

## Matrixmodelle und Wirtschaft

1. In einer Agglomerationsgemeinde gibt es drei Einkaufszentren, nennen wir sie  $C$ ,  $D$ ,  $M$ . Die Besitzer der Einkaufszentren interessierten sich vor allem dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Kunde beim nächsten Einkauf wieder im gleichen Laden einkaufen wird, beziehungsweise wie oft Wechsel zu den beiden Konkurrenten vorkommen. Es wurden Umfragen unter je 200 Kunden im Januar und im März durchgeführt. Die Ergebnisse werden durch folgende Tabellen zusammengefasst. In der Kolonne  $X$  und der Zeile  $Y$  ist jeweils die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass ein Kunde nach einem Einkauf bei  $X$  den nächsten Einkauf bei  $Y$  tätigen wird.

Januar	$C$	$D$	$M$
$C$	0.8	0.1	0.1
$D$	0.15	0.7	0.15
$M$	0.05	0.2	0.75

März	$C$	$D$	$M$
$C$	0.8	0.2	0
$D$	0.15	0.7	0.05
$M$	0.05	0.1	0.95

- (a) Wie ist die prozentuale Gleichgewichtsverteilung der Kunden auf die drei Anbieter gemäss den Daten der Januarumfrage?
- (b) Was ist an dieser Verteilung überraschend und wie lässt sich das Ergebnis plausibel machen?
- (c) Wie ist die prozentuale Gleichgewichtsverteilung der Kunden auf die drei Anbieter gemäss den Daten der Märzumfrage?
- (d) Welche Schlüsse ziehen Sie aus dem Vergleich der Verteilungen, die sich aufgrund der beiden Umfragen ergeben?
2. Ein Modell für einen abgeschlossenen Wirtschaftsraum macht folgende Annahmen: Die Wirtschaft besteht aus vier Wirtschaftszweigen: (A) Landwirtschaft und Nahrungsmittelproduktion, (B) Industrie, (C) Energieversorgung, Transporte, Entsorgung, (D) Dienstleistungen und Verwaltung.

Im Laufe eines Zeitschrittes finden Geldtransaktionen zwischen den verschiedenen Zweigen statt und zwar gelangen von einem Franken, der sich im Wirtschaftszweig ( $X$ ) befindet im nächsten Zeitschritt ein Anteil von  $p_{XY}$  in den Zustand ( $Y$ ). Der Geldfluss lässt sich also nach dem Muster einer Markowkette durch eine  $4 \times 4$ -Matrix  $S$  beschreiben. Angenommen,

$$S = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.20 & 0.15 & 0.15 \\ 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.15 \\ 0.20 & 0.40 & 0.25 & 0.15 \\ 0.20 & 0.10 & 0.30 & 0.55 \end{bmatrix}$$

- (a) Warum bleibt in dieser Wirtschaft die Geldmenge erhalten?
  - (b) Warum strebt die Geldverteilung in dieser Wirtschaft einem Gleichgewicht zu? Welches ist die Gleichgewichtsverteilung auf die vier Wirtschaftszweige?
  - (c) Wie gross ist die Chance, dass ein Franken, der zur Zeit 0 im Dienstleistungssektor ist, sich nach fünf Zeitschritten wieder im Dienstleistungssektor befindet? Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt er über alle fünf Zeitschritte im Dienstleistungssektor?
3. Angenommen, in einem Land gibt es vier Haftpflichtversicherungen, nennen wir sie  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ . Alle Verträge gelten nur für ein Jahr. Jeweils im November werden die Versicherten aufgefordert, die Verträge zu erneuern oder eine andere Versicherung zu wählen. Das Kundenverhalten wurde in Umfragen ermittelt. Die Ergebnisse sind mit einer stochastischen Matrix  $S$  dargestellt.

$$S = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.7 & 0.05 & 0.1 \\ 0.1 & 0.15 & 0.8 & 0.1 \\ 0.25 & 0.05 & 0.05 & 0.75 \end{bmatrix}$$

- (a) Welches Kundenverhalten beschreibt die Zahl 0.25 in der Matrix  $S$ ?
- (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der heute bei  $H_4$  versichert ist,
  - dieser Versicherung vier aufeinander folgende Jahre lang treu bleibt?
  - nach vier Jahren wieder zu den Kunden dieser Versicherung zählt?
- (c) Welche Bedeutung hat die Matrix  $S^{20}$  im Rahmen dieses Modells?
- (d) Wie lässt sich einsehen, dass 1 ein Eigenwert von  $S$  ist?
- (e) Welche praktische Bedeutung hat der Eigenwert 1 im betrachteten Zusammenhang?
- (f) Welche prozentuale Verteilung der Kunden auf die Versicherungen  $H_1, \dots, H_4$  sagt das Modell für die ferne Zukunft voraus? Was hat diese Voraussage mit Eigenwerten und Eigenvektoren zu tun? Mit welcher der bisherigen Antworten lässt sich ein Plausibilitätstest machen?
- (g) Inwiefern ist das Modell nicht realistisch, welche Tatsachen blendet es aus? Nennen Sie mindestens zwei Beispiele.