# Drehungen des Raumes

Wir betrachten die Matrizen

$$\begin{aligned}
D_x(\alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\
D_y(\beta) &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\
D_z(\gamma) &= \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1. Welche lineare Abbildung wird bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ durch die Matrizen $D_x(\alpha)$, $D_y(\beta)$, $D_z(\gamma)$ beschrieben?

2. Berechnen Sie die Zusammensetzungen $D_x(90°)D_y(90°)$ und $D_y(90°)D_x(90°)$. Was ist bemerkenswert?

3. Berechnen Sie $D_z(-90°)D_y(90°)D_z(90°)$. Interpretieren Sie jeden einzelnen Faktor in diesem Ausdruck in der Reihenfolge der Anwendung beim Zusammensetzen. Welche Abbildung entspricht dem Produkt der drei Matrizen?

4. Der Einheitswürfel von $\mathbb{R}^3$ wird der Reihe nach abgebildet mit den Matrizen $D_x(30°)$, $D_y(45°)D_x(30°)$, $D_z(60°)D_y(45°)D_x(30°)$. Welchen Schatten erzeugen die Ecken und Kanten, wenn der Würfel jeweils in der Endlage senkrecht auf die $(x|y)$-Ebene projiziert wird?

5. Programmieren Sie Ihren Rechner so, dass er den Umriss der Einheitskugel in Normalprojektion in der $(x|y)$-Ebene zeichnet. Nach der Anwendung einer Drehung $D$ schneiden die Bilder der Koordinatenebenen drei Grosskreise aus der Einheitskugel aus. Welche Parameterdarstellungen zeichnen die Schatten dieser Grosskreise in der $(x|y)$-Ebene? Lassen Sie die Schatten der drei Grosskreise in der Grafikanzeige des Rechners aufzeichnen.

6. Welches ist die Drehachse von $D = D_x(30°)D_y(45°)$? Wie gross ist der Drehwinkel bei der Abbildung $D$? Welches sind die Eigenwerte von $D$?

7. Welche Kombination von Abbildungen der Art $D_y(.)$, $D_z(.)$ beschreibt eine Drehung des Raumes um die Achse $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ und den Winkel $30°$?

   Inwiefern ist das Ergebnis bemerkenswert? Wie lässt sich die Aussage verallgemeinern? Was hat die Aufgabe mit einrr cardanischen Aufhängung zu tun?

8. Es sei $D$ eine orthogonale $3 \times 3$-Matrix. Bezogen auf die Standardbasis beschreibt sie eine Drehung.

   (a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Drehwinkel $\alpha$ und den Eigenwerten von $D$?

   (b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenvektoren von $D$ und der Drehachse?

   (c) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Spur von $D$ und dem Drehwinkel?