Matrizen, Matrixprodukte

1. Es seien zwei Matrizen gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

   (a) Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte, soweit sie definiert sind:

$$AB, BA, ABA, BAB, AA^T, A^TA, BB^T$$

   (b) Wie gross sind jeweils, wenn die Produkte definiert sind, die Dimensionen von Definitionsbereich, Wertebereich, Kern, Bild der zur Matrix gehörigen linearen Abbildung?

2. Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Für welche Matrizen gilt $AX = O$? Gilt dann auch $XA = O$?

3. Es sei

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Berechnen Sie N^2, J^2, $J \cdot N$, $N \cdot J$.

   (b) Wie viele verschiedene 2×2-Matrizen lösen die Matrixgleichung $X^2 = O$?

   (c) Geben Sie mindestens 4 verschiedene 2×2-Matrizen an, welche die Matrixgleichung $X^2 = X$ lösen.

   (d) Welche Eigenschaft der Multiplikation von 2×2-Matrizen macht es möglich, dass es quadratische Gleichungen gibt, bei denen mehr als zwei Matrizen die Einsetzprobe bestehen?

4. Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

   Berechnen Sie die Matrizen $(A+B)^2$ und $A^2 + 2AB + B^2$. Was fällt auf, und wie lässt sich die Beobachtung erklären?

5. Wir betrachten zwei Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Matrizen A^2, A^3 und B^2, B^3. Was fällt auf?

(b) Begründen oder widerlegen Sie $\quad A^2 = A^{-1}$.

(c) Welche der bereits berechneten Matrizen stellt B^{-1} dar?

6. Es sei

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Produkte AB und BA. Was ist bemerkenswert?

(b) Was folgt für singuläre A?

(c) Was folgt, wenn A regulär ist?

(d) Wie lässt sich aus den Ergebnissen für reguläre A eine Formel für A^{-1} finden?

7. Es sei $t \neq 0$ und

$$M(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1/t \\ t & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie M^2.

(b) Berechnen Sie I^2.

(c) Wie viele verschiedene 2×2-Matrizen lösen die Matrixgleichung $X^2 = E$?

(d) Wie viele verschiedene 2×2-Matrizen lösen die Matrixgleichung $X^2 = -E$?

(e) Kommentieren Sie die Ergebnisse und vergleichen Sie mit den quadratischen Gleichungen im Bereich der reellen Zahlen.

8. Erstellen Sie eine Liste von Rechenregeln, die zwar für Produkte in $\mathbb{R}$ gelten, jedoch nicht für Produkte von 2×2-Matrizen.