Leslie-Matrizen, Populationsmodelle

1. Wir betrachten eine Taubenpopulation, die in drei Altersklassen eingeteilt ist. Die Lesliematrix für die weiblichen Tiere dieser Taubenkolonie ist

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.75 & 1.5 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & p \end{bmatrix}$$

   (a) Welcher 'gerichtete und gewichtete' Graph gehört zu dieser Lesliematrix?

   (b) Welche konkrete Bedeutung hat die Zahl p dieser Matrix im Rahmen des Modelles?

   (c) Es sei $p = 0.7$. Begründen oder widerlegen Sie die Behauptung:
   Das Überleben der Taubenkolonie ist sichergestellt

   (d) Für welche Werte von p bleibt die Taubenpopulation langfristig begrenzt, ohne auszusterben?

   (e) Wie verteilen sich die Tauben einer stabilen Population in der fernen Zukunft prozentual auf die drei Altersklassen? Zeichnen Sie eine 'Alterspyramide'.

2. Eine amerikanische Forellenart, die im Hudson River lebt, lässt sich in fünf Altersklassen einteilen. Verschiedene Zählungen haben zu Schätzwerten für die Überlebens- und Fruchtbarkeitsraten geführt, die in der folgenden Lesliematrix auftreten. Die Zahl p ist wenig gesichert, als beste Schätzung gilt $p \approx 0.06$. Wir betrachten p als Modellparameter, der im Laufe der Diskussion verschiedene Werte annehmen kann.

$$L(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 37 & 64 & 82 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Welche Bedeutung hat die Zahl p?

   (b) Wie wird sich die Population in den Fällen $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.06$, $p_3 = 0.07$ langfristig entwickeln?

   (c) Für welchen Wert von p wird die Population überleben und sich stabilisieren? Wie verteilen sich die Forellen dann in der fernen Zukunft prozentual auf die fünf Altersklassen?

   (d) Angenommen, $p = 0.05$, und jedes Jahr werden 10^6 Zuchtforellen der zweiten Altersklasse der Population zugeführt. Erweitern Sie das Modell für diesen Fall und untersuchen Sie das langfristige Verhalten der Forellenpopulation. Klären Sie insbesondere ab, ob sich die Population stabilisiert und wie die Altersklassen in der fernen Zukunft besetzt sein werden.

3. Die Steinadlerpopulation in der Schweiz hat sich in den vergangenen zwanzig Jahren verdoppelt. Angenommen, wir wollen die Populationsentwicklung anhand einer Lesliematrix nachvollziehen und verwenden dazu ein Modell mit drei Altersklassen und Zeitschritten von einem Jahr. Dazu werden als Beobachtungsdaten die Zahlen benötigt, welche die Übergänge zwischen den drei Klassen beschreiben. Besonders schwierig zu beobachten ist die mittlere Anzahl w der jährlich im Gelege geschlüpften weiblichen Jungtiere. Diese Zahl tritt in der Lesliematrix L auf, wobei

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & w \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.95 \end{bmatrix}$$

Aufgrund der Verdoppelungszeit lässt sich der dominante Eigenwert von L ohne Kenntnis von w genügend genau bestimmen.

   (a) Zeichnen Sie den gerichteten und gewichteten Graphen, der zu diesem Modell gehört.

   (b) Wie gross ist der dominante Eigenwert von L, falls sich die Adlerpopulation im zugehörigen Eigenzustand jeweils nach genau zwanzig Jahren verdoppelt?

   (c) Welches ist der dominate Eigenwert von L für $w = 2$?

   (d) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen des charakteristischen Polynoms von L für $w = 0$.

   (e) Für welchen Wert von w wird der dominante Eigenwert von L gerade so gross, dass sich eine Populationsverdoppelung im zugehörigen Eigenzustand nach jeweils zwanzig Jahren einstellt?

   (f) Für welche Werte des Parameters w besitzt die Matrix L nur reelle Eigenwerte?

   (g) Wie gross ist der Erwartungswert des Lebensalters eines erwachsenen weiblichen Adlers gemäss den in der Lesliematrix vorhandenen Daten?