Lineare Abbildungen, Kern, Bild, Hauptsatz, Matrixdarstellung

In den Vektorräumen $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ werden die Standardbasen vorausgesetzt

1. Es sei $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit der Matrix

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie das Bild des Standardgitters von $\mathbb{R}^2$ unter der Wirkung der Abbildung ℓ.

   (b) Wie gross ist die Flächenverzerrung bei der Abbildung ℓ?

   (c) Skizzieren Sie das Bild des Einheitskreises unter der Wirkung von ℓ.

   (d) Bestimmen Sie zwei auf Länge 1 normierte Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$, die aufeinander senkrecht stehen und deren Bilder $\ell(\vec{u}), \ell(\vec{v})$ auch zueinander senkrecht sind. Warum kann es interessant sein, solche Vektoren zu kennen?

2. Eine lineare Abbildung $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird bezüglich den beiden Standardbasen in $\mathbb{R}^3$ und in $\mathbb{R}^2$ durch die Matrix

$$L = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

   beschrieben.

   (a) Welches ist das Bild des Einheitswürfels von $\mathbb{R}^3$ auf der $(x|y)$-Ebene?

   (b) Welches ist das Bild des Oktaeders mit den Eckpunkten

$$(\pm 1|0|0) \quad (0| \pm 1|0) \quad (0|0| \pm 1)$$

   auf der $(x|y)$-Ebene?

   (c) Welches ist der Kern von ℓ? Bestimmen Sie eine Basis dieses Kerns.

   (d) Tragen Sie den Kern in der Skizze bei (a) ein. Welche Interpretation hat der Kern in dieser Skizze?

3. Eine lineare Abbildung $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

   dargestellt.

   (a) Begründen oder widerlegen Sie: Der Vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ gehört zum Kern von a.

   (b) Geben Sie eine Basis für den Kern von a an.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von a.

4. Eine lineare Abbildung $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird wird bezüglich der Standardbasis durch die Matrix
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
dargestellt.

   (a) Wie wirkt diese Abbildung auf das Standardgitter?

   (b) Wie gross ist die Fläche des Bildes des Einheitskreises?

   (c) Welche Gestalt hat das Bild des Einheitskreises?

   (d) Welche Vektoren gehören zum Kern von b?

   (e) Um welche Art von Abbildung handelt es sich bei b?

5. Begründen oder widerlegen Sie: Es gibt eine lineare Abbildung $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für welche gilt
$$\ell : \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ell : \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ell : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Matrix
$$F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie eine Basis für den Kern von f.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis für das Bild von f.

   (c) Lösen Sie die Gleichung $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (d) Es sei g die Gerade durch $A(4|5|2)$ und $B(1|3|-4)$. Wie lautet eine Parameterdarstellung der Bildgeraden $f(g)$?

   (e) Es sei α die Ebene mit der Gleichung $3x + 4y + 5z = 24$.
      - Beschreiben Sie das Bild $f(\alpha)$ durch eine Parameterdarstellung.
      - Wie lautet eine lineare Gleichung mit Lösungsmenge $f(\alpha)$?

7. Es sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix P. Begründen oder widerlegen Sie:

   (a) Wenn die Kolonnen von P linear unabhängig sind, so ist p umkehrbar.

   (b) Wenn der Kern von p nur aus dem Nullvektor besteht, so ist p umkehrbar.

   (c) Wenn $\det P \neq 0$ gilt, so ist p umkehrbar.

   (d) Wenn die Matrix P regulär ist, so ist p umkehrbar.

   (e) Wenn P singulär ist, so gibt es eine 3×3 -Matrix $Q \neq O$ so, dass $PQ = O$ gilt. (Was ist hier O ?) Gibt es auch eine 3×3 -Matrix $R \neq O$ mit $RP = O$?

8. Eine lineare Abbildung $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$L = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

beschrieben. Begründen oder widerlegen Sie möglichst kurz und genau:

(a) Die Abbildung ℓ ist orientierungstreu.

(b) Das Bild von ℓ ist dreidimensional.

(c) Der Kern von ℓ ist eindimensional.

(d) Die Abbildung ℓ ist umkehrbar.

(e) Es gibt einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$, der von ℓ festgehalten wird.

(f) Für die Ebene α mit der Gleichung $x + y + z = 1$ gilt $\ell(\alpha) = \alpha$.

(g) In der Ebene α gibt es einen Fixpunkt.

(h) Die Ebene α besteht aus lauter Fixpunkten.

(i) Die Gleichung $\quad \ell(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ hat genau eine Lösung.