Lineare Abbildungen und Matrizen

H.R. Schneebeli

Die folgende Serie von Übungsaufgaben wurde über mehrere Jahre entwickelt und im Schwerpunktfach *Physik und Anwendungen der Mathematik* [Teil der Mathematikanwendungen] oder im Ergänzungsfach *Anwendungen der Mathematik* verwendet. Einige der Fragestellungen wurden als Ideen für Maturarbeiten aufgenommen und selbständig ausgebaut [Akarsh Prasad: Ein Matrixmodell zur Populationsentwicklung Indiens (2006)].

Im Unterricht wurden CAS-Rechner oder Mathematikprogramme [Matlab] benutzt, welche die Datentypen Vektor und Matrix mit den üblichen Hilfsfunktionen unterstützen. Die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler wurde in der Begriffsbildung und im kompetenten Einsatz von angemessener Software vertieft. Auf die Rechenfähigkeit mit Papier und Bleistift wurde nur im Falle von 2×2-Matrizen Wert gelegt. Es ist mir beispielsweise wichtig, dass die Determinante mit der Idee des orientierten Spatvolumens verknüpft wird, aber es ist nicht mehr nötig, dass Determinantenentwicklungssätze für 4×4-Matrizen bekannt sind. Die Berechnung der Determinante erfolgt im CAS mit der Blackbox `det()`. Auf ähnliche Weise müssen die Schüler zu Eigenvektoren und Eigenwerten eine geometrische und eine algebraische Charakterisierung kennen. Beide sind in Anwendungen wichtig. Die numerische Berechnung erfolgt jedoch wiederum mit den Rechnerbefehlen `EigVl()` und `EigVc()`. Allerdings würde ich den Fall von 2×2-Matrizen explizit und mit Handrechnung exemplarisch ausführen lassen. Dabei darf durchaus darauf hingewiesen werden, dass numerische Verfahren ganz anders vorgehen. Beispielsweise lassen sich Solver für komplexe Polynome mit Matrixoperationen so realisieren, dass die Nullstellen eines Polynoms bestimmt werden als die Eigenwerte einer dem Polynom zugeordneten Matrix. Diese Eigenwerte lassen sich simultan in $\mathbb{C}$ annähern. Das traditionelle Bild der Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms wird durch neuere numerische Verfahren in seiner Bedeutung relativiert. Hingegen bleibt die Beziehung zwischen der geometrischen und der algebraischen Sichtweise und den zugehörigen Begriffen nach wie vor wichtig! Daher ist es sinnvoll, Iterationen von linearen Abbildungen oder Matrixpotenzen zu studieren und in diesem Umfeld die Bedeutung der Eigenwerte und Eigenvektoren zu erkennen.

Viele der Aufgaben wurde *vor* der Systematisierung und Formalisierung von Begriffen in einer exporativen Phase als Lernaufgaben eingesetzt. Es hat für die Lernenden einen eigenen Reiz, etwas Unbekanntes zu erkunden. Das Ergebnis solcher Tätigkeit kann natürlich nicht einfach durch Übereinstimmung mit einer Standardantwort überprüft und gegebenenfalls abgehakt werden. In der Regel beginnt die Diskussion der Begriffsbildung anhand der gemachten Erfahrungen und Beobachtungen erst *nach* den Lernaufgaben. Interpretationen sind dabei zentral. Die Relevanz der Ergebnisse ist den Lernenden kaum einsichtig. Die Lernaufgaben tippen Zusammenhänge an, die den Lernenden vorerst noch kaum erkennbar sind, aber durch Kommentare bewusst gemacht werden müssen.

Die Fähigkeit, selbst rechnen zu lassen, ist heute wichtiger als die Fähigkeit selbst zu rechnen. Daher habe ich die traditionellen Aufgabenplantagen vermieden. Entdecken kann man nicht dadurch lernen, dass dieselbe Fragestellung mehrfach wiederholt wird. Ein Einfall kommt im richtigen Moment oder er lässt eben auf sich warten. Die Entdeckung findet statt oder eben nicht. Aufgewecktes Suchen lässt sich nicht am Fliessband üben. Wer einen Witz verpasst, dem hilft kein Drill.

Wenn Mathematik teilweise konstruktiv aufgebaut wird, kann nicht ein fertiges Produkt erwartet werden, bestenfalls entstehen vorgedachte Elemente, welche unter Anleitung fertig gedacht und zu einem sinnvollen Ganzen zusammengefügt werden müssen. Dieser wichtige Prozess fordert und erfordert eine ausgebildete Lehrkraft. Der Weg von den teilweise noch unvollständigen oder mangelhaften Antworten der Lernenden zu einem brauchbaren Gesamtbild lässt sich weder vorgeben noch im Übungsmaterial vorschreiben. Es bleibt einzig die Erwartung oder die Hoffnung, dass das Material Anregungen und Gelegenheiten für gehaltvolle Beobachtungen, Entdeckungen und Kommentare liefere. Sollte sich diese Erwartung erfüllen, so beglückwünsche ich Sie zu einem gelungenen Unterricht.

Nicht alle Aufgaben wurden in jedem Falle benötigt. In einigen Jahrgängen wurde mehr geometrische Eigenschaften erkundigt, so etwa die Drehungen des Raumes, in anderen stand die Modellbildung mit linearen Systemen im Vordergrund: Populationsmodelle, Wirtschaftsmodelle, Markowketten. Die knappe Unterrichtszeit [konkret ca 60 Lektionen im Ergänzungsfach und 90 Lektionen im Schwerpunktfach] zwingt zu einer klaren Akzentsetzung. Eine Konzentration auf Wesentliches soll dazu führen, dass die Schülerinnen und Schüler ausreichend Zeit zum Suchen und Finden und zum Dokumentieren der Lösungen haben. Eine Lösung ist dann gut dokumentiert, wenn ein anderer Schüler damit die Lösung nachvollziehen kann und von der Richtigkeit der Antwort überzeugt ist. Je wichtiger der Computereinsatz ist, desto mehr nimmt die Bedeutung einer ausreichenden Dokumentaiton zu. Oft habe ich die Aufgaben gruppenweise bearbeiten lassen, wobei jede Gruppe eine kurze Präsentation der Lösung vor der ganzen Klasse vorzubereiten hatte. Damit werden die Ansprüche nach Vertiefung und Übersicht in einem Gebiet erfüllbar.

Der Unterricht war wie folgt aufgebaut:

1. Vorbereitung in der Vektorrechnung bis und mit Skalarprodukt
2. Matrizen als Verallgemeinerungen von Vektoren
3. Lineare Abbildungen, Kern, Bild, Dimensionssatz, Beispiele
4. Matrizen als Koordinatendarstellung von linearen Abbildungen, der Hauptsatz über lineare Abbildungen
5. Matrixprodukt (Vergleich mit dem Produkt in den bekannten Zahlbereichen)
6. Komplexe Zahlen in Matrixdarstellung (als Übung)
7. Lineare Selbstabbildungen, quadratische Matrizen, Invarianten
8. Eigenwerte, Eigenvektoren, Matrixpotenzen
   (spezielle Anwendung: Fibonaccifolge und Beweis der Formeln von Binet)
9. Lineare Modelle, Matrizen, verschieden Anwendungen.

Die Aufgaben lassen sich modular einsetzen. Durch Auswahl einzelner Aufgaben lässt sich auf die Gegebenheiten des eigenen Unterrichtes Rücksicht nehmen. Anderseits habe ich nicht versucht, alle Bedürfnisse abzudecken. Mein Unterrichtskonzept und die CAS-Rechner bringen es mit sich, dass nur noch wenige ganz elementare Rechenaufgaben zum Üben benötigt werden. Sie lassen sich von Fall zu Fall nach Bedarf und an Ort und Stelle erfinden.

H.R. Schneebeli