Matrizen und die komplexen Zahlen

Zusammenfassung

Die folgenden Übungen zeigen, dass ein Teilring der 2×2-Matrizen isomorph zum Körper der komplexen Zahlen ist. Die Übungen lassen sich zum Vertiefen der Matrixoperationen benutzen, wobei die algebraischen Eigenschaften von $\mathbb{C}$ beobachtet werden. Das Vorgehen sieht auf den ersten Blick etwas exotisch aus. Es hat den Vorteil, dass sich die Existenz von $\mathbb{C}$ aus den Eigenschaften einer Teilmenge von reellen 2×2-Matrizen ohne Zusatzaufwand ergibt. Zudem führt die geometrische Interpretation der hier betrachteten speziellen Matrizen als lineare Selbstabbildungen von $\mathbb{R}^2$ gerade zu den Drehstreckungen, also zu den Regeln von De Moivre.

Wir betrachten alle Matrizen der Art

$$C(a,b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

mit reellen Zahlen a, b und setzen in $\mathbb{R}^2$ die Standardbasis als orthonormierte Basis voraus.

Wer die folgenden Aufgaben löst und dabei die besonderen Eigenschaften der Matrizen $C(a,b)$ feststellt, kann einige bemerkenswerte und nützliche Schlussfolgerungen ziehen. Überlegen Sie also nach dem Lösen der einzelnen Aufgaben, was bemerkenswert erscheint und halten Sie alle Ihre Beobachtungen fest, um ein Gesamtbild dieser bemerkenswerten Matrizenmenge zu entwerfen. Achten Sie besonders auf algebraische und geometrische Interpretationen der Ergebnisse.

1. Zu jeder Matrix der Form $C(a,b)$ lässt sich der Vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ betrachten. Was zeigt sich, wenn man Linearkombinationen der Matrizen und ihnen entsprechende Linearkombinationen der zugeordneten Vektoren vergleicht?

2. Berechnen Sie die folgenden Produkte und versuchen Sie aus den Ergebnissen allgemeine Folgerungen zu ziehen.

   (a) $a \cdot C(1,0) + b \cdot C(0,1)$
   (b) $C(a,b) \cdot C(u,v)$ und $C(u,v) \cdot C(a,b)$
   (c) $C(1,0) \cdot C(u,v)$ und $C(0,1) \cdot C(u,v)$
   (d) $C(0,1)^2$, $C(0,1)^3$, $C(0,1)^4$, ...
   (e) $C(a,0) \cdot C(u,v) - a \cdot C(u,v)$ und $C(0,b) \cdot C(u,v) - b \cdot C(u,v)$
   (f) $C(u,v) \cdot C(u,-v)$
   (g) $C(a,b) \cdot (C(u,v) + C(x,y))$ und $C(a,b) \cdot C(u+x, v+y)$
   (h) Für $a^2 + b^2 \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{a^2+b^2} C(a,b) \cdot C(a,-b)$

3. Berechnen Sie $C(0,1)^2$ und lösen Sie die Matrixgleichung $C(x,y)^2 = -C(1,0)$. Was ist bemerkenswert?

4. Zeigen Sie, dass es zu jeder Matrix $C(a,b) \neq C(0,0)$ eine Matrix $C(u,v)$ gibt mit der Eigenschaft $C(a,b) \cdot C(u,v) = C(1,0)$.

5. Berechnen Sie $C(\cos(t),\sin(t))^2$ und $C(\cos(t),\sin(t)) \cdot C(\cos(t),-\sin(t))$.

6. Berechnen Sie $C(\cos(3t),\sin(3t)) - C(\cos(t),\sin(t))^3$.

7. Lösen Sie die Gleichung

   (a) $C(\cos(3t),\sin(3t)) = C(1,0)$

   (b) $C(\cos(3t),\sin(3t)) = C(0,1)$

   (c) $C(\cos(t),\sin(t))^3 = C(1,0)$

   (d) $C(\cos(t),\sin(t))^n = C(1,0)$

8. Ist $C(a,b) \neq C(0,0)$, dann gibt es Zahlen $r > 0$ und t so, dass $C(a,b) = r \cdot C(\cos(t),\sin(t))$ gilt. Ist r und t eindeutig durch a, b bestimmt?

9. Berechnen Sie $C(\cos(\tau),\sin(\tau)) \cdot C(\cos(t),\sin(t))$ und $\rho \cdot C(\cos(\tau),\sin(\tau)) \cdot r \cdot C(\cos(t),\sin(t))$.

10. Begründen oder widerlegen Sie: Wird eine o.n. Basis in $\mathbb{R}^2$ verwendet, so beschreibt die Matrix

$$C(a,b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

    eine Drehstreckung.
    Wie lautet die Antwort für eine beliebige Basis?