Fibonaccizahlen, Matrizen und die Formel von Binet

Zusammenfassung

Eine kurze Beschreibung des Modelles von Fibonacci zur Entwicklung einer Kaninchenpopulation wird gefolgt von einer Lösungsskizze, welche zur expliziten Berechnung der n-ten Fibonaccizahl nach Binet führt. Die Methode eignet sich, um ein Matrixmodell kennen zu lernen. Der Text fasst eine Unterrichtsequenz zusammen, ohne auf die Feinarbeit einer didaktischen Ausarbeitung einzutreten.

1 Fragestellung

Leonardo di Pisa, Sohn eines Kaufmannes, wurde Fibonacci genannt. Er war der berühmteste Mathematiker des Hochmittelalters, lebte um 1200 und diente dem deutschen Kaiser Friedrich Barbarossa als Hofmathematiker. Er machte sich einen Namen als Verfasser eines Rechenbuches (Liber Abaci, 1201), das Musteraufgaben und Lösungen für alle damals gängigen Rechenprobleme umfasste. Insbesondere hat Fibonacci erstmals ein mathematisches Populationsmodell formuliert: *In einem Gehege befinden sich zwei jung Kaninchen, ein Männchen und ein Weibchen. Nach einem Monat werden die Kaninchen erwachsen und werfen ein Paar Junge, ein Männchen und ein Weibchen. Wie viele Kaninchen werden in dem Gehege leben in 2, 3, 4, ... Monaten, falls alle erwachsenen Kaninchen überleben?*

Die Folge der Zahlen, welche das Wachstum dieser Modellpopulation beschreibt, heisst Fibonaccifolge.

Die Kaninchenaufgabe von Fibonacci lässt sich nach der Methode von Leslie behandeln. Der Systemzustand im n-ten Monat wird beschrieben durch Zahlenpaare $[j, a]_n$, wobei die Koordinate j die Anzahl der jungen und a die Zahl der erwachsenen Kaninchenpaare angibt. Jeder Zeitschritt transformiert den Zustandsvektor $\vec{z}_n = \begin{bmatrix} j \\ a \end{bmatrix}_n$ durch Multiplikation mit der konstanten Systemmatrix F in den Folgezustand $\vec{z}_{n+1}$. Die folgenden Schritte führen von der rekursiven Beschreibung

$$\vec{z}_{n+1} = \vec{z}_n + \vec{z}_{n-1} \quad \text{mit} \quad \vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zu einer expliziten Berechnung der Fibonaccizahlen. Die Formeln gehen auf Binet zurück, unsere Lösungsskizze benutzt neuere Begriffe der linearen Algebra wie Matrizen, Eigenwerte und Diagonalisierung. Das Beispiel lässt sich verwenden, um zu zeigen, wie Modellbildung mit einem linearen System abläuft und welche Eigenschaften derartige Modelle besitzen. Jedenfalls verallgemeinern sie den Begriff der geometrischen Folge auf Matrizen und Vektoren.

2 Lösungsskizze

Wir betrachten die Systemmatrix des Fibonacciproblems $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Rekursion $F^{n+1} = F^n + F^{n-1}$ erfüllt. Wie lautet eine allgemein gültige Formel für die direkte Berechnung von F^n? Die Antwort ist die Formel von Binet.

Antwort in 4 Schritten

1. **Eigenwerte** zu F

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -\frac{1}{\lambda_1}$$

Dann wird $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad$ und $\quad \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}.$

2. **Eigenvektoren** zu F

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Nun definiere die Matrix $\quad T = [\vec{e}_1, \vec{e}_2].$

3. **Diagonalisieren der Matrix**
Mit der Matrix T wird das Produkt $T^{-1} \cdot F \cdot T$ eine Diagonalmatrix D mit

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Daher wird $\quad F = T \cdot D \cdot T^{-1} \quad$ und $\quad F^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1} \quad$ mit

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

wird schliesslich

$$\begin{aligned} F^n &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_1^n \\ -\lambda_2^{n-1} & -\lambda_2^n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. **Formeln von Binet**
Wir interpretieren die Matrixelemente von F^n nun als Fibonaccizahlen: Das Matrixelement F_{22}^n ist gleich der Anzahl $f(n)$ aller Kaninchenpaare in der Generation n. Wir erhalten

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$$