Lineare Selbstabbildungen, Eigenwerte, Eigenvektoren

1. Begründen oder widerlegen Sie: *Bei einer linearen Abbildung $f : V \to V$ gehört ein Vektor genau dann zum Kern von f, wenn er Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist.*
   Wie lässt sich das Ergebnis verallgemeinern?

2. Begründen oder widerlegen Sie: *Eine quadratische Matrix ist genau dann regulär, wenn keiner ihrer Eigenwerte gleich 0 ist.*

3. Es sei

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Produkte $A\vec{u}, A\vec{v}, B\vec{u}, B\vec{v}$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Hinblick auf Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen A, B.

4. Welches sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix U?

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

5. (a) Bei welchen der folgenden Matrizen tritt ein Eigenwert 1 auf?

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (b) In welchen Beispielen tritt ein anziehender Gleichgewichtszustand auf?

   (c) Bestimmen Sie die Fixpunkte der zu den Matrizen gehörigen linearen Abbildungen, wenn die Standardbasis vorausgesetzt wird.

6. Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

   die gleichen Eigenwerte haben.

7. Begründen oder widerlegen Sie: *Sind λ, μ Eigenwerte der Matrix $M = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$, so gilt:*

   (a) $\lambda + \mu = -(r + u)$

   (b) $\lambda \cdot \mu = \det(M)$

8. Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_M : x \mapsto \chi_M(x)$ der Matrix $M = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ und berechnen Sie das Matrixpolynom $\chi_M(M)$. Was fällt dabei auf?

9. Wir betrachten alle reellen 2×2-Matrizen der Art $\quad S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.
   Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen durch formale Rechnung:
   (a) Die Eigenwerte von S sind reell.
   (b) Jede lineare Abbildung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Matrix S besitzt zwei linear unabhängige Eigenvektoren.
   (c) Ist $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ durch die Matrix S dargestellt wird, so hat s zwei orthonormierte Eigenvektoren.

10. Begründen oder widerlegen Sie: Ist $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit dem doppelten Eigenwert λ, dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:
    (a) Die Abbildung ℓ wirkt wie die Multiplikation mit λ auf $\mathbb{R}^2$ und ℓ wird in jeder Basis durch die Diagonalmatrix $D_\lambda = \lambda \cdot \mathbb{I}$ dargestellt.
    (b) Die Abbildung ℓ ist in keiner Basis durch eine Diagonalmatrix darstellbar, aber es gibt eine Basis von $\mathbb{R}^2$, bezüglich welcher ℓ die Matrixdarstellung $\quad L = \begin{bmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ mit einer Konstanten $c \neq 0$ besitzt.
    (Zusatz: Es gibt eine spezielle Basis, für welche zudem $c = 1$ gilt.)

11. Welche angenäherten Eigenvektoren findet das im CAS eingebaute numerische Verfahren zur Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?
    Inwiefern überrascht das Ergebnis?

12. Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:
    (a) Zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt es einen reellen Eigenwert.
    (b) Zu jeder regulären linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt es eine Ursprungsgerade von $\mathbb{R}^3$, welche von g auf sich selbst abgebildet wird.
    (c) Jede Drehung des Raumes hat eine Achse.