Atmosphärenmodelle und Differentialgleichungen

H.R. Schneebeli und A. Vogelsanger

Zusammenfassung

Die hydrostatische Grundgleichung, eine Differentialgleichung, bildet die Grundlage für die mathematische Beschreibung von eindimensionalen *Modellatmosphären.* Die Physik liefert dazu noch Materialgleichungen, etwa die Gleichung, welche Beziehungen zwischen Druck, Temperatur und Dichte eines idealen Gases formuliert. Konkrete Anwendungen der Mathematik und Physik werden beim Entwickeln von Atmosphärenmodellen verknüpft. Die drei Grössen *Temperatur, Druck, Höhe* sind in den Modellen miteinander durch Gesetze verbunden. Ist die Temperatur als Funktion des Druckes bekannt und ist zudem noch für eine Höhe der Druck vorgeschrieben, so lässt sich die Höhe als Funktion von Temperatur und Druck bestimmen oder umgekehrt kann der Druck auf vorgegebener Höhe ermittelt werden, wenn man den Druck auf einer einzigen Höhe kennt und der Temperaturverlauf als Funktion der Höhe bekannt ist.

Der Text wird durch verschiedene Aufgaben ergänzt.

Voraussetzungen: Grundbegriffe und Kenntnisse aus der Analysis (Ableitung, Integral als Begriffe, Hauptsatz der Integralrechnung, Ableitungsregeln), der Numerik (numerische Integration, Interpolation) und der Physik (Gasgleichung).

1 Eindimensionale Atmosphärenmodelle

Die Lufthülle der Erde ist die Wetterküche. Diesem hochkomplexen System wird keine mathematische Beschreibung gerecht. Vereinfachungen sind nötig. Beispielsweise kann man versuchen, einige wenige Parameter zu isolieren und ihre gegenseitige Abhängigkeit zu untersuchen. Wir betrachten Modelle mit nur einer räumlichen Dimension, der Höhe. Zudem wird angenommen, dass diese Modellatmosphäre sich im Gleichgewicht befindet. Daher gibt es keine zeitlichen Veränderungen. Unter diesen drastisch vereinfachenden Annahmen lassen sich aber immer noch interessante Einblicke in das Verhalten der uns umgebenden Natur gewinnen. Die verwendete mathematische Methode beschreibt die Atmosphären nur lokal mit Hilfe von Differentialgleichungen. Deren Lösungen sind Funktionen, welche eine physikalische Grösse global beschreiben, etwa den Druck als Funktion der Höhe. Die Umkehrfunktion der Druckfunktion, welche aus bekannten Druckwerten die zugehörigen Höhen berechnet, heisst auch Barometerformel.

In einfachen Fällen lassen sich die auftretenden Differentialgleichungen formal exakt lösen. Dieser Fall tritt beim Formulieren von so genannten Standardatmosphären ein. In anderen Anwendungen sind die Daten bloss als Listen einzelner Messwerte gegeben. Dann lassen sich numerische Verfahren nutzen, um praktisch brauchbare Näherungen für die Lösungen der Differentialgleichungen zu gewinnen. Beide Aspekte werden exemplarisch vorgeführt.

Alle Berechnungen erfolgen mit SI-Einheiten.

2 Die hydrostatische Grundgleichung

Die Lufthülle der Erde wird durch die Gravitationskraft an die Erde gebunden. Die Dynamik der Atmosphäre wird durch die Sonneneinstrahlung angetrieben und durch mannigfache Wechselwirkungen mit den Ozeanen, den Gebirgen aber auch durch die Erdrotation oder die Phasenumwandlungen des Wassers beeinflusst. Der Verzicht, die Dynamik des Wettergeschehens zu beschreiben, führt dazu, eine Atmosphäre zu betrachten, auf die nur die Gravitationskraft wirkt. Eine solche Modellatmosphäre kann man sich als Luftsäule denken. Würden sich in dieser Luftsäule Vertikalbewegungen ereignen, so müsste an der ruhenden Erdoberfläche notwendigerweise eine Beschleunigung auftreten. Eine *eindimensionale Atmosphäre im hydrostatischen Gleichgewicht* bezeichnet ein Denkmodell, in welchem die Luftmassen ruhen. Nach Modellannahme verursacht das Gewicht, der oberhalb einer gegebenen Höhe z lastenden Luftmassen $m(z)$, den auf der Höhe z messbaren Luftdruck $p(z)$.

Wir betrachten eine Luftsäule über einer quadratischen Grundfläche der Grösse $A(0)$ auf der Meereshöhe $z = 0$. Die Mantellinien der Säule verlaufen parallel zum Gravitationsfeld, so dass auf einer beliebigen Höhe z die Querschnittsfläche $A(z)$ auftritt. Zwischen $A(z)$ und $A(z + \Delta z)$ liegt das Volumen $\Delta V \approx A(z)\Delta z$. Mit der Luftdichte $\rho(z)$ auf der Höhe z lässt sich die Masse im Volumen ΔV bestimmen zu $\Delta m(z) \approx \rho(z) \cdot \Delta V$. Zwischen den beiden benachbarten Höhen z und $z + \Delta z$ verursacht das Gewicht der Luftmasse $\Delta m(z)$ eine Druckdifferenz

$$\Delta p(z) \approx -g(z) \cdot \rho(z) \cdot \Delta z \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta p(z)}{\Delta z} \approx -g(z) \cdot \rho(z)$$

Wobei in voller Allgemeinheit angenommen wird, dass die Erdbeschleunigung $g : z \mapsto g(z)$ eine Funktion der Höhe z sein kann.

Beim Grenzübergang $\Delta z \to 0$ wird nun wie üblich angenommen, dass die in der Natur auftretenden Funktionen differenzierbar seien und dass die durch $\approx$ angedeuteten Näherungen bei der Limesbildung zu exakten Gleichheiten werden. Also steht am Schluss die *Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht* in der Form einer Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -g(z) \cdot \rho(z)$$

Bemerkung Die Beschreibung des Modelles lässt mehrere Deutungen und Präzisierungen zu:

- über einer *flachen* Erde beschreibt das Modell einen nach oben unbegrenztes Quader über einer Grundfläche A auf Meereshöhe $z = 0$. Diese Vorstellung ist verträglich mit Galileis Annahme, dass die Erdbeschleunigung g konstant sei.

- über einer kugelförmigen Erde betrachten wir eigentlich ein nach oben unbegrenztes Volumen, das entsteht, indem die Fläche $A = A(0)$ auf Meereshöhe vom Erdmittelpunkt aus nach aussen projiziert wird. Genau gesehen sind die Flächenstücke $A(z)$ nun Teile von Sphären mit Radius $R + z$, wobei R den Erdradius bezeichnet. Folglich ist das Produkt $g(z) \cdot A(z)$ nach Newtons Gravitationsgesetz von z unabhängig. Bei wachsendem z kompensiert die Zunahme des Flächeninhalts von A die Abnahme von g exakt, wenn die Masse der Luft gegenüber der Erdmasse vernachlässigt wird.

- Die analytische Behandlung der Gleichgewichtsbedingung in einem Koordinatensystem über einem rotierenden Geoid mit inhomogener Massenverteilung übersteigt unsere Möglichkeiten, weil sich dann eine breitenabhängige Zentrifugalkraft mit einem lokal variablen Gravitationsfeld vermischt. Im Standardwert für die Erdbeschleunigung $\bar{g}(0) = 9.80665[\mathrm{ms}^{-2}]$ auf Meereshöhe bei einer Breite von 45° ist ein Zentrifugalanteil enthalten.

Höhe z [m ü M]	Geopotenzial $W(z)/g_n$ [gpm]
0	0
2000	2001
4000	4003
6000	6006
8000	8010
10000	10016
...	...
20000	20063

Tabelle 1: Höhe und Geopotenzial, ICAO-Atmosphäre

Da wir nur eine dünne Schicht der unteren Atmosphäre in unsere Anwendungen einbeziehen, folgen wir der Tradition der Meteorologie: Die Erdbeschleunigung g wird als konstant angenommen. An Stelle der geometrischen Höhe z tritt das Geopotenzial

$$W(z) = \int_0^z g(h)\,\mathrm{d}h$$

Es wird in der Einheit Joule pro Kilogramm gemessen. Üblicherweise wird in der Meteorologie das Geopotenzial mit der Einheit *geopotenzielle Meter* [gpm] versehen. Ein gpm entspricht der Energie, die nötig ist, um ein Kilogramm Masse unter Normalbedingungen bei mittlerer Erdbeschleunigung $\bar{g}$ einen Meter anzuheben. 1 [gpm]= g_n[J/kg], wobei g_n einem durch Konvention festgelegten Zahlenwert der mittleren Erdbeschleunigung entspricht. (Die Weltorganisation für Meteorologie WMO benutzt $g_n = 9.8$, einen Normwert für die Erdbeschleunigung auf Meereshöhe bei 38° nördlicher Breite. Die ICAO verwendet den Normwert $g_n = \bar{g} = 9.80665$, entsprechend $\varphi = 45°$ N und $z = 0$.) Mehr zur Variabilität von g zeigt Aufgabe 1.

Die Tabelle 1 zeigt: In mittleren Breiten beträgt der relative Unterschied zwischen der geometrischen Höhe in Metern und dem Geopotenzial, angegeben in geopotenziellen Metern, in der Troposphäre weniger als 0.2%.

Höhe und Geopotenzial In den folgenden Ausführungen und Anwendungen bezeichnet z die geometrische Höhe in Metern [m] über Meer oder das Geopotenzial in [gpm]. Wir sind uns der begrifflichen Ungenauigkeit bewusst. Wenn es sinnvoll erscheint, kommen wir auf die Unterscheidung zurück. Im Rahmen dieser Arbeit soll es erlaubt sein, sich den abstrakten Begriff Geopotenzial mit der geometrischen Höhe zu veranschaulichen.

Die hier zu besprechenden Methoden unterliegen weiteren Genauigkeitsbeschränkungen. Die Güte der Modellierung wird ja auch durch veränderliche meteorologische Parameter beeinträchtigt. In Wirklichkeit ändern sich der Wassergehalt der Luft, die Lufttemperatur, der Luftdruck laufend. In praktischen Anwendungen der barometrischen Höhenbestimmung ist entscheidend, wie genau die *aktuellen Werte* der meteorologisch relevanten Parameter bekannt sind. Alle benötigten Modellparameter lassen sich zwar messen. Wer aber mit einem Barometer die absolute Höhe seines Standortes bestimmen will, muss mit einer Unsicherheit von mindestens rund ±5 m rechnen, die sich bei aller Sorgfalt nicht vermeiden lässt.

Aufgaben

1. Holmboe hat 1945 eine empirische Formel für die Abhängigkeit der Erdbeschleunigung g von der Höhe z und der geographischen Breite φ angegeben. In SI-Einheiten lautet die Formel
$$g(\varphi, z) = 9.80617 \cdot (1 - 0.00259 \cdot \cos(2\varphi))(1 - 3.14 \cdot 10^{-7} z)$$
   (a) Wie gross ist der Mittelwert von $g(\varphi, 0)$, für $0 \leq \varphi \leq 90°$?
   (b) Wo treten die Extrema für $g(\varphi, 0)$ auf?
   (c) Wie gross ist die relative Abweichung der Extrema vom Mittelwert?

2. Wir vergleichen die konstante Ergbeschleunigung $g_n = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ mit einer höhenabhängigen Erdbeschleunigung $g(z) = 9.80665 \cdot (1 + z/R)^{-2} \text{ m s}^{-2}$, wo $R \approx 6375$ km für den mittleren Erdradius steht.
   (a) Für welche Höhe z_1 gilt $g(z_1) = g_n$?
   (b) Für welche Höhe z_2 entspricht g_n dem Mittelwert von $g(z)$ im Bereich $0 \leq z \leq z_2$? Warum ist $z_2 \approx 2 \cdot z_1$ plausibel?
   (c) Erklären Sie qualitativ, warum oberhalb von z_2 mit zunehmender Höhe der Unterschied zwischen dem Geopotenzial in [gpm] und der geometrischen Höhe anwächst. Was ist der physikalische Grund?

3 Modellatmosphären

Wir sprechen von einer 'Modellatmosphäre', wenn in der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\bar{g} \cdot \rho(z)$$

ein Druckwert $p(z_0)$ und eine Dichtefunktion $\rho : z \mapsto \rho(z)$ vorgegeben sind.

Bemerkung

- Jede Dichteverteilung $\rho : z \mapsto \rho(z)$ mit $\rho(z) \geq 0$ kann prinzipiell ein 'Atmosphärenmodell' im hydrostatischen Gleichgewicht beschreiben. Physikalisch sinnvoll sind jedoch besonders solche Dichteverteilungen, die *stabile Gleichgewichte* beschreiben. Nur monoton abnehmende Dichteverteilungen können zu stabilen Gleichgewichten führen. Daher verlangen wir $\rho'(z) \leq 0$ für alle z. Sonst könnte durch eine Umschichtung der Massen eine neue Verteilung erreicht werden, deren Schwerpunkt tiefer liegt. Bei dieser Umlagerung würde potenzielle Energie frei gesetzt. Daher könnten kleine Veränderungen dazu führen, dass das System sein instabiles Gleichgewicht verlässt und spontan einen energetisch günstigeren Zustand anstrebt.

- Sinnvoll sind insbesondere Dichteverteilungen, welche beobachtete Materialeigenschaften berücksichtigen. Unter 'Atmosphäre' versteht man intuitiv Materie in einem gasförmigen Zustand. Nimmt man ferner an, dass die Gase nicht ionisiert sind, so ist es sinnvoll die *Gasgleichungen* als einfachste Beschreibung für das Verhalten von Gasen zu benutzen. Die *chemische Zusammensetzung* der Luft wird als konstant angenommen. *Phasenumwandlungen* bleiben unberücksichtigt. Man spricht von einer *trockenen Atmosphäre*, wenn sie keine Form von Wasser enthält.

Höhe z [m ü M]	Temperatur $T(z)$ [K]	Luftdruck $p(z)$ [Pa]
0	288.15	101325
1000	281.65	89876
2000	275.15	79498
4000	262.15	61645
5000	255.65	54026
11000	216.65	22637
20000	216.65	5475

Tabelle 2: Temperatur und Druck auf ausgewählten Höhen, ICAO-Atmosphäre

3.1 Konstante Dichte, homogene 'Atmosphären'

Das einfachste Modell geht von einer konstanten Dichte $\rho(z) = \rho_0$ aus. Das ist mit guter Näherung für eine Schicht von wenigen Metern Dicke in der Atmosphäre eine erlaubte Vereinfachung. Aber dasselbe Modell erlaubt auch Druckberechnungen in der Hydrosphäre oder der Lithosphäre.

Die Modellgleichung $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\bar{g} \cdot \rho_0$ sagt, dass der Druck mit der Höhe konstant abnimmt. Die Funktion $p : z \mapsto p_0 - \bar{g} \cdot \rho_0 \cdot z$ ist Lösung der Modellgleichung.

Beispiele

Luftdruckänderung im Kleinen In einer wenige Meter dicken Luftschicht zwischen z und $z + \Delta z$ ist die Luftdichte ρ mit guter Näherung konstant. Die Modellgleichung sagt dann aus, dass die Veränderung des Luftdruckes bei einer Höhenveränderung um Δz gegeben ist durch $\Delta p = -\bar{g} \cdot \rho \cdot \Delta z$. Damit lässt sich die Grösse der *barometrischen Höhenstufe* bestimmen, das ist die Grösse Δz, bei welcher $\Delta p = -1$ hPa wird. Daraus ergibt sich $\Delta z = 100/(\bar{g} \cdot \rho)$ für die Grösse der Höhenstufe.

Druck in einer Wassersäule Mit guter Näherung ist Wasser im Gegensatz zu Gasen inkompressibel. Damit ist die Dichte ρ vom Druck unabhängig. Allerdings hängt die Dichte von Wasser von weiteren Parametern ab, etwa der Temperatur oder von im Wasser gelösten Stoffen (Salzgehalt). Auf der Wasseroberfläche bei $z = 0$ lastet die Luftsäule und übt einen Druck p_0 aus. Mit der Modellgleichung folgt für den Druck in einer Wassersäule von konstanter Temperatur

$$p(z) = p_0 - \bar{g}\rho_0 \cdot z \quad \text{für } z \leq 0 \text{ und mit } \rho_0 \approx 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

Gebirgsdruck Die Modellgleichung lässt sich auch für Druckabschätzungen in der Erdkruste anwenden. In der Lithosphäre ist die Gesteinsdichte im wesentlichen nur materialabhängig und liegt im Bereich $2000 < \rho < 3000$ kg m^{-3}. Die inneren Kräfte im Festkörper werden dabei vernachlässigt. Daher ist die Voraussage des Modelles nur grob und ist anwendbar erst ab einer gewissen Tiefe, in welcher das Gewicht der höher liegenden Gesteinsschichten alle anderen Kräfte dominiert.

Aufgaben

3. Schätzen Sie den Gebirgsdruck, dem ein Tunnel mit einer Gesteinsdecke der Dichte $2.3 \cdot 10^3$ kg m^{-3} und einer Mächtigkeit von 2000 m widerstehen muss.

4. Welche Grössenordnung erreicht der Gebirgsdruck in einem Bohrloch der Tiefe z für $z = -5$ km (-10 km, -15 km) etwa?

5. Ein Tauchboot hat ein kreisförmiges Bullauge von 20 cm Durchmesser. Welcher Kraft muss das Bullauge widerstehen bei einer Tauchtiefe von z Metern? Konkret: $z = -100$, -1000, -10000 m)

6. Welche Werte für die barometrische Höhenstufe ergeben sich in der ICAO-Atmosphäre mit den Daten von Tabelle 2? [Hinweis: Mit der Gasgleichung lässt sich die Luftdichte aus der absoluten Temperatur und dem Druck bestimmen.]

7. Kritische Fragen zu den Modellannahmen:

   (a) Warum tritt bei jedem Modell, das eine konstante Dichte $\rho > 0$, eine konstante Schwerebeschleunigung $g > 0$ und die hydrostatische Grundgleichung beinhaltet, eine endliche Obergrenze für die Massenverteilung auf?

   (b) Auf welcher Höhe z_{max} liegt die Obergrenze einer Atmosphäre mit einer konstanten Dichte von $\rho = 1.2\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, einem Druck $p(0) = 101325$ Pa auf Meereshöhe und dem Wert $\bar{g} = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ für die Schwerebeschleunigung? [z_{max} heisst *Skalenhöhe*]

   (c) Wie lässt sich allgemein z_{max} aus den Daten $p(0) > 0, \bar{g} > 0, \rho > 0$ berechnen?

   (d) Lässt ein Modell mit konstanter Dichte $\rho > 0$ und einer variablen Schwerebeschleunigung, die Newtons Gravitationsgesetz für eine kugelförmige Erde mit Radius R entspricht, das heisst, $g(z) = g(0)(1 + z/R)^{-2}$, ebenfalls den Schluss zu, dass notwendigerweise eine Obergrenze der Massenverteilung auftritt?

3.2 Isotherme Atmosphären

Eine Atmosphäre, in der die Lufttemperatur T nicht von der Höhe abhängt, heisst *isotherm*. Das ICAO-Modell der Atmosphäre verwendet im Bereich $11000 \leq z \leq 20000$ [m] eine isotherme Schicht.

Aus der Zustandsgleichung für ideale Gase folgt: Bei gegebener Temperatur T sind Luftdruck und Luftdichte zu einander proportional. Daher hat die Modellgleichung für den Luftdruck in einer isothermen Luftschicht die Gestalt $p'(z) = C \cdot p(z)$ mit einer Konstanten $C < 0$. Diese lineare, homogene Differentialgleichung hat Lösungen der Form

$$p(z) = p(z_0) \exp(C \cdot (z - z_0))$$

Die Konstante C ergibt sich aus der Gasgleichung für trockene Luft der Temperatur T zu

$$C = -\frac{\bar{g}}{R_L \cdot T}$$

wobei $R_L \approx 287.058\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ die spezifischen Gaskonstante für Luft bezeichnet. Im Beispiel $T = 288.15$ K wird $C \approx -1.185584 \cdot 10^{-4}$.

Korrekturen für feuchte Luft Die bisherigen Überlegungen gelten für trockene Luft. Der allenfalls vorhandene gasförmige Wasserdampf, die Luftfeuchte, verändert das Molekulargewicht bei sonst gleichen Bedingungen. Eigentlich müsste nun die spezifische Gaskonstante für Luft, R_L, als Funktion der Luftfeuchte betrachtet werden. In der Praxis zieht man es vor, der Luftfeuchte Rechnung zu tragen, indem die gemessene Temperatur T durch die virtuelle Temperatur T_v ersetzt wird. Die Differenz $T_v - T$ heisst virtuelle Temperaturkorrektur. Sie ist gerade so definiert, dass bei gleichem Druck die Dichte von Luft der Temperatur T und der spezifischen Feuchtigkeit s und jene von trockener Luft [d.h. $s = 0$] und der Temperatur T_v übereinstimmt. Stets gilt $T_v \geq T$. Alle unsere Überlegungen gelten unverändert auch für feuchte Luft, wenn T_v statt T verwendet wird.

Aufgaben

8. In der ICAO-Atmosphäre gibt es eine isotherme Schicht im Bereich $11000 \leq z \leq 20000$. Wie lässt sich mit den Daten der Tabelle 2 der Druckverlauf exakt rekonstruieren?

   (a) mit einer *geeigneten Interpolation*

   (b) mit der Lösung der Differentialgleichung für den Druckverlauf in der isothermen Atmosphäre

   Wie gut stimmen die beiden Methoden überein?

9. Angenommen, der Bodendruck beträgt 101325 Pa bei einer Luftdichte von 1.3 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

   (a) Wie lässt sich aus diesen Daten mit Hilfe der Differentialgleichung $p' = C \cdot p$ der Druckverlauf in einer isothermen Atmosphäre im hydrostatischen Gleichgewicht rekonstruieren? Wie gross ist C?

   (b) Welche Höhenzunahme bewirkt eine Halbierung des Luftdruckes?

   (c) Für welche Höhe z gilt in dieser Modellatmosphäre, dass 99.9% der Luftmassen unterhalb von z liegen? Vergleichen Sie z mit dem Erdradius.

10. Bekanntlich gilt $p'(z)/p(z) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln(p(z))$. Warum kann es sinnvoll sein, in einer isothermen Atmosphäre $\ln(p)$ anstelle von p als Funktion von z zu betrachten? Wie lautet die Modellgleichung für $\ln(p(z))$ in der isothermen Atmosphäre?

11. Auf welcher Höhe liegt der Schwerpunkt der Masseverteilung in einer isothermen Atmosphäre der Temperatur T, mit dem Bodendruck $p(0)$ und mit einer konstanten Schwerebeschleunigung $g > 0$?

12. Es bezeichne z_{max} die Skalenhöhe. Welchen Wert nimmt der Quotient $p(0)/p(z_{\mathrm{max}})$ in einer isothermen Atmosphäre an? [Vgl Aufgabe 7b]

3.3 Konstanter Temperaturgradient

Eine Atmosphäre, in welcher der vertikale Temperaturgradient $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$ konstant ist, heisst *polytrop*. Gleichbedeutend ist die Bedingung $T : z \mapsto T(z) = T_0 + \gamma \cdot z$ mit einer Konstanten γ.

Das ICAO-Atmosphärenmodell besteht aus mehreren Schichten mit polytropen Atmosphären. Eine isotherme Atmosphäre entspricht dem Spezialfall $\gamma = 0$.

Aus der hydrostatischen Grundgleichung und der Gasgleichung ergibt sich eine Differentialgleichung für den Druck in einer polytropen Atmosphäre:

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = -\bar{g} \cdot \frac{1}{R_L \cdot T(z)} = -\frac{\bar{g}}{R_L} \frac{1}{T_0 + \gamma \cdot z}$$

Wegen $\quad p'(z)/p(z) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(p(z))$ $\quad$ folgt durch Integration

$$\ln(p(z)) - \ln(p(0)) = -\frac{\bar{g}}{R_L}\frac{1}{\gamma}(\ln(T_0 + \gamma \cdot z) - \ln(T_0))$$

Auflösen nach $p(z)$ ergibt

$$p : z \mapsto p(0)(1 + a \cdot z)^b \quad \text{mit } a = \gamma/T_0 \text{ und } b = -\frac{\bar{g}}{\gamma R_L}$$

Aufgaben

13. Im Bereich $0 \leq z \leq 11000$ m ist die ICAO-Atmosphäre durch ein polytropes Modell gegeben mit den Daten:
    $g = 9.80665\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $p(0) = 101325$ Pa, $T(0) = 288.15$ K, $\gamma = -6.5 \cdot 10^{-3}$ $\mathrm{K\,m^{-1}}$

    Welche Formel beschreibt den Luftdruck $p : z \mapsto p(z)$ in der ICAO-Atmosphäre. [Vgl. Tabelle 2]

14. Modellkritik: Welcher physikalische Sachverhalt erzwingt, dass jedes polytrope Atmosphärenmodell mit $\gamma < 0$ nur auf eine Schicht endlicher Dicke anwendbar ist? Hinweis: Auf welcher Höhe sagt das Modell eine Nullstelle von $p(z)$ voraus?

15. Nach Euler gilt die Beziehung $\lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n = \exp(x)$. Führen Sie nach diesem Muster einen Grenzübergang $\gamma \to 0$ in der Formel für den Druck in einem polytropen Atmosphärenmodell durch. Was zeigt das Ergebnis?

16. Lassen Sie mit einem geeigneten Programm den Verlauf von $\log(p(z))$ als Funktion von z auftragen, wenn die Funktion $p : z \mapsto p(z)$ den Druckverlauf in einer

    (a) isothermen Atmosphäre mit $p(0) = 10^5$ Pa und $T(0) = 273$ K

    (b) polytropen Atmosphäre mit $p(0) = 10^5$ Pa, $T(0) = 273$ K und $\gamma = -6 \cdot 10^{-3}$ $\mathrm{K\,m^{-1}}$

    beschreibt.

    Beurteilen Sie das Verhalten der beiden Graphen und formulieren Sie Ihre Schlussfolgerungen.

17. (a) Begründen Sie die Behauptung:
    Aus der hydrostatischen Grundgleichung $p'(z) = -\bar{g}\rho(z)$ folgt, dass die Dichte $\rho : z \mapsto \rho(z)$ genau dann konstant ist, wenn $p''(z) = 0$ für alle z gilt.

    (b) In einer polytropen Atmosphäre gilt eine Beziehung der Art $p(z) = p_0(1 + a \cdot z)^b$. Für welches b wird die Dichte in einer polytropen Atmosphäre konstant?

    (c) Der einzige frei wählbare physikalische Parameter in b ist der Temperaturgradient γ. Für welchen Wert γ_c tritt eine Atmosphäre konstanter Dichte auf? Welchen qualitativen Dichteverlauf sagt das polytrope Modell voraus in den Fällen $\gamma > \gamma_c$, beziehungsweise $\gamma < \gamma_c$? Warum ist in der Natur nur einer der beiden Fälle beobachtbar? Welcher Fall ist es?

18. In einer polytropen Atmosphäre mit $\gamma \neq 0$ ist die Temperatur eine lineare Funktion der Höhe. Was spricht in der Praxis dagegen, Höhenbestimmungen allein aufgrund der Lufttemperatur durchzuführen?

19. Ausgehend von den Daten
z_0, $p_0 = p(z_0)$, $T_0 = T(z_0)$ und z_1, $T_1 = T(z_1)$ wird berechnet

$$\tilde{p}_1 = p_0 \cdot \exp\left(\frac{6g}{R_L} \cdot \frac{z_0 - z_1}{T_0 + T_1 + 4\sqrt{T_0 \cdot T_1}}\right)$$

Wie gut ist die Näherung $\tilde{p}_1$ für den Druck $p_1 = p(z_1)$ in einer polytropen Atmosphäre mit den gleichen Daten? Untersuchen Sie meteorologisch plausible Fälle numerisch und loten Sie die Grenzen der Näherung aus. Dokumentieren Sie die Beispiele und die festgestellten relativen Abweichungen zwischen $\tilde{p}_1$ und p_1.

4 Barometrische Höhenbestimmung

Die Druckfunktion $p : z \mapsto p(z)$ in einer Atmosphäre im hydrostatischen Gleichgewicht ist monoton fallend, denn wegen $\bar{g} > 0$ und $\rho(z) > 0$ folgt $p'(z) = -\bar{g}\,\rho(z) < 0$. Daher lässt sich die Höhe z eindeutig aus dem Luftdruck bestimmen. Wir bezeichnen die Umkehrfunktion $p^{-1} : p \mapsto z = p^{-1}(p)$ einfach mit $z : p \mapsto z(p)$. Es gelten also die Beziehungen $z(p) = z$ und $p(z) = p$. Mit der Ableitungsformel für Umkehrfunktionen und der hydrostatischen Grundgleichung folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\, z(p) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, p(z(p))} = -\frac{1}{\bar{g} \cdot \rho(z(p))}$$

Drückt man nun die Dichte ρ gemäss der Gasgleichung durch die absolute Temperatur T und den Druck p aus, so folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\, z(p) = -\frac{R_L}{\bar{g}} \frac{T(z(p))}{p(z(p))} = -\frac{R_L}{\bar{g}} \frac{T(p)}{p}$$

und durch Integration zwischen zwei beliebigen Druckwerten p_0 und p_1

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\, z(p)\, \mathrm{d}p = z(p_1) - z(p_0) = -\frac{R_L}{\bar{g}} \int_{p_0}^{p_1} \frac{T(p)}{p}\, \mathrm{d}p = \frac{R_L}{\bar{g}} \int_{p_1}^{p_0} T(p)\, \mathrm{d}\ln(p)$$

Diese Rechnung zeigt: Wenn man in einer trockenen Atmosphäre den Verlauf der Temperatur T als Funktion des Druckes p kennt, so lassen sich Höhendifferenzen durch Integration formal berechnen. In der Praxis sind immer nur endliche Stichproben mit begrenzter Messgenauigkeit vorhanden. Zudem wird die Luftfeuchte u als Funktion von p erfasst, um die virtuelle Temperatur T_v als Funktion von p, T, u zu ermitteln. Wenn dann aus Messungen einer Radiosonde eine nach fallenden Druckwerten geordnete Liste $\{(p_k, T_v(p_k))\}_{k=1\ldots n}$ gewonnen wurde, lassen sich jedem Paar $(p_k, T_v(p_k))$ eine rechnerisch ermittelte Höhe z_k zuordnen. Die Datensätze mit Druck, Temperatur und Feuchte als Funktionen der Höhe werden für numerische Prognosemodelle benötigt.

Aufgaben

20. Aneroidbarometer messen Luftdruckänderungen und sind so gebaut, dass ihre Anzeige daraus eine Höhendifferenz in einer isothermen Atmosphäre angibt. Wer einen traditionellen Höhenmesser im Gebirge benutzt, setzt das Gerät eigentlich zum Interpolieren ein, denn beim Weggang von einem Kartenpunkt mit bekannter Kote wird diese am Höhenmesser eingestellt. Während einer kurzen Zeit wird angenommen, dass die Wetterverhältnisse unveränderlich bleiben, also Temperatur und Druck an jedem festen Ort konstant sind. Auch

virtuelle Temperatur T_v [K]	Luftdruck p [Pa]
281.6	94400
276.8	85000
266.3	70000
251.5	50000
240.5	40000
227.9	30000
222.3	25800
221.1	25000
218.9	23300
222.5	20000

Tabelle 3: Messwerte, virtuelle Temperatur [K] und Luftdruck [Pa] auf gleicher Höhe

ein geübter Bergsteiger dürfte in einer Stunde kaum mehr als 1000 m Höhendifferenz überwinden. Daher ist das Aneroidbarometer als Höhenmesser verwendbar mit einer Genauigkeit, die in etwa der barometrischen Höhenstufe entspricht. Wer es genauer wissen will, kann noch die Temperatur messen und versuchen, die Ablesungen beim Höhenmesser zu korrigieren.

Fiktive Daten:
Startpunkt 1000 m (Höhenmeter nach Karte geeicht), Druck gemessen $p_0 = 900$ hPa, Temperatur gemessen $T_0 = 20.6°$ C,
Zielpunkt 2000 m (am Höhenmesser abgelesen), Druck gemessen $p_1 = 797$ hPa, Temperatur gemessen $T_1 = 12°$C.

Entwickeln und diskutieren Sie anhand dieser Problemstellung ein einfaches praktisches Korrekturverfahren, um

(a) die Bestimmung von Höhendifferenzen mit einem Höhenmesser zu verbessern, indem nach der Messung eine 'mittlere' Temperatur rechnerisch berücksichtigt wird.

(b) zu diskutieren, wie ein elektronischer Taschenhöhenmesser programmiert werden könnte, damit er bei zwei Messpunkten auch die Lufttemperatur misst und aus den Messdaten z_0, p_0, T_0 und z_1, p_1, T_1 durch numerische Integration eine verbesserte Schätzung für z_1 ermitteln kann.

Wie gut sind die Näherungen, die sich mit der empirischen Formel aus Aufgabe 19 als Bestimmungsgleichung für z_1 bei bekanntem p_1 gewinnen lassen?

21. Die Daten von Tabelle 3 stammen von einem Radiosondenaufstieg. Die Sonde ist auf einer Höhe von 490 m ü M bei einem Luftdruck von 94400 Pa gestartet. Es ist davon auszugehen, dass die Temperaturgradienten in jeder Schicht zwischen den angegebenen Messdaten konstant bleiben.

    (a) Welche Höhen entsprechen den angegebenen Datenpaaren (T_v, p) von Tabelle 3?

    (b) Versuchen Sie auch eine Höhenberechnung mit der Formel von Aufgabe 19.

    Stellen Sie die Datenpaare (Höhe|Temperatur) grafisch dar. Vergleichen Sie mit der ICAO-Atmosphäre.

Höhe z [m ü M]	virtuelle Temperatur T_v [K]
540	298.8
610	298.2
790	293.8
1030	292.7
3600	277.6
3880	281.5
4220	276.8
5840	267.0
5940	267.7
6900	259.6

Tabelle 4: Höhen und virtuelle Temperaturen, mit einer Radiosonde bestimmte Daten

5 Druckberechnung aus einem Temperatur-Höhenprofil

Moderne Flugzeuge oder Radiosonden sind mit Satellitennavigation ausgestattet. Sie können also Ortskoordinaten $(x|y|z)$ jederzeit mit hoher Genauigkeit messen. Die mit Satellitennavigation bestimmten Koordinaten $(x|y|z)$ hängen unter anderem von den Ausbreitungsbedingungen der Radiowellen zwischen dem Satelliten und dem Empfänger ab. Die Abhängigkeit wirkt sich auf die Höhe z stärker aus als auf $(x|y)$. Die Ausbreitungsbedingungen verändern sich mit der Zeit, so dass der Zustand der Ionosphäre (das 'Weltraumwetter') und die Wasserdampfverteilung in der Troposphäre die Höhenmessung merkbar beeinflussen kann. Für viele Anwendungen genügt die erreichte Genauigkeit der Höhenmessung von ± 10 m. Mit dieser Auflösung sind Lufttemperatur und Luftfeuchte als Funktionen der Höhe direkt messbar. Moderne Radiosonden benötigen keine Druckmessung mehr. Der Luftdruck lässt sich für jede Höhe aus einem einzigen gemessenen Luftdruckwert rekonstruieren. Dabei wird wieder die hydrostatische Grundgleichung verwendet. Zudem müssen die virtuellen Temperaturen mit der Druckberechnung laufend ermittelt werden.

Die ICAO verlangt übrigens mit gutem Grund, dass in der Zivilluftfahrt trotz Satellitennavigation auch eine barometrische Höhenmessung als Ersatzsystem vorhanden ist.

Aufgaben

22. Beim Aufstieg einer Radiosonde wurden die Höhen mit GPS gemessen. Die Tabelle 4 enthält Zahlenpaare von gleichzeitig gemessenen Höhen in [m ü M] und (virtuellen) Temperaturen in [K]. Beim Startort auf 540 [m ü M] wurde ein Luftdruck von 95000 Pa gemessen.

    (a) Wie gross ist der Luftdruck auf den gemessenen Höhen?

    (b) Auf welcher Höhe erreicht der Druck 70000 Pa?

23. Angenommen, jemand möchte für einen bestimmten Ort und Zeitpunkt den Luftdruck genau kennen. In der Schweiz sind die Daten des Messnetzes von Swiss Meteo im Internet zugänglich. Man kann für eine möglichst nahe gelegene Messstation auf einer vergleichbaren Höhe z_0 den Barometerdruck p_0 und die Temperatur T_0 abfragen und am eigenen Standort die Höhe z_1 und die Lufttemperatur T_1 (im Freien!) messen.

    Entwerfen Sie Korrekturverfahren, um aus den Messdaten auf $p(z_1)$ zu schliessen. Testen Sie die Verfahren an den fiktiven Daten:

$z_0 = 400$ m, $p_0 = 96000$ Pa, $T_0 = 28°$ C,
$z_1 = 840$ m, $T_1 = 25°$ C
Hinweise:

- ein isothermes Atmosphärenmodell mit der Temperatur $(T_0 + T_1)/2$
- numerische Integration mit der hydrostatischen Grundgleichung und der Gasgleichung anwenden: z.B. $\Delta p \approx p'(z) \cdot \Delta z = \dots$

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit jenen, welche die Näherungsformel aus Aufgabe 19 liefert.

24. Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

    (a) Zu je zwei Datenpaaren $(z_1|p_1)$, $(z_2|p_2)$ mit $z_1 < z_2$ und $0 < p_1, p_2$ gibt es ein Exponentialgesetz $p : z \mapsto p(z)$ mit $p(z_1) = p_1$ und $p(z_2) = p_2$.

    (b) Es gibt eine isotherme Atmosphäre, die auf zwei verschiedenen Höhen $z_1 < z_2 < 11000$ m ü M die gleichen Druckwerte wie die ICAO-Atmosphäre aufweist.

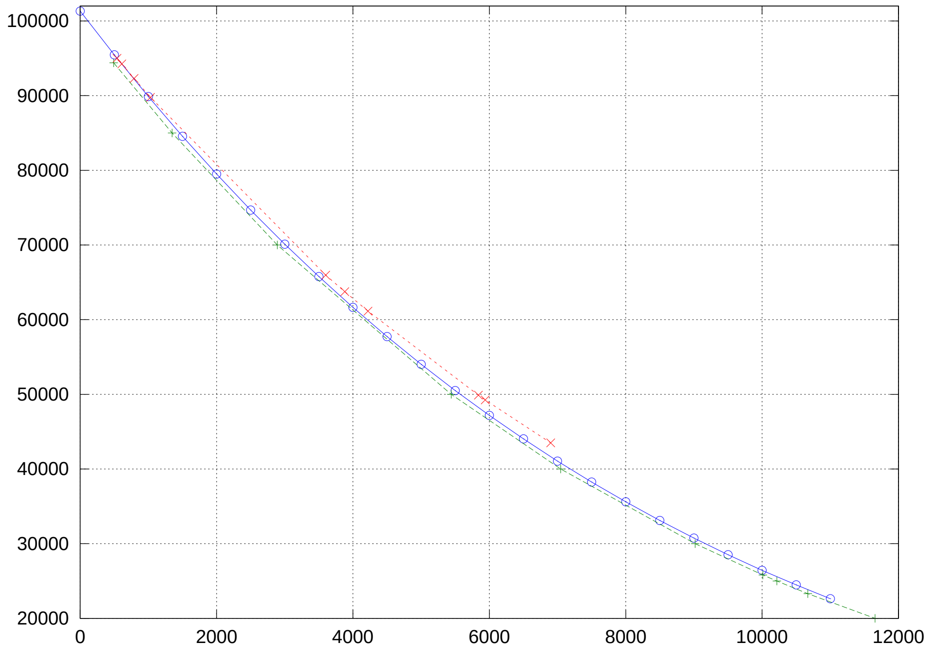

Abbildung 1: ICAO-Standardatmosphäre und Daten von Tabellen 3 und 4

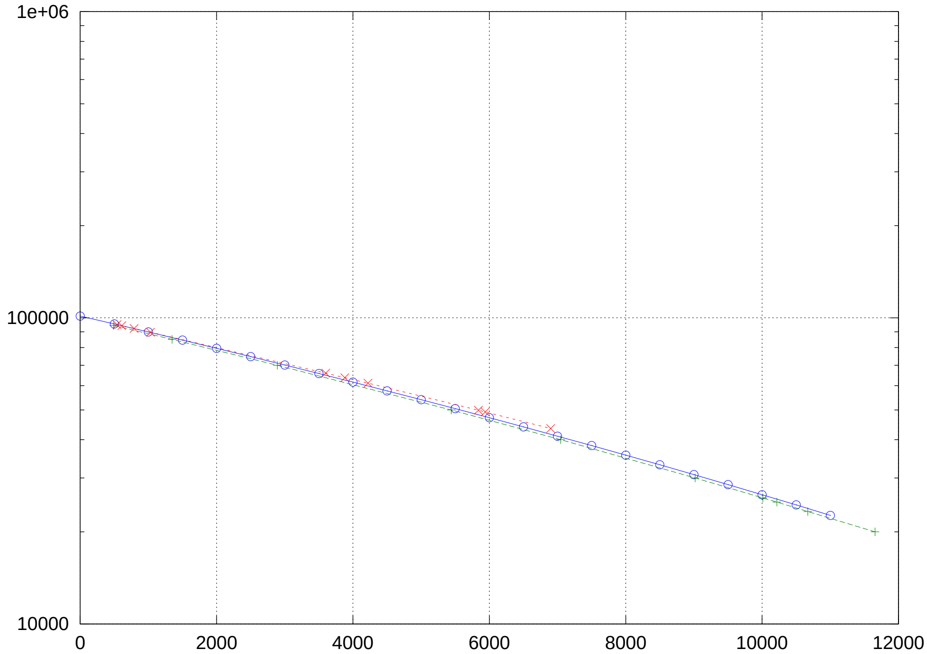

Abbildung 2: Daten von Abb. 1, Druckwerte logarithmiert