

Stochastische Matrizen, Markowketten

1. Wer den Geysir *Old Faithful* im Yellowstone Park beobachtet, wird feststellen, dass er seine Fontänen in unregelmässigen Abständen hochsteigen lässt. Wer aber die Wartezeit zwischen zwei Ausbrüchen grob in *kurz* und *lang* einteilt und damit etwas Statistik treibt, wird bemerken, dass auf ein kurzes Intervall immer ein langes folgt, nicht aber umgekehrt.

Ein Markow-Modell mit der Systemmatrix

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0.536 \\ 1 & 0.464 \end{bmatrix}$$

imitiert den Wechsel der kurzen und langen Abstände zwischen zwei auf einander folgenden Ausbrüchen von Old Faithful.

- (a) Stellen Sie das Verhalten des Geysirs durch einen gerichteten und bewerteten Graphen dar.
 - (b) Eben wurde ein langer Abstand beobachtet. Begründen oder widerlegen Sie die Behauptung: Nach drei weiteren Ausbrüchen ist die Chance für eine kurze Wartezeit besser als für eine lange?
 - (c) Welche Anteile an kurzen und an langen Wartezeiten sind im langfristigen Mittel zu erwarten?
 - (d) Welche Eigenschaften des Geysirs lassen sich aus den Eigenvektoren ablesen?
 - (e) Welche Eigenschaften des Geysirs folgen aus den Eigenwerten von S ?
 - (f) Inwiefern gleicht das Verhalten des Geysirs dem Wurf einer fairen Münze? Worin unterscheiden sich die Systemmatrizen des Geysirs und jene für den Wurf einer fairen Münze?
2. Ein Fotokopierer ist in einem der beiden Betriebszustände [b] "betriebsbereit" oder [d] "defekt". Jedes defekte Gerät kommt innerhalb von 24 Stunden zur Servicestelle und wird im Laufe eines Tages repariert mit Wahrscheinlichkeit p_r . Der Defekt lässt sich innerhalb eines Tages nicht beheben mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_r$. Ein Gerät im Zustand [b] wird mit Wahrscheinlichkeit p_d im Laufe eines Tages einen Defekt erleiden und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_d$ betriebsbereit bleiben.
 - (a) Welcher bewertete und gerichtete Graph beschreibt dieses Modell?
 - (b) Beschreiben Sie das Verhalten des Systems durch ein Matrixmodell.
 - (c) Welches ist der Gleichgewichtszustand des Systems und was bedeutet er?
 - (d) Angenommen, $p_r = 0.5$. Wie lange dauert eine Reparatur im Mittel? (MTTR='mean time to repair')
 - (e) Angenommen, $p_d = 0.01$. Wie lange kann der Kopierer im Mittel genutzt werden, bis sich der nächste Defekt ereignet? (MTBF='mean time between failure')
 - (f) Ein Hersteller gibt eine MTBF von 1000 Stunden an. Wie gross ist der entsprechende Wert für p_d , wenn ein Zeitschritt von 24 Stunden im Modell angenommen wird?