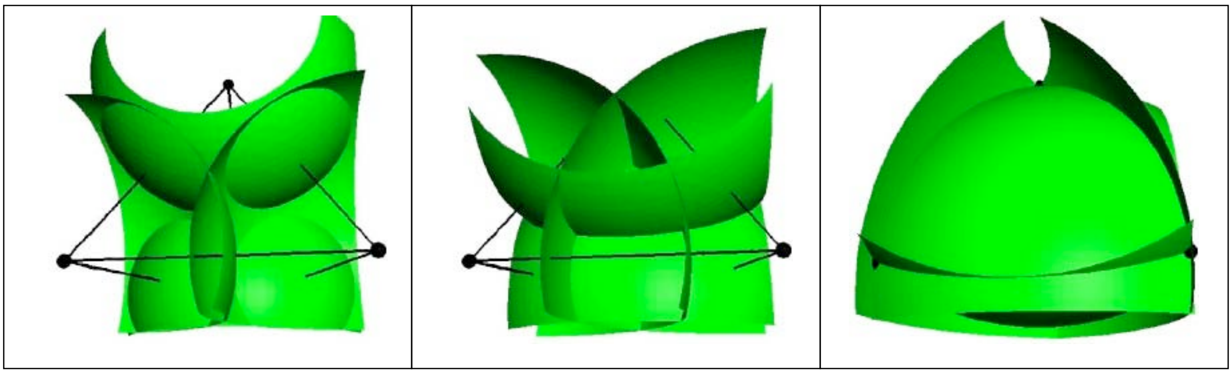
Wenn vier Punkte im Raum so angeordnet werden, dass sie gleich weit voneinander entfernt sind, bilden sie die Ecken eines *Tetraeders*:



In diesen vier Tetraeder-Ecken werden gleich große Kugeln positioniert, die gleichmäßig wachsen, bis sie aneinander stoßen:

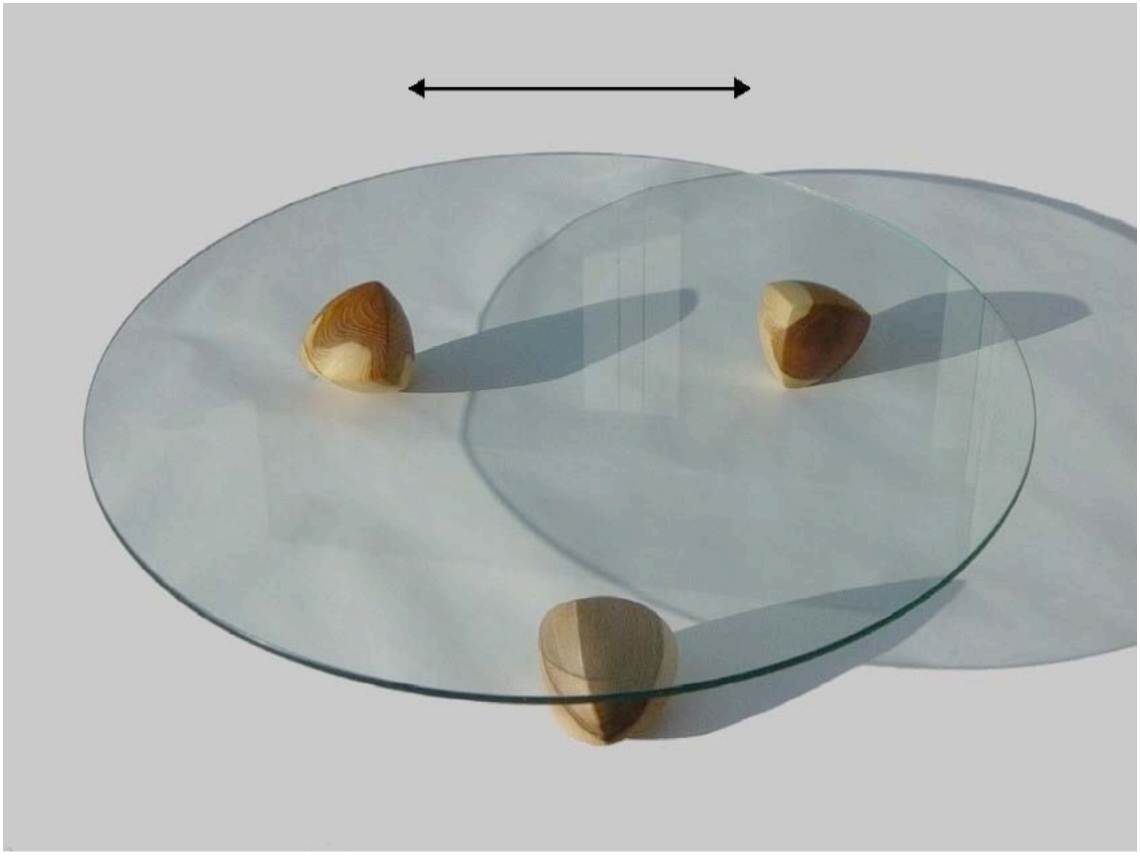


Um weiter wachsen zu können, müssen sich die Oberflächen der Kugeln gegenseitig durchdringen:



Im letzten Bild rechts läuft jede der Kugel-Oberflächen durch die drei Tetraeder-Ecken, die gegenüber ihres Mittelpunkts liegen.

Der derart begrenzte Körper sieht wie ein aufgewölbtes Tetraeder aus. Er wird *Reuleaux'sches Tetraeder* genannt und hat die bemerkenswerte Eigenschaft, beinahe von *konstanter Breite* zu sein:



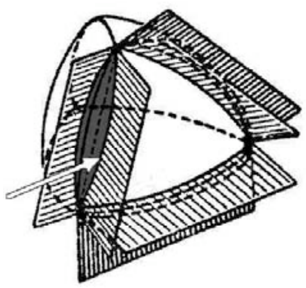
Wird eine Glasplatte auf drei Reuleaux'sche Tetraeder gelegt und hin und her verschoben, bewegt sie sich beinahe parallel zur Tischoberfläche – als ob die Glasplatte auf drei gleich großen *Kugeln* rollen würde!

Präzisierungen

· Ein räumlicher konvexer Körper ist von *konstanter Breite*, wenn er folgende Eigenschaft hat: In welcher Orientierung er auch zwischen zwei parallele Platten eingespannt wird, immer sind die beiden Platten exakt gleich weit voneinander entfernt. Deshalb wird ein solcher Körper auch *Sphäroform* ([1]) oder *Gleichdick* ([11]) genannt.

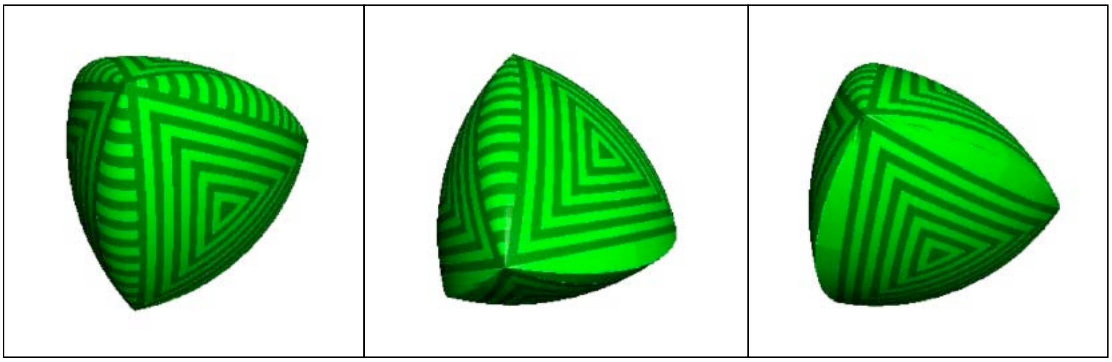
· Ein Reuleaux'sches Tetraeder ist nur beinahe von konstanter Breite: Der Körper berührt die beiden einklemmenden Platten in der Regel mit einem seiner Eckpunkte und einem Punkt auf der gegenüber liegenden Körper-Oberfläche. Für solche Punktepaare sind die beiden Platten konstruktionsgemäß gleich weit voneinander entfernt. Die beiden möglichen Berührpunkte können jedoch auch auf zwei einander sich gegenüber befindlichen Kanten des Körpers liegen. Dort ist die Breite größer – für zwei kantenmittig liegende Punkte ist sie maximal $\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.0249$ mal so groß wie die kleinste Breite (siehe auch [10] oder [12]).

· Das Reuleaux'sche Tetraeder kann durch *Abrundung der Kanten* zu einem Gleichdick gemacht werden: Zu einer solchen Abrundung wird zuerst dasjenige Stück des Reuleaux'schen Tetraeders entfernt, das zwischen zwei Ebenen liegt, welche benachbarte Seitenflächen des Tetraeders fortsetzen [grau unterlegt]. Dann wird in die entstandene Lücke ein neues, spindelförmiges Stück eingesetzt, das entsteht, wenn der Kreisbogen, in dem das Reuleaux'sche Tetraeder die fortgesetzten Seitenflächen des Tetraeders schneidet [markiert durch Pfeil], um die entsprechende Tetraeder-Kante [gestrichelt gezeichnet] rotiert wird (Graphik aus [5], S. 67).



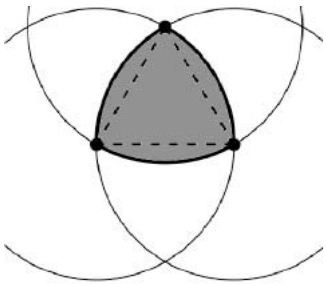
Werden drei *in einer Ecke* zusammenlaufende Kanten eines Reuleaux'schen Tetraeders wie beschrieben abgerundet, entsteht ein Gleichdick. Dieses wird manchmal auch *Meißner'scher Körper* genannt.

Folgende Schnappschüsse aus einem Film zeigen diesen Meißner'schen Körper von oben, von der Seite bzw. von unten:

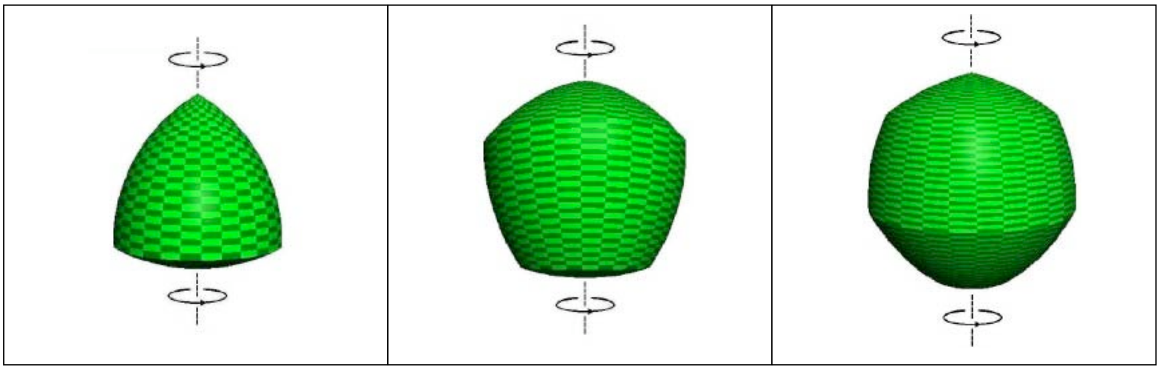


Werden stattdessen die *eine Seitenfläche* umgebende Kanten eines Reuleaux'schen Tetraeders wie beschrieben abgerundet, entsteht ein anderer Meißner'scher Körper (siehe auch [1], [2], [3], [4], [6], [8], [11] und [12]).

· Franz Reuleaux (1829–1905) war Ingenieur und baute eine Lehre vom Maschinenbau nach dem methodischen Vorbild der Mathematik auf. 1856–1864 war er Professor an der ETH Zürich, danach bis 1896 an der Berliner Gewerbeakademie. In seinem Lehrbuch der Kinematik wies er darauf hin, dass ausser dem Kreis auch andere ebene konvexe Figuren von konstanter Breite sein können. Am Bekanntesten ist das nach ihm benannte gleichseitige Dreieck, bei dem jede Dreiecksecke Mittelpunkt des ihr jeweils gegenüber liegenden Kreisbogens ist. Wegen seiner konstanten Breite findet das *Reuleaux'sche Dreieck* in der Technik Anwendung, so etwa im Wankel-Motor. (vgl. [3], [4], [7] und [9])



· Gleichdicks können auch *drehsymmetrisch* sein. So ist ein um eine der Symmetrieachsen gedrehtes Reuleaux'sches Dreieck von konstanter Breite, ebenfalls alle um eine Symmetrieachse rotierten Reuleaux'sches Fünfecke, Siebenecke usw. Folglich gibt es *unendlich viele* Körper derselben Breite (vgl. [2], [3], [4] und [8]):



Literaturangaben

[1] Tommy Bonnesen und Werner Fenchel: *Theorie der konvexen Körper*. Springer Verlag, Berlin, 1934, S. 127–139.

[2] Johannes Böhm: *Körper konstanter Breite.* In: Gerd Fischer (Hrsg.): *Mathematische Modelle – Kommentarband*. Vieweg Verlag, Braunschweig / Wiesbaden, 1986, S. 53–62.

[3] Johannes Böhm und Erhard Quaisser: *Schönheit und Harmonie geometrischer Formen*. Akademie Verlag, Berlin, 1991, S. 63–72.

[4] Martin Gardner: *Curves of constant width, one of which makes it possible to drill square holes*. Scientific American **208**(1963), S. 148–156.

[5] Isaak M. Jaglom und Wladimir G. Boltjanski: *Konvexe Figuren.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956, S. 66–67

[6] Ernst Meißner und Fr. Schilling: *Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite.* Zeitschrift für Mathematik und Physik **60**(1912), S. 92–94.

[7] Franz Reuleaux: *Theoretische Kinematik – Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens.* Vieweg Verlag, Braunschweig, 1875, S. 130–139 und 565–568.

[8] Martin Schilling: *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht.* Leipzig, 1911, S. 106 f. und 148 f.

[9] Eric W. Weisstein: *Reuleaux Triangle.* Aus: MathWorld – A Wolfram Web Resource. Erhältlich unter <http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html>

[10] Eric W. Weisstein: *Reuleaux Tetrahedron.* Aus: MathWorld – A Wolfram Web Resource. Erhältlich unter <http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTetrahedron.html>

[11] Herbert Zeitler: *Über Gleichdicks.* Didaktik der Mathematik **4**(1981), S. 250–275.

[12] *Reuleaux Tetrahedron*. Aus: Wikipedia – The free Encyclopedia. Erhältlich unter <http://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_tetrahedron>