Analytische Geometrie / Vektorgeometrie

1. **Bedingung**
   Unter welchen Voraussetzungen gilt:
   $$|\vec{s}+\vec{t}+\vec{u}| = |\vec{s}| + |\vec{t}| + |\vec{u}|$$
   .

2. **Gleiche Abstände**
   Welcher Punkt der yz-Ebene mit der y-Koordinate 3 hat vom Ursprung (= Nullpunkt) und vom Punkt $P(\,-2 \mid -2 \mid -2\,)$ den gleichen Abstand?

3. **Lücken füllen**

   (a) Der Vektor $\vec{e_2}$ ist ein ..... und verläuft ..... der .....
   (b) Der ..... hat die Länge 0 und .....
   (c) Der Lösungsvektor der Subtraktion $\vec{b}-\vec{a}$ läuft von .....
   (d) Ein gerade, regelmässige 6-seitige Pyramide lässt sich mit ..... Vektoren aufspannen.
   (e) Ein .... Vektor hat n Komponenten.

4. **Vektorkonstruktion**
   Zeichne 3 beliebige Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$. Konstruiere den Vektor $\vec{e}$ mit der Bedingung:
   $$2\vec{a} - \frac{1}{2}\cdot\vec{e} = \vec{b} - \frac{3}{2}\cdot\vec{c}$$

5. **Lineare Abhängigkeit**
   Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Von einem dritten Vektor $\vec{c}$ kennt man die x- und die z-Komponente. Wie ist die y-Komponente von $\vec{c}$ zu wählen, damit die drei Vektoren linear abhängig sind?
   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ 4 \end{pmatrix}$$

6. **Lückentext**

   (a) Ein ..... ist ein Vektor mit der Länge 1.
   (b) Der ..... hat die Länge 0 und .....
   (c) Das Skalarprodukt eines Vektors ....., entspricht seiner Länge .....
   (d) Die ..... eines Punktes entsprechen den .... des Ortsvektors zu diesem Punkt.
   (e) Liegen drei Punkte A, B, C auf einer Geraden, so sind alle Vektoren zwischen je zwei der drei Punkte ....

7. **Richtig oder Falsch?**
   ind die folgenden 4 Behauptungen richtig oder falsch?

   (a) Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ hat die Dimension 3.

   (b) Die beiden Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ haben die gleiche Länge und sind deshalb gleich.

(c) Wenn 3 Vektoren im 3-dimensionalen Raum eine Ebene aufspannen, dann können sie nicht linear unabhängig sein.

(d) Drei 2-dimensionale Vektoren sind immer linear abhängig, sofern nicht zwei der Vektoren gleich lang sind.

8. **Doppelter Abstand**
Welche Punkte der Gerade $y = x$ hab von $A(\,4 \mid 30\,)$ den doppelten Abstand wie vom Punkt $B(\,16 \mid -1\,)$?

9. **Punkt in der xz-Ebene**
Welche Punkte der xz-Ebene mit der z-Koordinate 3 hat von den Punkten $O(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$ und $A(\,-2 \mid -2 \mid -2\,)$ den gleichen Abstand?

10. **Bestimmung einer Geradengleichung**
Bestimme die Parameter a und b der Geradengleichung $y = ax + b$ so, dass die Gerade durch die Punkte $A(\,7 \mid 9\,)$ und $B(\,4 \mid 5\,)$ geht.

11. **Geradengleichung**
Gesucht sind die Gleichungen der Geraden, welche durch den Punkt $P(\,2 \mid -1\,)$ gehen und die y-Achse unter einem Winkel von 22.5° schneiden.

12. **Gegenseitige Lage**
Gegeben sind die beiden Geraden

$$g:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h:\ \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für welchen Wert von a schneiden sich die beiden Geraden? Gesucht sind ferner der Schnittpunkt und der Schnittwinkel.

13. **Transversale**
Gegeben sind die beiden Geraden

$$g:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$h:\ \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie lang ist die Transversale zwischen den beiden Geraden, welche einen Abstand von 4 von der yz-Ebene befindet? (Nur eine Lösung)

14. **Gegenseitige Lage von Geraden**
Gesucht ist die gegenseitige Lage der Geraden g durch die beiden Punkte $A(\,0 \mid -1 \mid 10\,)$ und $B(\,5 \mid 9 \mid 4\,)$ und der Geraden $h:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$.

15. **Parameter bestimmen**
Gegeben sind die Geraden g und h:

$$g:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 9 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Für welchen Wert von a (a $\in \mathbb{R}$) schneiden sich die beiden Geraden?

16. **Sich schneidende Geraden**
Beweise, dass sich die Geraden g und h schneiden. Berechne den Schnittwinkel.

$$g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

17. **Gerade schneidet Kugel**
Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt $O(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$ und dem Radius 6. Zudem eine Gerade durch die beiden Punkte $A(\,4 \mid 7 \mid -1\,)$ und $B(\,4 \mid -4 \mid 10\,)$. Berechne die Durchstosspunkte der Gerade durch die Kugel.

18. **Einige Winkel**
Gegeben sind die Gerade g, der Punkt P und der Vektor $\vec{v}$.

$$g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P(\,2 \mid 4 \mid 1\,) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne den Neigungswinkel der Geraden g gebenüber der xy-Ebene.

(b) Stelle dir eine Ebene vor, die durch den Punkt P und die Gerade g definiert ist. Beweise, dass der Vektor $\vec{v}$ senkrecht auf dieser Ebene steht.

19. **Punkt um Gerade drehen**
Gegeben ist die Gerade g und der Punkt P:

$$g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P(\,9 \mid 3 \mid -1\,)$$

Drehe den Punkt P um 180° um die Gerade g. Gesucht sind die Koordinaten des Bildpunktes P'.

20. **Kurzaufgaben**

(a) Erkläre in einem Satz: Was bewirkt $t = 0$ in der Gleichung $\vec{r} = \vec{r_S} + t \cdot \vec{a}$

(b) Gib die Parametergleichung der z-Achse an.

(c) Mache zwei unterschiedliche Aussagen über die gegenseitige Lage der Geraden g und h (ohne jegliche Rechnung)

$$g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(d) Gib die Parametergleichung der Gerade $10x - 5y + 30 = 0$ an.

(e) Gib die Parametergleichungen von 2 Geraden an, die beide durch den Punkt $P(\,1 \mid 2 \mid 3\,)$ gehen und senkrecht aufeinander stehen.

(f) Wie lauten die Koordinatengleichungen der Geraden (im 2D), die die x-Achse unter einem Winkel von 60° schneiden und durch den Punkt $P(\,4 \mid 6\,)$ gehen?

21. **Kürzester Abstand zweier Geraden**
Gegeben sind die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{r}(\mu) = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Wie lauten die Koordinaten der Endpunkte des kürzesten Abstandes der beiden Geraden?

(b) Alle Punkte, welche von den beiden Ebenen den gleichen Abstand haben, liegen auf einer Ebene. Wie lautet eine Koordinatengleichung der Ebene?

22. **Zwei Geraden**
Es ist mit Vektoren zu beweisen, dass die Gerade g durch die Punkte $A(\,3 \mid 2 \mid 5\,)$ und $B(\,-3 \mid 2 \mid 7\,)$ und die Gerade h durch die Punkte $C(\,9 \mid 2 \mid 3\,)$ und $D(\,12 \mid 2 \mid 2\,)$ die gleiche Gerade darstellen.

23. **Zwei Geraden**
Gegeben sind die Punkte $A(\,-1 \mid 2 \mid 6\,)$ und $B(\,5 \mid 6 \mid 2\,)$ sowie die Gerade

$$g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(a) Es ist zu zeigen, dass die Gerade g und die Gerade h(AB) windschief sind.

(b) Gesucht ist der Punkt C auf der Geraden g, so dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, mit der Basis AB.

24. **Schnittpunkt**
Gegeben sind die beiden Geraden
$g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
Es ist zu zeigen, dass sich die beiden Geraden schneiden. Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes?

25. **Rechtwinkliges Dreieck**
Gegeben sind die Punkte $A(\,-2 \mid -2 \mid 3\,)$ und $B(\,1 \mid -4 \mid 5\,)$ sowie die Gerade

$$g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist zu zeigen, dass für alle Punkte P auf g das Dreieck ABP rechtwinklig ist.

26. **Kleinster Abstand**
Gegeben sind die Punkte $O(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$ und $P(\,2 \mid 2 \mid 1\,)$ sowie die Gerade

$$g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Für welchen Punkt R der Geraden g ist der Winkel POR = 60°?

(b) Welcher Punkt A der Gerade g hat von O den kleinsten Abstand?

27. **Transversale**
Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} u \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 2u \\ 49 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche Werte von u sind g und h windschief?

(b) Wie lang ist jene Transversale zwischen g und h, die in der xy-Ebene verläuft?
(In Abhängigkeit von u!)

28. **Schneidend**
Gegeben sind die Punkte $A(\,2 \mid -1 \mid -3\,)$ und $B(\,3 \mid -1 \mid z\,)$ und die Gerade

$$g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wie ist z zu wählen, damit sich g und h(AB) schneiden?

29. **Ebenenschar**
Gegeben sind die Punkte $A(\,3k \mid 0 \mid 0\,)$, $B(\,k+2 \mid k \mid 1\,)$ und $C(\,5k-2 \mid 1 \mid k\,)$.

(a) Für welche Werte des Parameters k bestimmen die drei Punkte eine Ebene E_k?

(b) Es soll gezeigt werden, dass alle Ebenen E_k parallel sind.

(c) Wie gross ist der 1. Neigungswinkel der Ebenen?

30. **Gegenseitige Lage dreier Ebenen**
Gegeben sind die drei Ebenen mit den Koordinatengleichungen

$$\begin{array}{lrcrcrcl} E_1: & x & - & y & + & z & = & 2 \\ E_2: & 2x & + & y & + & az & = & 0 \\ E_3: & x & + & ay & - & z & = & 1 \end{array}$$

Welche gegenseitige Lage haben die Ebenen in Abhängigkeit vom Parameter a ?

31. **Schnitt zweier Ebenen**
Gegeben sind die Ebenen

$$E_1\{A(\,8 \mid 4 \mid 1\,)B(\,5 \mid -4 \mid 4\,)C(\,0 \mid 0 \mid 9\,)\}$$
$$E_2\{D(\,5 \mid -2 \mid 8\,)E(\,4 \mid 5 \mid 6\,)F(\,1 \mid 0 \mid 0\,)\}$$

.

(a) Wie lauten die Koordinatengleichungen der beiden Ebenen?

(b) Wie lauten die Koordinaten zweier Punkte der Schnittgeraden der beiden Ebenen?

(c) Auf welches Problem lässt sich die Berechnung der Schnittgeraden zweier Ebenen reduzieren?

32. **Gegenseitige Lage zweier Ebenen**
Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E_1\{A(\,0 \mid 1 \mid 0\,), B(\,0 \mid 0 \mid -1\,), C(\,-2 \mid 0 \mid 0\,)\}$$

$$E_2: 2x + y - 10 = 0$$

(a) Liegt der Punkt $P(\,2 \mid 4 \mid 6\,)$ auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen?

(b) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen?

(c) In welchen Punkten durchstösst die Gerade $g\{U(\,4 \mid 5 \mid 7\,), V(\,6 \mid 6 \mid 12\,)\}$ die beiden Ebenen?

(d) Wie gross ist der 2. Neigungswinkel (Winkel gegenüber der yz-Ebene) der Ebene E_2?

33. **Ebenen**
Gegeben sind die drei Punkte $A(\,3\mid 2\mid 3\,)$, $B(\,7\mid -2\mid -2\,)$ und $C(\,4\mid 4\mid 4\,)$.

(a) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene $E(ABC)$?

(b) Wie lautet die Gleichung jener Geraden g, die durch den Punkt $P(\,9\mid -8\mid 7\,)$ geht und senkrecht zur Ebene E steht?

(c) Gesucht ist die Koordinatengleichung einer Ebene, die die z-Achse enthält und senkrecht zu E steht.

34. **Schnitt zweier Ebenen**
Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E_1\,(\lambda,\mu):\,\vec{r}=\begin{pmatrix}-6\\-2\\3\end{pmatrix}+\,\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\,\mu\begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}$$

$$E_2: 2x+3y+2z-18=0$$

Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

35. **5 Ebenen**
Gegeben sind die 5 Ebenen: $x=3 \quad x=-2 \quad z=0 \quad y=-1 \quad 2y+z-2=0$

(a) Die Situation ist zu skizzieren.

(b) Die 5 Ebenen umschliessen einen Körper. Wie gross ist sein Volumen?

36. **Parallele Ebenen**
Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E_1\,(u,v):\,\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\,u\begin{pmatrix}5\\3\\6.5\end{pmatrix}+\,v\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$$

$$E_2\,(s,t):\,\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\,s\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\,t\begin{pmatrix}a\\-1\\2.5\end{pmatrix}$$

Wie ist a zu wählen, damit die beiden Ebenen parallel sind?

37. **Ebene und Durchstosspunkt**
Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte $A(\,3\mid 2\mid 5\,)$, $B(\,5\mid 2\mid 1\,)$ und $C(\,1\mid -5\mid -5\,)$, sowie die Ebene F durch den Punkt $R(\,13\mid -10\mid 6\,)$ und durch die Gerade

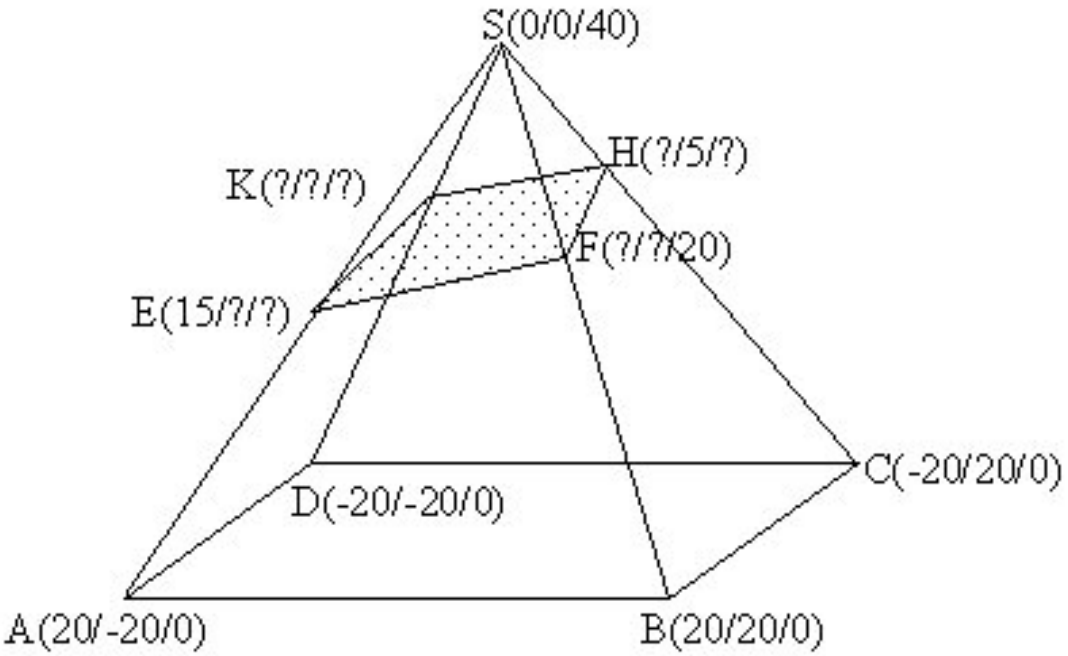
$$g:\,\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}9\\0\\-10\end{pmatrix}+\,t\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

(a) Wie lauten die Koordinatengleichungen der Ebenen E und F?

(b) In welchem Punkt durchstösst die Gerade g die Ebene E?

(c) Wie lautet die Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F?

38. **Abgeschnittene Pyramidenspitze**
Eine gerade, quadratische Pyramide ABCDS wird von einer Ebene $\epsilon(EFHK)$ geschnitten.



(a) Wie gross ist das Volumen der Pyramide?

(b) Wie lauten die vollständigen Koordinaten der Punkte E, F und H?

(c) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene ϵ?

(d) Wie lauten die Koordinaten des Punktes K?

39. **Kreis und Kreissehne**
Gegeben sind der Kreis $k:\ x^2+y^2+4x-2y-20=0$ sowie die Gerade $g:\ x+2y=5$. Gesucht ist der Mittelpunkt und der Radius von k, sowie die Länge der Sehne, die k aus g herausschneidet.

40. **Kreisgleichung gesucht**
Bestimme die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Geraden g: $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ liegt und der durch die Punkte $A(-2\mid 5)$ und $B(-1\mid -2)$ geht.

41. **Kleinste Kugel zwischen zwei Kugeln**
Gegeben sind die beiden Kugeln

$$\begin{aligned} k_1 &: \quad x^2+y^2+z^2+10x-20y-20z+81=0 \\ k_2 &: \quad x^2+y^2+z^2-6x+12y+12z+72=0 \end{aligned}$$

Bestimme die Gleichung der kleinsten Kugel, die die Kugeln k_1 und k_2 berührt.

42. **Gegenseitige Lage von Kugeln**
Gegeben sind die beiden Kugeln:

$$K1:\ x^2+y^2+z^2-30x-24y-48z+216=0$$

$$K2:\ x^2+y^2+z^2-14x-20y-16z+132=0$$

(a) Berechne die Mittelpunkte und Radien der Kugeln.

(b) Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Kugeln.

43. **Kugelgleichung gesucht**
Gesucht gesucht sind die Gleichungen der beiden Kugeln mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Radius misst 5.
- Der Mittelpunkt hat positive y-Koordinate.
- Die Kugel berührt die xy-Ebene.
- Die Kugel schneidet die xz-Ebene in einem Kreis mit Radius 3.
- Der Punkt $P(\,2 \mid 2 \cdot (2+\sqrt{2}) \mid 6\,)$ liegt auf der Kugeloberfläche.

44. **Bewegung eines Punktes**
Ein Punkt startet zur Zeit $t = 0$ und bewegt sich gemäss der Vorschrift

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin^2(3t) \end{pmatrix}$$

$\vec{s}(t)$ ist also der Ortsvektor des Punktes zur Zeit t.

(a) Gefragt ist eine Skizze der Bahnkurve des Punktes in einem Schrägbild.
(b) Wann hat der Punkt die grösste Geschwindigkeit?

45. **Bewegung eines Punktes im Raum**
Ein Punkt startet zur Zeit $t = 0$ und bewegt sich gemäss der Vorschrift

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} sint \\ 2\cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

(a) Wie sieht die Bahnkurve aus? (Skizze und Beschreibung in Worten)
(b) Zu welchen Zeiten ist der Punkt am weitesten von $(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$ entfernt?
(c) Welche Geschwindigkeit hat der Punkt zur Zeit $t = 5$?

46. **Quadrat**
Von einem Quadrat ABCD kennt man die Seitenlänge $s = \sqrt{130}$ und die Ecke $A(\,3 \mid 8\,)$. Zudem weiss man, dass die Diagonale AC in Richtung des Vektors $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ verläuft.
Gesucht sind die Koordinaten der Ecken B, C und D.

47. **Winkel und Fläche**
Die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ spannen ein Dreieck auf.

(a) Wie gross sind die Winkel des Dreiecks?
(b) Welche Fläche hat das Dreieck?

48. **Trapez**
Von einem Trapez kennt man die Ecken $A(\,2 \mid 2\,)$, $B(\,38 \mid 2\,)$ und $C(\,27 \mid 17\,)$ sowie die Fläche $A = 420$.
(Achtung: Beschriftung im Gegenuhrzeigersinn, Parallelseiten AB und CD)

(a) Wie lauten die Koordinaten der Ecke D?
(b) Wie gross sind die 4 Innenwinkel des Trapezes?

49. **Länge 9**
Gegeben sind die beiden Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$.
Welcher Vektor $\vec{c}$ mit der Länge 9 steht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$ senkrecht?

50. **Blickwinkel**
Von welchen Punkten der x-Achse aus sieht man die Strecke $A(2 \mid 3 \mid 1)B(6 \mid -9 \mid 7)$ unter einem rechten Winkel? Von welchen Punkten aus unter einem Winkel von 60°?

51. **Senkrecht**
Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(3 \mid 0 \mid 6)$, $C(1 \mid 6 \mid 2)$ und $D(5-2k \mid 1 \mid k)$. Es ist zu zeigen, dass für alle k $\in I\!R$ die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{CD}$ senkrecht aufeinander stehen.

52. **Reguläres Tetraeder**
Es ist mit Hilfe des Skalarproduktes zu beweisen, dass bei einem regulären Tetraeder zwei Kanten ohne gemeinsame Punkte (windschief-)senkrecht aufeinander stehen.

53. **Punkt im Polygon - Test**
Liegt der Punkt $P(2.25 \mid 0.75 \mid 3.25)$ innerhalb der Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $A(2 \mid -1 \mid 3)B(4 \mid 5 \mid 0)C(1 \mid 0 \mid 7)$?

54. **60-Winkel**
Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid 1 \mid 3)$ und $B(1 \mid 1 \mid 0)$. Bestimme alle Punkte C in der xz-Ebene, so dass C die Entfernung BC gerade $\sqrt{2}$ ist und der Winkel ABC 60° beträgt.

55. **Ungleichung**
Beweise: Für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \leq \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}$

56. **Thaleskreis**
Beweise mit Hilfe der Vektorrechnung die folgende Eigenschaft des Thaleskreises:
Liegt ein einem Dreieck ABC der Punkt C auf dem Kreisbogen des Kreises mit dem Durchmesser AB, so ist das Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel beim Punkt C.

57. **Parallelogramm**
Von einem Parallelogramm kennt man die Ecken $A(-3 \mid 5 \mid 6)$ und $B(2 \mid -1 \mid 0)$ sowie $D(-5 \mid -6 \mid -2)$. Berechne den spitzen Schnittwinkel der Diagonalen sowie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

58. **Dreiecksberechnungen**
Gegeben ist das Dreieck $A(1 \mid 0 \mid 1)B(2 \mid 0 \mid 1)C(4 \mid -1 \mid 3)$.
    (a) Wie gross ist die Seite $a = \overline{BC}$, der Winkel α und die Fläche F des Dreiecks?
    (b) Wie lauten die Koordinaten des Höhenfusspunktes der Höhe h_c ?

59. **Spiegeln eines Punktes an einer Geraden**
Gegeben ist der Punkt $P(1 \mid -1 \mid 1)$ und die Gerade $g\{A(3 \mid 1 \mid 1), B(3 \mid 2 \mid 3)\}$.
Wie lauten die Koordinaten des Punktes $\overline{P}$, den man durch Spiegelung von P an der Geraden g enthält?

60. **Inkreismittelpunkt**
Wie lauten die *exakten* Koordinaten des Inkreismittelpunktes des Dreiecks $A(0 \mid 0)B(3 \mid -4)C(21 \mid 20)$?

61. **Dreieckskonstruktion**
Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 8 \mid 0)$, $C(6 \mid 6 \mid 5)$ und $P(0 \mid 12 \mid -1)$. ABC sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB auf der Geraden $g\{A, P\}$. Welche Koordinaten hat die Ecke B? Wie gross ist der Winkel α?

62. **Berechnungen am Oktaeder**
Von einem regulären Oktaeder $ABCDEF$ kennt man die Ecke $A(-1 \mid 4 \mid -1)$ und weiss, dass die Diagonale BD auf der Geraden

$$g: \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

liegt. Welche Koordinaten haben die übrigen Ecken des Oktaeders?

63. **Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden**
Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden

$$g_1 : \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{r}(\mu) = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P(\lambda)$ und $Q(\mu)$ seien die Endpunkte der kürzesten Verbindung der beiden Geraden. Wie lauten die exakten Koordinaten von P und Q?

64. **Gleichschenklige und rechtwinklige Dreiecke**
Von einem Dreieck kennt man die Ecken $A(\,1 \mid 4 \mid 2\,)$ und $B(\,5 \mid 8 \mid 4\,)$. Ferner weiss man, dass die Ecke C auf der Geraden g durch die Punkte $P(\,-3 \mid 6 \mid -1\,)$ und $Q(\,1 \mid 5 \mid 1\,)$ liegt. Für welche Punkte C auf der Geraden g

(a) ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit Spitze C?

(b) ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit Hypotenuse AB?

65. **Ecken eines Würfels**
Von einem Würfel $ABCDEFGH$ kennt man $A(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$. Ferner weiss man, dass C und F auf der Geraden

$$g : \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liegen.
Wie lauten die Koordinaten der Ecken B, C und F? Es genügt einen möglichen Würfel zu berechnen.

66. **Parallele Ebenen und ein Lichtstrahl**
Gegeben ist die Ebene E: $2x - 2y - z - 12 = 0$ und die Ebene F durch die drei Punkte $A(\,1 \mid 2 \mid 4\,)$, $B(\,2 \mid 2 \mid 6\,)$ und $C(\,3 \mid 5 \mid 2\,)$. Zudem bekannt ist die Gerade g durch die Punkte $P(\,15 \mid 16 \mid 13\,)$ und $Q(\,1 \mid 2 \mid -1\,)$.

(a) Zeige, dass die Ebenen E und F parallel sind.

(b) Bestimme den Abstand der beiden Ebenen

(c) Ein von P aus Richtung Q laufender Lichtstrahl wird an der Ebene E reflektiert. In welchem Punkt trifft der reflektierte Lichtstrahl auf die Ebene F?

67. **Zwei Kugeln**
Gegeben sind die Punkte $P(\,3 \mid -3 \mid 4\,)$, $Q(\,3 \mid 0 \mid 7\,)$ und $S(\,15 \mid 9 \mid 2\,)$. Der Punkt P liegt auf der Kugeloberfläche der Kugel K_1 mit Mittelpunkt $M_1(\,7 \mid 1 \mid 6\,)$. Die Gerade g geht durch die Punkte P und Q.

(a) Wie gross ist der Radius r_1 der Kugel K_1?

(b) Liegt der Punkt S innerhalb oder ausserhalb der Kugel K_1? Begründe.

(c) Gesucht ist der Mittelpunkt M_2 und der Radius r_2 jener Kugel K_2, die die Strecke M_1S als Durchmesser hat.

(d) Wie lang ist der Teil der Gerade g, der innerhalb der Kugel K_1 verläuft?

(e) Welchen Abstand hat der Kugelmittelpunkt M_1 von der Gerade g?

68. **Zwei Ebenen und eine Kugel**
Gegeben sind die Punkte $A(\,21 \mid -24 \mid -2\,)$, $B(\,5 \mid -6 \mid -9\,)$, $C(\,19 \mid -26 \mid -5\,)$, $D(\,-5 \mid -2 \mid 10\,)$, $E(\,-5 \mid 4 \mid 37\,)$ und $M(\,1 \mid 1 \mid 4\,)$.
Die Punkte A, B und C erzeugen die Ebene ε.
Die Puntke C und E bestimmen die Gerade g.

(a) Wie lautet die Koordinatengleichung von ε

(b) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene φ, die parallel zu ε liegt und den Punkt D enthält?

(c) Wie gross ist der Schnittwinkel zwischen g und ε?

(d) Es ist zu zeigen, dass der Punkt M der Mittelpunkt jener Kugel ist, die die beiden Ebenen ε und φ berührt und den Punkt D enthält

69. **Quadrat, Lichtstrahl und Pyramide**
Gegeben sind die drei Punkte $A(\,4 \mid 14 \mid 17\,)$, $B(\,16 \mid 11 \mid 14\,)$ und $C(\,16 \mid 2 \mid 23\,)$. Sowie der Punkt $U(\,-10 \mid 4 \mid 16\,)$.

(a) Es ist zu beweisen, dass das Dreieck ABC rechtwinklig-gleichschenklig ist.

(b) Wie lauten die Koordinaten jenes Punktes D, der das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzt?

(c) Wie lauten die Koordinaten des Quadratmittelpunktes M?

(d) Ein Lichtstrahl geht von U aus und wird im Punkt M an der Quadratebene reflektiert. Unter welchem Winkel trifft er auf die Ebene?

(e) Der gespiegelte Lichtstrahl trifft im Punkt Z auf der xy-Ebene auf. Wir lauten die Koordinaten von Z?

(f) Eine gerade quadratische Pyramide mit dem Volumen V = 324 wird über dem Quadrat ABCD errichtet. Wie lauten die Koordinaten der Spitze S dieser Pyramide? Es sind alle möglichen Lösungen zu berechnen.

70. **Verbindende Gerade**
Gegeben sind eine Ebene und zwei Geraden

$$E_1 : 2x + y + 2z + 6 = 0 \qquad g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h(P,Q) \text{ durch } P(\,5 \mid 1 \mid -2\,) \text{ und } Q(\,1 \mid -1 \mid 2\,)$$

(a) Welchen Abstand hat der Punkt P von der Ebene E_1

(b) Welche gegenseitige Lage haben die Gerade g und h?

(c) Gesucht ist die Koordinatengleichung einer Ebene E_2, die g enthält und senkrecht auf der Ebene E_1 steht.

(d) Welche Gerade geht durch den Punkt $A(\,6 \mid 0 \mid 3\,)$ und schneidet die beiden Geraden g und h?

71. **Dreieck und ein Paar Kugeln**
Gegeben sind die drei Punkte $P(\,8 \mid -4 \mid 10.5\,)$, $Q(\,-2 \mid -4 \mid 18\,)$ und $M(\,-2 \mid -4 \mid 3\,)$ und die Gerade

$$g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Es ist zu zeigen, dass das Dreieck MPQ gleichschenklig ist. 1.5 P.

(b) Es ist zu zeigen, dass die Gerade $h(MP)$ und g windschief sind. 1.5 P.

(c) Die Kugel K habe den Mittelpunkt M und berühre die Gerade g. Welchen Radius hat die Kugel K? Wo berührt die Kugel K die Gerade g? 3 P.

(d) Auch der Punkt Q liegt auf der Kugeloberfläche von K. Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene E an K im Punkt Q? 1.5 P.

(e) Die Kugel K' hat den Mittelpunkt $A(\,18 \mid -4 \mid 18\,)$ und den Radius 20. Es ist zu zeigen, dass der Punkt Q auf dem Schnittkreis der Kugeln K und K' liegt. 1.5 P.

(f) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene, in der der Schnittkreis von K und K' liegt? 2 P.

(g) Welchen Radius hat der Schnittkreis von K und K'? 2 P.

72. **Kugeln und Gerade**
Gegeben ist der Punkt $P(\,3 \mid -3 \mid 4\,)$, $Q(\,3 \mid 0 \mid 7\,)$ und $S(\,15 \mid 9 \mid 2\,)$. Der Punkt P liegt auf der Kugeloberfläche der Kugel K_1 mit Mittelpunkt $M(\,7 \mid 1 \mid 6\,)$. Die Gerade g geht durch die Punkte P und Q.

(a) Wie gross ist der Radius der Kugel K_1?

(b) Wie lang ist jene Strecke der Gerade g, die innerhalb der Kugel K_1 verläuft?

(c) Wie gross ist der Abstand des Kugelmittelpunktes M von der Gerade g?

(d) Der Punkte S liegt ausserhalb der Kugel K_1. Richtig oder falsch? Begründung?

(e) Gesucht ist der Mittelpunkt und der Radius jener Kugel K_2, die die Strecke MS als Durchmesser hat.

73. **Kreiszylinder**
Die (Rotations-)Achse eines Kreiszylinders geht durch die Punkte $A(\,-1 \mid 3 \mid 8\,)$ und $B(\,-1 \mid 4 \mid 9\,)$. Die Gerade t durch die Punkte $C(\,2 \mid 3 \mid 11\,)$ und $D(\,4 \mid 3 \mid 10\,)$ ist eine Tangente an den Zylinder.

(a) In welchem Punkt T berührt die Tangente t den Zylinder?

(b) Vom Punkt $L(\,3 \mid -4 \mid 14\,)$ aus verläuft ein Lichtstrahl, der im Punkt T am Zylinder reflektiert wird. Wie lautet die Gleichung des reflektierten Lichtstrahls?

74. **Gerader Kreiskegel**
Der Punkt $S(\,19 \mid -8 \mid 12\,)$ ist die Spitze eines geraden Kreiskegels, dessen Grundkreis auf der Ebene E: $9x - 6y + 2z - 1 = 0$ liegt. Der Punkt $P(\,3 \mid y \mid -7\,)$ liegt auf dem Grundkreis des Kegels.

(a) Wie lang ist die Höhe des Kegels?

(b) Wie gross ist der Neigungswinkel α der Mantellinie $\bar{PS}$ gegenüber der Ebene des Grundkreises?

(c) Gesucht ist jener Punkt Q auf dem Grundkreis des Kegels, der von P den grössten Abstand hat.

75. **QUADRATische Pyramide**
Von einem Quadrat ABCD kennt man die Ecken $A(\,1 \mid 1 \mid 1\,)$ und $B(\,5 \mid 5 \mid 3\,)$. Die Ecke **D** hat die x-Koordinate -1.

(a) Wie lauten die restliche Koordinaten von D? Es ist nur jene Lösung mit ganzzahligen Koordinaten anzugeben.

(b) Wie lauten die Koordinaten der Ecke C?

(c) Das Quadrat ABCD soll die Grundfläche einer geraden, quadratischen Pyramide mit Volumen V=72 sein. Wie lauten die Koordinaten der Spitze S dieser Pyramide?

76. **Dreiseitige Pyramide**
Die drei Punkte $A(\,6 \mid 4 \mid 5\,)$; $B(\,9 \mid 24 \mid 9\,)$ und $C(\,12 \mid 8 \mid 4\,)$ bilden die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze $S(\,x \mid y \mid z\,)$.

(a) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene E(ABC)?

(b) Welchen Flächeninhalt hat das Grunddreieck ABC?

(c) Die Spitze S der Pyramide liegt auf der Gerade $g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und das Volumen beträgt 36. Wie lauten die Koordinaten der Pyramidenspitze S?

77. **Geradenschar**
Gegeben ist die Ebene E: $x + 2y + 2z - 12 = 0$. Für jedes $a \in I\!R$ stellt die folgende Gleichung eine andere Gerade $g_a(t)$ dar (sog. Geradenschar):

$$g_a : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 12 - 2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Es ist zu beweisen, dass alle Geraden $g_a(t)$ in der Ebene E liegen.

(b) Welche gegenseitige Lage haben alle Geraden $g_a(t)$? Begründe deine Antwort.

(c) Welchen Radius haben jene Kreise, die die Geraden $g_0(t)$ und $g_5(t)$ als Tangenten haben?

78. **Ebenen-Winkel-Geraden-Pyramide**
Gegeben sind die Punkte $A(-1 \mid 9 \mid 8)$, $B(1 \mid 10 \mid 10)$, $C(-5 \mid 5 \mid 8)$ und $S(7 \mid -5 \mid -9)$.

(a) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene E(ABC)?

(b) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

(c) Wie gross ist der Schnittwinkel zwischen der Gerade g(AS) und der Ebene E(ABC)?

(d) Gesucht ist die Schnittgerade zwischen der Ebene E(ABC) und der Ebene F: $2x - y - 2z - 27 = 0$.

(e) Wie gross ist das Volumen der Pyramide ABCS?

79. **Gleichschenkliges Trapez und Pyramide**
Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid 8 \mid 0)$, $B(0 \mid 0 \mid -2)$, $C(1 \mid 2 \mid 0)$ und $D(0 \mid 6 \mid 1)$.

(a) Es ist zu zeigen, dass die vier Punkte ein gleichschenkliges Trapez, aber kein Parallelogramm bilden.

(b) Wie gross ist der Winkel α im Trapez ABCD?

(c) In welchem Punkt F schneiden sich die beiden Diagonalen?

(d) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene E(ABCD)?

(e) Das Trapez ABCD bildet zusammen mit dem Punkt S die Pyramide ABCDS. Der Punkt S liegt auf der Senkrechten zur Ebene E durch den Punkt F und hat von der Ebene E den Abstand 15. Die z-Koordinate von S ist negativ. Wie lauten die Koordinaten von S?

80. **Pyramide mit dreieckiger Grundfläche**
Gegeben ist das Dreieck PQR mit $P(0 \mid 0 \mid 0)$, $Q(-4 \mid 3 \mid 2)$ und $R(1 \mid -2 \mid 2)$.

(a) Welchen Flächeninhalt hat das Dreiecks PQR?

(b) Die drei Punkte P, Q und R bilden zusammen dem Punkt S eine Pyramide mit der Grundfläche PQR und der Spitze S. Wie lautet die Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen sich die Spitze S bewegen kann, so dass das Volumen V dieser Pyramide 75 beträgt.

81. **Gerade, quadratische Pyramide**
Von einer geraden, quadratischen Pyramide kennt man den Mittelpunkt $M(7 \mid 10 \mid 5)$ der Grundfläche ABCD, die Spitze $S(11 \mid 12 \mid 9)$ und einen Punkt $P(10 \mid 10 \mid 10)$ auf der Seitenkante SA.
Wie lauten die Koordinaten der Punkte A, B, C und D?

82. **Drei Geraden und eine Pyramide**
Gegeben sind die beiden parallelen Geraden p und q, sowie eine dritte Gerade g.

$$p : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{q geht durch } Q(5 \mid 6 \mid 1) \qquad g : \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Wie gross ist der Abstand von p und q?

(b) Unter welchem Winkel schneidet g die von p und q aufgespannte Ebene?

(c) Eine (gerade) quadratische Pyramide hat ihre Spitze S auf der Geraden g; je zwei benachbarte Ecken der Grundfläche liegen auf p bzw. q. Welche Koordinaten hat der Punkt S?

(d) Wie lauten die Koordinaten eines weiteren Eckpunktes der Pyramide?

83. **Vom Quadrat zur Pyramide**
Die Vektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ schliessen einen rechten Winkel ein. Der Vektor $\vec{p}$ hat die Länge 15. Weiter gilt für die Komponenten von $\vec{p}$: $x + 5z = 0$ und $0 < x$.

(a) Bestimme die Komponenten des Vektors $\vec{p}$.

(b) Mit den Vektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ und $\overrightarrow{AD} = k \cdot \vec{q}$ $(0 < k)$ wird vom Punkt $A(-2 \mid 1 \mid 7)$ aus ein Quadrat ABCD aufgespannt.
Bestimme k und die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte B, C und D dieses Quadrats.

(c) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene ABC?

(d) Der Ursprung $O(0 \mid 0 \mid 0)$ ist die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABCD. Wie gross ist ihr Volumen?

(e) Wie gross ist der Winkel zwischen der Seitenkante AO und der Grundfläche ABCD?

84. **Tetraeder**
Die Punkte $A(-2 \mid 3 \mid 1)$, $B(4 \mid -1 \mid 2)$ und $C(1 \mid -2 \mid -3)$ bilden die Ecken der Grundfläche eines Tetraeders. Die Spitze D liegt in der Ebene mit der Gleichung $E: \ 3x - 2y + z - 6 = 0$ und steht senkrecht über dem Schwerpunkt der Grundfläche.

(a) Welches ist der grösste Winkel der Grundfläche?

(b) Welchen Inhalt hat die Grundfläche?

(c) Wie lautet die Koordinatengleichung der Grundflächenebene G?

(d) Wie gross ist die Höhe h des Tetraeders?

(e) Wie gross ist der Winkel zwischen der Seitenkante AD und der Grundfläche?

(f) Die Gerade durch die Punkte A und D wird an der Grundflächenebene G gespiegelt. Wie lautet die Gleichung der gespiegelten Gerade?

85. **Berechnungen am Tetraeder**
Gegeben ist das Tetraeder $A(3 \mid 4 \mid 7)$ $B(4 \mid -4 \mid 3)$ $C(6 \mid 1 \mid 2)$ $D(0 \mid -2 \mid 7)$.

(a) Wie gross ist die Oberfläche des Tetraeders?

(b) Liegt der Punkt $P(1.75 \mid -1 \mid 6)$ auf der Oberfläche des Tetraeders?

(c) Die Gerade $g\{(12 \mid 7 \mid 0), D\}$ durchstösst das Tetraeder neben D in einem weiteren Punkt. Wie lauten die Koordinaten dieses Durchstosspunktes?

(d) Die Berechnung der Durchstosspunkte einer Geraden mit einem Tetraeder stellt keine grossen Probleme dar. Hingegen ist der Berechnung der Durchstosspunkte einer Geraden mit einem beliebigen Polyeder in vielen Fällen auch für einen Computer eine schwierige Aufgabe. In einigen ausformulierten Sätzen soll formuliert werden, wo hier das Problem liegt.

86. **Gerader Kreiskegel**
Der Punkt $S(19 \mid -8 \mid 12)$ ist Spitze eines geraden Kreiskegels, dessen Grundkreis auf der Ebene $\varepsilon: \ 9x - 6y + 2z - 1 = 0$ liegt. Vom Punkt $P(3 \mid y \mid -7)$ weiss man, dass er auf dem Grundkreis des Kegels liegt.

(a) Welche Länge hat die Höhe des Kegels?

(b) Wie gross ist der Winkel α der Mantellinie $\overline{PS}$ gegenüber der Grundkreisebene?

(c) Wie lauten die Koordinaten desjenigen Punktes Q des Grundkreises, der von P den grösstmöglichen Abstand hat?

87. **Kreise und Tangenten**
Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten $A(\,10 \mid 10\,)$ und $B(\,10 \mid 4\,)$. Der Mittelpunkt des einen Kreises liegt auf der Geraden $g:\ 7x - 2y - 70 = 0$ und der zweite Mittelpunkt liegt auf der Geraden h. Die drei Geraden g, h und (AB) schneiden sich im Punkt P. Die Geraden g und h schliessen einen Winkel von 45 Grad ein.

(a) Skizziere die Situation und bestimme die Radien und die Mittelpunkte der beiden Kreise.

(b) Bestimme die Gleichung und den Zwischenwinkel der beiden Tangenten, die vom Punkt $Q(\,6 \mid 4\,)$ an den Kreis mit Mittelpunkt auf g gelegt werden.

88. **Zwei Kugeln**
Gegeben sind die beiden Punkte $A(\,1 \mid -3 \mid -2\,)$ und $B(\,7 \mid -1 \mid 7\,)$.

(a) Eine durch A und B gehende Kugel hat ihr Zentrum auf der z-Achse. Bestimme Mittelpunkt und Radius der Kugel.

(b) Eine zweite Kugel hat ihr Zentrum ebenfalls auf der z-Achse. Sie hat die Gerade durch die Punkte A und B als Tangente. Wo befindet sich das Zentrum der kleinsten Kugel dieser Art.

89. **Eine Ebene und zwei Kugeln**
Gegeben sind die Punkte $A(\,-2 \mid -2 \mid 1\,)$, $B(\,3 \mid 2 \mid 3\,)$ und $C(\,-1 \mid 2 \mid -5\,)$, sowie die Kugeln

$$K_1:\ (x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 36 \qquad\qquad K_2:\ (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 36$$

(a) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene mit den Punkten A, B und C?

(b) Wie gross ist der spitze Schnittwinkel der Geraden g_1 durch die Punkte A und B und der Geraden g_2 durch die Punkte B und C?

(c) Beweise: Die Kugel K_2 ergibt sich durch Spiegelung der Kugel K_1 an der Ebene $2x-2y-z+1 = 0$.

(d) Die beiden Kugeln schneiden sich in einem Kreis. Berechne seinen Radius und seinen Mittelpunkt.

90. **Vier Punkte, eine Ebene und eine Kugel**
Gegeben sind die Punkte $A(\,-1 \mid 9 \mid 8\,)$, $B(\,1 \mid 10 \mid 10\,)$, $C(\,-5 \mid 5 \mid 8\,)$ und $D(\,1 \mid 2 \mid 6\,)$, sowie die Ebene $E_2:\ 2x - y - 2z - 27 = 0$ und die Kugel $K:\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z - 86 = 0$.

(a) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene E_1 durch die Punkte A, B und C?

(b) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

(c) Die Gerade g geht durch die Punkte A und D. Wie gross ist der Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E_1?

(d) Gesucht ist ein Punkt P, der auf der Geraden g liegt und von der Ebene E_1 den Abstand 3 hat.

(e) Die Ebene E_2 schneidet die Kugel K in einem Kreis k. Der Mittelpunkt und der Radius dieses Kreises ist zu berechnen.

91. **Kreis und Kugel**
Gegeben sind der Kreis $k:\ x^2 + y^2 - 10x - 14y + 49 = 0$ und der Punkt $P(\,0 \mid -3\,)$.

(a) Bestimme den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises k.

(b) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt P an den Kreis k gelegt werden können?

(c) Die Betrachtung wird nun auf den 3-dimensionalen Raum erweitert. Gesucht ist die Gleichung der Kugel K, welche die Ebene $E:\ z = 25$ berührt und die xy - Ebene im Kreis k schneidet.

92. **Reflektierende Kugel**
Gegeben sind die Gerade g und die Kugel mit dem Mittelpunkt M.

$$g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad M(-1 \mid 1 \mid 0)$$

Die Gerade g ist eine Tangente an die Kugel mit Mittelpunkt M.

(a) Berechne den Radius der Kugel sowie den Beührungspunkt P der Gerade g an der Kugel.

(b) Bestimme die Gleichung der Tangente h, welche senkrecht zur Geraden g steht und die Kugel im gleichen Punkt wie g berührt.

(c) Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle L aus in Richtung des Vektors $\vec{v}$.

$$L(11 \mid 12 \mid 22) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Lichtstrahl wird an der Kugel ideal reflektiert. Wo trifft der reflektierte Lichtstrahl auf die xz-Ebene?

93. **Ebene, Kugel und Dreieck**
Gegeben sind die Ebene $E: \ 11x - 10y + 2z - 30 = 0$ und die Punkte $M(-4 \mid 10 \mid -3)$ und $A(10 \mid -8 \mid 4)$.

(a) Wie gross ist der Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der Geraden g durch die beiden Punkte A und M?

(b) Wie gross ist der Abstand des Punktes M von der Ebene E?

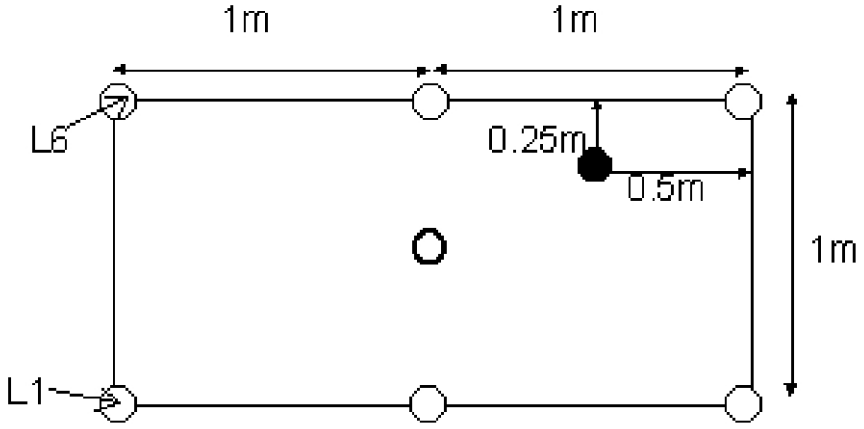
(c) Eine Kugel K mit dem Mittelpunkt M schneidet die Ebene in einem Kreis mit Radius 9. Wie lautet die Gleichung dieser Kugel?

(d) $P(p \mid -2 \mid 6)$ ist ein Punkt auf der Kugel K. Man berechne p sowie die Gleichung der Tangentialebene Et an K in P.

(e) Welchen Flächeninhalt hat das Dreiecks AMP.

(f) Wieviel misst die grösste mögliche Fläche eines Dreiecks AMQ, wenn der Punkt Q auf der Kugel liegen soll.

94. **Billiard**
Ein Billiardtisch hat eine Spielfläche von 1 x 2 m. In allen Ecken und in der Mitte der Längsbanden befinden sich insgesamt 6 Löcher (vgl. Skizze). Die Löcher werden im Gegenuhrzeigersinn mit L1 bis L6 nummeriert. Jede Billiardkugel hat einen Durchmesser von 8 cm. In der Mitte des Tisches liegt die weisse Kugel. Die schwarze Kugel liegt in der rechten Tischhälfte (vgl Skizze). Betrachte für die folgenden Aufgaben das Problem als 2-dimensional und wähle den Nullpunkt in der Mitte des Tisches.



(a) In welcher Richtung (Vektor) muss der Spieler die weisse Kugel anstossen, damit sie auf direktem Weg ins Loch L1 rollt? Gesucht ist die Koordinatengleichung der Geraden für den Stoss.

(b) In welcher Richtung (Vektor) muss die weisse Kugel angestossen werden, damit sie via die obere Bande (zwischen L5 und L6) ins Loch L1 versenkt wird? Gesucht ist der Auftreffpunkt und Auftreffwinkel an der oberen Bande.

(c) Die weisse Kugel soll so angestossen werden, dass sie (ohne Bandenberührung) die schwarze Kugel seitlich touchiert, ohne sie zu bewegen. Gesucht sind die Geradengleichungen der beiden möglichen Stösse.

In der Mitte über dem Tisch wird ein Lampenschirm in Form eines geraden Kreiskegels aufgehängt. Sein oberer Öffnungswinkel ist 60 Grad. Die Glühbirne befindet sich in der Spitze des Lampenschirmes.

(d) Wie hoch darf die Spitze der Lampe über dem Tisch hängen, damit gerade noch der ganze Lichtkegel auf dem Billiardtisch Platz hat?

(e) Wieviele % der Tischfläche werden ausgeleuchtet, wenn die Lampenspitze 1.5 m über der Tischfläche hängt?

95. **Zylinder**
Von einem Zylinder kennt man die Achse a und eine Tangente t an die Zylinderoberfläche:

$$a: \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t: \vec{r}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Liegt der Punkt $P(\,8 \mid 9 \mid 10\,)$ auf der Zylinderoberfläche?

96. **Punkte, Geraden, Abstände und eine Pyramide**
Gegeben sind die Punkte $P(\,6 \mid 4 \mid 3\,)$, $Q(\,4 \mid -1 \mid 7\,)$, $A(\,6 \mid -5 \mid 3\,)$ und die Gerade g durch die Punkte P und Q.

(a) Es ist zu zeigen, dass der Punkt A nicht auf der Gerade g liegt.

(b) Die Ebene E enthält den Punkt A und ist senkrecht zur Geraden g. Es ist zu beweisen, dass $2x + 5y - 4z + 25 = 0$ die Koordinatengleichung von E ist.

(c) Eine zweite Ebene F ist gegeben als F: $x + 3y - 2z - 7 = 0$. Gesucht ist die Schnittgerade der beiden Ebenen.

(d) Die Gerade g und die z-Achse sind windschief. Gesucht ist der kürzeste Abstand zwischen g und der z-Achse.

(e) Gesucht sind die Koordinaten jenes Punktes C, der auf g liegt und von A den kürzesten Abstand hat.

(f) Die Spitze S einer Pyramide mit der Grundfläche OAP (wobei O der Nullpunkt ist!) liegt auf der Geraden g. Bestimme die Koordinaten von S so, dass das Volumen der Pyramide 90 beträgt.

97. **Pyramide**
Das Dreieck $A(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$, $B(\,3 \mid 3 \mid 0\,)$ und $C(\,3 \mid 6 \mid -6\,)$ ist die Grundfläche einer (schiefen) Pyramide mit der Höhe h = 6 cm.

(a) Wie gross ist das Volumen der Pyramide?

(b) Die Spitze D er Pyramide ist so zu bestimmen, dass die Seitenkante AD die Länge $6\sqrt{2}$ hat und mit der Grundkante AB einen Winkel von 60° bildet.

98. **Prisma**
Die drei Punkte $A(\,0\mid 0\mid 0\,)$, $B(\,1\mid 2\mid 11\,)$ und $C(\,10\mid -1\mid 5\,)$ sind die Grundfläche eines geraden Prismas. Die Ecke D der Deckfläche (D ist über dem Punkt A) liegt in der Ebene G: $x+4y+20z+12=0$. Welches Volumen hat das Prisma?

Lösung zu: Analytische Geometrie / Vektorgeometrie

1. **Bedingung**
   Wenn die drei Vektoren gleiche Richtung haben.

2. **Gleiche Abstände**
   $Q(\,0 \mid 3 \mid -6\,)$
   Es ist nur die z-Koordinate des gesuchten Punktes unbekannt.

3. **Lücken füllen**

   (a) Einheitsvektor / entlang / y-Achse
   (b) Nulvektor / beliebige Richtung
   (c) der Spitze von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$
   (d) 9
   (e) n-dimensionaler

4. **Vektorkonstruktion**
   $\vec{e} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

5. **Lineare Abhängigkeit**
   $y = 11$
   Es ist a und b zu berechnen, so dass $\begin{pmatrix} 9 \\ y \\ 4 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix}$ gilt.
   Aus den Komponentengleichungen x und z lassen sich a und b berechnen. Werden diese dann in die Komponentengleichung von y eingesetzt so ergibt sich das Resultat.

6. **Lückentext**

   (a) ...Einheitsvektor...

   (b) ...Nullvektor...beliebige Richtung

   (c) ...mit sich selbst...im Quadrat

   (d) ...Koordinaten...Komponenten...

   (e) ...linear abhängig

7. **Richtig oder Falsch?**

   (a) wahr
   (b) falsch, weil sie nicht die gleiche Richtung haben.
   (c) falsch, dann sind sie eben gerade zwingend linear unabhängig.
   (d) falsch, es sollte heissen 'kolinear', statt 'gleich lang'.

8. **Doppelter Abstand**
   $P_1(\,\frac{14}{3} \mid \frac{14}{3}\,)$
   $P_2(\,4 \mid 4\,)$
   Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $P(\,x \mid x\,)$. Der Vektor PA hat die doppelte Länge wie der Vektor PB. Aus dieser Gleichung lässt sich x berechnen.

9. **Punkt in der xz-Ebene**
   $P(\pm\sqrt{3} \mid 0 \mid 3)$
   Ansatz: $P(x \mid 0 \mid 3)$
   Die Längen der Vektoren PA und PO müssen gleich sein. Daraus lässt sich x berechnen.

10. **Bestimmung einer Geradengleichung**
    $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$

11. **Geradengleichung**
    $g_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4.8284.. \end{pmatrix}$ (1. Lösung)
    $g_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -5.8284.. \end{pmatrix}$ (2. Lösung)

12. **Gegenseitige Lage**
    $a = -5$
    $S(2 \mid -1 \mid -1)$
    Schnittwinkel: 23.76°

13. **Transversale**
    15.81
    Die beiden Endpunkte auf den Geraden sind $G(4 \mid -8 \mid 19)$ und $H(4 \mid 1 \mid 6)$

14. **Gegenseitige Lage von Geraden**
    Die Richtungsvektoren sind kolinear und es gibt keinen gemeinsamen Punkt.

15. **Parameter bestimmen**
    a = 5
    Lineares Gleichungssystem 3x3 lösen.

16. **Sich schneidende Geraden**
    Aus zwei Komponentengleichungen s und t des Schnittpunktes berechnen und in der dritten zur Kontrolle einsetzen.
    Schnittwinkel $\phi \approx 88.4°$ durch Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren berechnen.

17. **Gerade schneidet Kugel**
    $D_1(4 \mid 2 \mid 4)$ $D_2(4 \mid 4 \mid 2)$
    Parametergleichung der Gerade durch A und B aufstellen. D als allgemeiner Punkt dieser Geraden ausdrücken (eine Unbekannte!). Länge des Vektors von O nach D muss 6 sein. Diese (quadratische) Gleichung hat 2 Lösungen.
    Beachte: Zum Lösen der Aufgabe ist keine Kenntnis der Kugelgleichung nötig!

18. **Einige Winkel**

    (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 + 1 = 3 \cdot \sqrt{5} \cos\alpha \qquad \alpha \approx 41.81°$

    (b) Es reicht zu zeigen, dass ein beliebiger Vektor in der Ebene (z.B. der Richtungsvektor der gegebenen Geraden) senkrecht zum Vektor $\vec{v}$ steht. Senkrecht stehen lässt sich am einfachsten mit dem Skalarprodukt beweisen.

19. **Punkt um Gerade drehen**
    $P'(1 \mid -5 \mid -5)$
    Das Drehen des Punktes um die Gerade um 180° entspricht dem spiegeln des Punktes an der Gerade. Dazu muss zuerst der Fusspunkt F des Lotes von P aus auf die Gerade berechnet werden. Anschliessend kann der Vektor von P nach F verdoppelt werden und zeigt somit von P nach P'.

20. **Kurzaufgaben**

(a) Mit $t = 0$ erreicht man den Stützpunkt der Geraden.

(b) Mögliche Lösung: $g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) Die beiden Geraden schneiden sich. Da der Stützpunkt bei beiden Geraden identisch ist, ist er gleichzeitig der Schnittpunkt. Die Geraden stehen zudem senkrecht aufeinander.

(d) Mögliche Lösung: $g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(e) Mögliche Lösung: $g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) $y_1 = 1.732x - 0.928 \qquad y_2 = -1.732x + 12.928$
Die Steigung der Geraden ist $\pm \tan 60° = \pm\sqrt{3}$. Durch Einsetzen des Punktes P erhält man die beiden Geradengleichungen.

21. **Kürzester Abstand zweier Geraden**

(a) Berechnung des kürzesten Abstandes (zum Beispiel mittels des Vektorproduktes der Richtungsvektoren der beiden Geraden) liefert:

$$S_1(\,2 \mid -4 \mid 6\,), S_2(\,-3 \mid 6 \mid -4\,)$$

(b) Bei der Ebene handelt es sich um die Mittelnormalebene von S_1 und S_2:

$$E : -x + 2y - 2z = 0.5$$

22. **Zwei Geraden**
Es ist zu zeigen, dass die Richtungen gleich sind und dass ein Punkt der einen Gerade auch auf der anderen Gerade liegt.
Tipp: Die vektorielle Geradengleichung muss nicht explizit bekannt sein.

23. **Zwei Geraden**

(a) Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear und es existiert kein gemeinsamer Punkt.

(b) $C(\,4 \mid 3 \mid 6\,)$
Der Punkt C kann allgemein als $C(\,4 - t \mid 3 + t \mid 6 - 5t\,)$ angesetzt werden. Durch gleichsetzen der Längen der Vektoren AC und BC erhält man die gesuchte Lösung.

24. **Schnittpunkt**
$S(\,-5 \mid -2 \mid 4\,)$

25. **Rechtwinkliges Dreieck**
Allgemeiner Ansatz für $P(\,5 \mid t - 2 \mid 1 + t\,)$. Das Skalarprodukt der Vektoren AB und BP ist immer Null, unabhängig von t.

26. **Kleinster Abstand**

(a) $R_1(\,-0.26 \mid 0.74 \mid 1.26\,)$
Zu berechnen mit Hilfe des Skalarprodukts der Vektoren OP und OR, wobei vorerst R allgemein als Punkt von g betrachtet wird.

(b) $A(\,0 \mid 1 \mid 1\,)$
Die Länge des Vektors OA lässt sich für jeden Punkt A auf g berechnen als $\sqrt{3t^2+2}$ und wird für t = 0 minimal.

27. **Transversale**

(a) $u \neq 7$

(b) $d = \sqrt{u^2+1}$
Zuerst sind die Spurpunkte der Geraden auf der xy-Ebene zu berechnen.

28. **Schneidend**
$z = -\frac{14}{3}$

29. **Ebenenschar**

(a) Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen, also $\vec{AB}$ darf nicht parallel $\vec{AC}$ sein. $k \neq -1, 1$.

(b) Normalenvektor aller drei Ebenen ist ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) $\approx 48.2°$

30. **Gegenseitige Lage dreier Ebenen**
Elimination von x und y liefert

$$\left(a^2+3a\right) z = a$$

Die Ebenen schneiden sich in einem Punkt, falls $a \neq -3, a \neq 0$.
Fall $a = -3$: keine gemeinsamen Punkte, Betrachtung der Normalenvektoren der drei Ebenen zeigt, dass die Ebenen nicht parallel sind.
Fall $a = 0$: unendlich viele gemeinsame Punkte, die drei Ebenen haben eine gemeinsame Schnittgerade

31. **Schnitt zweier Ebenen**

(a) Beide Ebenen sind parallel zur y-Achse.

$$E_1 : -x - z + 9 = 0$$

$$E_2 : -2x + z + 2 = 0$$

(b) Die Lösung des linearen Gleichungssystems liefert $x = 11/3$ und $z = 16/3$, y kann beliebig gewählt werden.

(c) Zur Berechnung der Schnittgeraden zweier Ebenen genügt es, die Durchstosspunkte einer (geeigneten) in der ersten Ebene gelegenen Gerade mit der zweiten Ebene zu bestimmen.

32. **Gegenseitige Lage zweier Ebenen**
Für die Koordinatengleichung der Ebene E_1 erhält man

$$E_1 : x - 2y + 2z + 2 = 0$$

(a) Einsetzen in beiden Ebenengleichungen zeigt, dass der $P(\,2 \mid 4 \mid 6\,)$ nicht auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen liegt.

(b) Mittels des Skalarprodukten von Normalenvektoren der beiden Ebenen erhält man den Winkel 90°.

(c) Die Parameterdarstellung der Geraden g lautet

$$g:\ \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Damit folgt $E_1 \cap g = (\,2 \mid 4 \mid 2\,)$ und $E_2 \cap g = (\,2.8 \mid 4.4 \mid 4\,)$

(d) Mittels des Skalarprodukten von Normalenvektoren der beiden Ebenen erhält man den Winkel 26.6°.

33. **Ebenen**

(a) $2x - 3y + 4z - 12 = 0$

(b) $g:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $E\,(u,v):\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x - 2y = 0$

34. **Schnitt zweier Ebenen**
Mögliche Form der Parameterdarstellung der Schnittgeraden:

$$g:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

35. **5 Ebenen**
Es entsteht ein Prisma mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche (A=4) und der Höhe 5. Das Volumen beträgt somit 20.

36. **Parallele Ebenen**
a = 3

37. **Ebene und Durchstosspunkt**

(a) E: 2x-2y+z-7=0
F: 23x+14y+3z-177=0

(b) $D(\,8 \mid 1 \mid -7\,)$

(c) $s:\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 17 \\ 74 \end{pmatrix}$

38. **Abgeschnittene Pyramidenspitze**

(a) $\dfrac{GF \cdot h}{3} = \dfrac{1600 \cdot 40}{3} = 21333\dfrac{1}{3}$

(b) $E(\,15 \mid -15 \mid 10\,)$ $\quad F(\,10 \mid 10 \mid 20\,)$ $\quad H(\,-5 \mid 5 \mid 30\,)$
Jeder der gesuchten Punkte liegt auf einer Geraden durch S. Mit Hilfe jeweils einer Komponente kann der Streckungsfaktor des Richtungsvektors berechnet werden und daraus dann die restlichen Koordinaten.

(c) 3x-y+4z-100=0

(d) $K(\,-6 \mid -6 \mid 28\,)$

39. **Kreis und Kreissehne**
$M(\,-2 \mid 1\,)\; r = 5$
Sehne von $S_1(\,3 \mid 1\,)$ zu $S_2(\,-5 \mid 5\,)$ Länge: ≈ 8.94

40. **Kreisgleichung gesucht**
$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 25$
Als Ansatz dient die allgemeine Kreisgleichung: $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$.
Setzt man $y_m = \frac{1}{2}x_m + \frac{7}{2}$ und die Punkte A und B ein, so lässt sich x_m berechnen.

41. **Kleinste Kugel zwischen zwei Kugeln**
$M(\,0.5 \mid -1 \mid -1\,)\;\; r = 4.5$
Zuerst die Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie die Radien r_1 und r_2 der gegebenen Kugeln berechnen. Der gesuchte Kugelradius ist dann die Hälfte der Strecke, die übrigbleibt wenn von der Entfernung der beiden Mittelpunkte die Radien subtrahiert werden.
Der gesuchte Mittelpunkt lässt sich am einfachsten über Stauchung des Vektors M_1M_2 auf die notwendige Länge berechnen.

42. **Gegenseitige Lage von Kugeln**

(a) $M_1(\,15 \mid 12 \mid 24\,)\quad r_1 = 27 \qquad M_2(\,7 \mid 10 \mid 8\,)\quad r_2 = 9$
Die Lösungen lassen sich durch Umformung der Gleichungen in die Mittelpunktform finden.

(b) Weil $\overline{M_1M_2} = 18$ und $r_1 = \overline{M_1M_2} + r_2$ ist folgt, dass sich die beiden Kugeln von innen berühren.

43. **Kugelgleichung gesucht**
$K_1:\; (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$
$K_2:\; (x-6)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$
Als Ansatz kann die allgemeine Kugelgleichung $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 = r^2$ verwendet werden. Die ersten vier Bedingungen ergeben $r = 5$; $z_m = 5$ (aus Bedingung 3) und $y_m = 4$ (aus Bedingung 2 und 4). Setzt man zusätzlich den Punkt P ein, so lässt sich x_m berechnen (2 Lösungen).

44. **Bewegung eines Punktes**

(a) –

(b) Ableiten liefert

$$\vec{v(t)} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 3\sin 6t \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{v(t)}\right|^2 = 9\sin^2 6t + 1$$

Maximale Geschwindigkeit bei $t = k\frac{\pi}{12}, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

45. **Bewegung eines Punktes im Raum**

(a) Die Kurve stellt eine Art Achterbahn dar.

(b) Bestimmung des Maximums der Abstandfunktion im Quadrat

$$d(t)^2 = (\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (\sin 2t)^2$$

liefert, dass der Punkt zum ersten Mal zur Zeit $t = 2.78$ am weitesten vom Nullpunkt entfernt ist.

(c) Ableiten liefert den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} cost \\ -2\sin t \\ 2cos2t \end{pmatrix}, \quad \text{Betrag von} \quad \vec{v}(5) = 2.6$$

46. **Quadrat**
$B(\,10 \mid -1\,)$
$C(\,19 \mid 6\,)$
$D(\,12 \mid 15\,)$
Aus der Seitenlänge lässt sich die Länge der Diagonalen berechnen und damit kann der Diagonalenvektor auf die entsprechende Länge gebracht werden.

47. **Winkel und Fläche**

(a) $\alpha \approx 57.52°$ $\beta \approx 47.72°$ $\gamma \approx 74.74°$
Berechungen mit Skalarprodukt und Winkelsumme.

(b) A = 5.5
Berechung mit Trigonometrie.

48. **Trapez**

(a) $D(\,7 \mid 17\,)$
Das Trapez liegt parallel zur x-Achse! Daraus lässt sich ablesen, dass die Höhe 15 ist und die Seite AB 36. Aus der Fläche kann die Mittellinie und daraus die Seite CD und schlussendlich der Punkt D berechnet werden.

(b) $\alpha \approx 71.57°$, $\beta \approx 53.75°$, $\gamma \approx 126.25°$, $\delta \approx 108.43°$
Über das Skalarprodukt berechenbar.

49. **Länge 9**
$\vec{c_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$
Die drei notwendigen Bedingungen lauten:
1. Länge von $\vec{c}$ gleich 9
2. Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$
3. Skalarprodukt $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

50. **Blickwinkel**
$P(\,x \mid 0 \mid 0\,)$. Mit dem Skalarprodukt $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ folgt für einen rechten Winkel $x_1 \approx 8.89, x_2 \approx -0.89$ und für 60° $x_1 \approx 15.01, x_2 \approx -5.46$. (Schnittpunkte der x-Achse mit der Thaleskugel bzw. der Ortskugel über der Strecke)

51. **Senkrecht**
Das Skalarprodukt $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ ist unabhängig von k immer 0, d.h. die Vektoren stehen unabhängig von k immer senkrecht aufeinander.

52. **Reguläres Tetraeder**
Die von der Spitze des Tetraeders ausgehenden Seiten werden durch die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gleicher Länge beschrieben. Alle Flächenwinkel sind 60°
Mit Hilfe des Skalarprodukts kann nun gezeigt werden, dass $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ ist. Durch zyklische Vertauschung gilt das auch für die anderen Seiten.

53. **Punkt im Polygon - Test**
Ein möglicher erster Test besteht darin, die Summe der Winkel $\angle(APB) + \angle(BPC) + \angle(CPA)$ zu

berechnen. Die Summe beträgt $\approx 360°$, der Punkt P könnte deshalb innerhalb des Dreiecks liegen. Exakte Rechnung zeigt, dass der Punkt innerhalb der Dreiecksebene liegt und zwar auf der Seitenhalbierenden AM_a.

54. **60-Winkel**
$C_1(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$ und $C_2(\,1 \mid 0 \mid 1\,)$
Ansatz $C(\,x \mid 0 \mid z\,)$. Mit dem Skalarprodukt lässt sich eine Beziehung zwischen x und z herleiten. Diese kann dann in die Längenformel für den Abstand BC eingesetzt werden.

55. **Ungleichung**
$|\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \cos^2\gamma$ ist immer kleiner oder gleich $|\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2$ weil $\cos^2\gamma$ sich im Intervall [0..1] bewegt.

56. **Thaleskreis**
M ist der Mittelpunkt zwischen A und B. $\vec{r}$ sei sowohl der Vektor AM als auch der Vektor MB. $\vec{m}$ bezeichne den Vektor MC. $\vec{a}$ den Vektor AC und $\vec{b}$ CB. Es ist zu zeigen, dass $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist.
Drückt man sowohl $\vec{a}$ als auch $\vec{b}$ durch $\vec{r}$ und $\vec{m}$ aus und führt man dann das Skalarprodukt aus, so ergibt sich 0 weil die Längen von $\vec{r}$ und $\vec{m}$ gleich sind (Radius Thaleskreis!)

57. **Parallelogramm**
$62.05°$, $A = 86.7$
Zuerst muss die Ecke C bestimmt werden. Mit dem Skalarprodukt kann dann der Winkel zwischen den Diagonalen ausgerechnet werden.
Für die Berechnung des Flächeninhalts kann z.B. zuerst der Winkel α bei A berechnet werden. Die Fläche ist dann $A = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin\alpha$

58. **Dreiecksberechnungen**

    (a) Seite $a = \overline{BC} = 3$, Wnkel $\alpha = 36.7°$, Fläche $F = 1.12$

    (b) Höhenfusspunkt $H_c(\,4 \mid 0 \mid 1\,)$

59. **Spiegeln eines Punktes an einer Geraden**
$L(\,3 \mid 0.6 \mid 0.2\,)$ist der Lotfusspunkt des Lotes von P auf die Gerade g. Daraus folgt der gespiegelte Punkt $\overline{P}(\,5 \mid 2.2 \mid -0.6\,)$.

60. **Inkreismittelpunkt**
Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden liefert $I(\,3 \mid -0.25\,)$.

61. **Dreieckskonstruktion**
Lot von C auf Gerade g liefert $H_c(\,2 \mid 4 \mid 1\,)$ und damit $B(\,3 \mid 0 \mid 2\,)$ und $\alpha \approx 54.7°$.

62. **Berechnungen am Oktaeder**
Lot von A auf g liefert $M(\,1 \mid 5 \mid 1\,)$ und damit $C(\,3 \mid 6 \mid 3\,)$ und $B(\,0 \mid 3 \mid 3\,)$, $D(\,2 \mid 7 \mid -1\,)$.
Mittels des Vektorproduktes erhält man $E(\,3 \mid 3 \mid 0\,)$ und $F(\,-1 \mid 7 \mid 2\,)$.

63. **Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden**
$P(\,2 \mid -4 \mid 6\,)$, $Q(\,-3 \mid 6 \mid -4\,)$

64. **Gleichschenklige und rechtwinklige Dreiecke**

    (a) Eine Parameterdarstellung der Geraden g liefert für C die Darstellung

$$C(\,-3 + 4\lambda \mid 6 - \lambda \mid -1 + 2\lambda\,)$$

Nun lässt sich der Parameter λ so bestimmen, dass die beiden Schenkel des Dreiecks gleich lang sind oder dass der Höhenfusspunkt H_c mit der Mitte der Basis AB übereinstimmt. Man erhält $\lambda = 2$ und $C(\,5 \mid 4 \mid 3\,)$.

(b) Bei den gesuchten Ecken handelt es sich um die Schnittpunkte der Geraden g mit der Thaleskugel über der Strecke AB. Die Berechnung erfolgt am einfachsten mittels des Skalarproduktes. $C_1(\,1 \mid 5 \mid 1\,)$ und $C_2(\,5 \mid 4 \mid 3\,)$

65. **Ecken eines Würfels**
Die Ecken C und F lassen sich durch den Parameter λ der Geraden ausdrücken. Das Dreieck ACF ist gleichseitig. Berechnung und Gleichsetzen der Seitenlängen liefert die Parameterwerte λ für C und μ für F und als eine Lösung die Ecken $C(\,3 \mid 3 \mid 0\,)$ und $F(\,-1 \mid 4 \mid -1\,)$.
B liegt auf der Normalen durch den Schwerpunkt des Dreiecks ACF im Abstand $\sqrt{3}$ vom Schwerpunkt. Damit erhält man als eine mögliche Ecke $B(\,1 \mid 2 \mid -2\,)$.

66. **Parallele Ebenen und ein Lichtstrahl**

(a) E: 2x-2y-z+6=0 und F: 2x-2y-z-12=0

(b) d = 6; Verwendung der Hess'schen Normalform (HNF)

(c) $G(\,-38 \mid -21 \mid -28\,)$
Zuerst Druchstosspunkt des Lichtstrahls durch die Ebene E berechnen. $R(\,-12 \mid -11 \mid -14\,)$. Anschliessend einen Punkt des Lichtstrahl an der Ebene E spiegeln, z.B. P liefert $P'(\,27 \mid 4 \mid 7\,)$. Gespiegelter Punkt und Durchstosspunkt bilden den gespiegelten Lichtstrahl. Diesen mit der Ebene F schneiden liefert die Lösung.

67. **Zwei Kugeln**

(a) 6

(b) Ausserhalb! Die Strecke M_1S misst 12 Einheiten, ist also grösser als der Kugelradius

(c) $M_2(\,11 \mid 5 \mid 4\,)$; Radius $r_2 = 6$

(d) $\sqrt{72}$

(e) $\sqrt{18}$

68. **Zwei Ebenen und eine Kugel**

(a) 2x+y-2z-22=0

(b) 2x+y-2x+32=0

(c) 36.6°

(d) Z.B. mit Hilfe der HNF zeigen, dass die Abstände zu den Ebenen und zum Punkt P von M aus immer gleich gross sind. Oder spezielle Lage ausnützen, d.h. Ebenen sind parallel und D liegt auf der einen Ebene.

69. **Quadrat, Lichtstrahl und Pyramide**

(a) $|AB| = |BC|$, rechter Winkel bei B.

(b) $D(\,4 \mid 5 \mid 26\,)$

(c) $M(\,10 \mid 8 \mid 20\,)$

(d) 35.26°; E(ABC): x + 2y + 2z - 66 =0

(e) $Z(\,30 \mid -12 \mid 0\,)$

gespiegelter Lichtstrahl $l' : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(f) $S_1(\,12 \mid 12 \mid 24\,)$, $S_2(\,8 \mid 4 \mid 16\,)$
Zuerst die Länge der Höhe ausrechnen (h = 6).

70. **Verbindende Gerade**

(a) Abstand $d = \frac{13}{3}$
Berechnung mittels HNF.

(b) Die Geraden g und h sind windschief. Ihre Richtungsvektoren sind nicht linear abhängig und es gibt keinen gemeinsamen Punkt (Schnittpunkt).

(c) 5x + 2y - 6z + 39 = 0

(d) $i : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$
G und H seien die Schnittpunkte der gesuchten Gerade mit den Geraden g resp. h. Die Punkte können mit dem Parameter der jeweiligen Gerade allgemein ausgedrückt werden. Die Bedingung

$$\overrightarrow{AG} = k \cdot \overrightarrow{AH}$$

liefert ein Gleichungssystem, das gelöst werden muss.

71. **Dreieck und ein Paar Kugeln**

(a) Dreiecksseiten messen 12.5; 12.5 und 13

(b) Richtungsvektoren nicht parallel (nicht kolinear) und die Geraden haben keinen gemeinsamen Punkt

(c) r=15, Berührungspunkt $B(\,-2 \mid -4 \mid 18\,)$ (=Q!)
Normalebene N zu g durch M erstellen, Durchstosspunkt von g durch N ist gesuchter Punkt.

(d) $-z + 18 = 0$
QM ist Normalenvektor der gesuchten Tangentialebene.

(e) Q liegt auf K (vgl. oben) und Q liegt auf K', weil die Länge AQ = 20 ist.

(f) N: $4x + 3z - 46 = 0$
Es handelt sich dabei um die Normalebene N_2 zur Gerade k(AM) durch den Punkt Q.

(g) r = 12
Normalebene N_2 (vgl. oben) mit k(AM) durchstossen liefert Punkt C. Länge CQ ist gesuchter Radius.

72. **Kugeln und Gerade**

(a) $r = |MP| = 6$

(b) $s = \sqrt{72}$
Die Durchstosspunkte der Gerade durch die Kugel sind $D_1(\,3 \mid 3 \mid 10\,)$ und $D_2(\,3 \mid -3 \mid 4\,)$.

(c) $d = \sqrt{18}$
Dies entspricht der Grundaufgabe Abstand eines Punktes von einer Gerade im Raum.

(d) richtig, weil $|MS| = 12 > 6$

(e) $M_S(\,11 \mid 5 \mid 4\,)$ und $r_S = 6$

73. **Kreiszylinder**

(a) $T(\,0 \mid 3 \mid 12\,)$
Die Verbindung von der Achse zur Tangente muss zu beiden Geraden senkrecht sein.

(b) $l' : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 22 \end{pmatrix}$
Der in der ersten Teilaufgabe bestimmte Vektor der kürzesten Verbindung zwischen der Achse und der Tangente kann als Normalenvektor der Tangentialebene an den Zylinder im Punkt T aufgefasst werden.
Durch Spiegelung des Punktes L an dieser Tangentialebene kann der Punkt L' bestimmt werden. Die Gerade durch L' und T ist die gesuchte Gerade des reflektierten Lichtstrahls.

74. **Gerader Kreiskegel**

(a) 22

(b) $\approx 34.75°$

(c) $Q(\,-1 \mid 6 \mid 23\,)$
Am einfachsten wird zuerst der Mittelpunkt M des Grundkreises mittels Lot von S auf E bestimmt $M(\,1 \mid 4 \mid 8\,)$. Q ist dann gleich weit von M entfernt wie P, in genau entgegengesetzter Richtung.

75. **QUADRATische Pyramide**

(a) $D(\,-1 \mid 5 \mid -3\,)$
Die Strecke AD ist senkrecht zu AB (Skalarprodukt=0) und hat die Länge von AB=6.

(b) $C(\,3 \mid 9 \mid -1\,)$

(c) $S(\,-2 \mid 7 \mid 4\,)$
Die Höhe lässt sich aus dem Volumen und der Grundfläche berechnen ($h = 6$). S ist senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundquadrates (Normalenvektor!) im Abstand 6.

76. **Dreiseitige Pyramide**

(a) E: $4x - 3y + 12z - 72 = 0$

(b) 58.5

(c) $S_1(\,12 \mid 8 \mid 6\,)$ und $S_2(\,0 \mid 0 \mid 4\,)$
Die Berechnung erfolgt am einfachsten mit Hilfe der Hess'schen Normalform.

77. **Geradenschar**

(a) Komponentengleichungen von $g_a(t)$ in E einsetzen. Die Gleichung wird allgemeingültig.

(b) Alle Geraden der Schar sind parallel, weil der Richtungsvektor nicht von a abhängt.

(c) $r = \frac{\sqrt{45}}{2}$
Dies entspricht dem halben Abstand der beiden parallelen Geraden $g_0(t)$ und $g_5(t)$.

78. **Ebenen-Winkel-Geraden-Pyramide**

(a) E(ABC): 2x - 2y -z + 28 = 0

(b) A = 6

(c) $\alpha = 60.2°$

(d) $s: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{83}{3} \\ -\frac{83}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(e) $V = \frac{122}{3}$

79. **Gleichschenkliges Trapez und Pyramide**

(a) Zu zeigen ist $2 \cdot \vec{DC} = \vec{AB}$ und $|\vec{AD}| = |\vec{AB}|$.

(b) $\alpha = 45°$

(c) $F(\,0 \mid 4 \mid 0\,)$

(d) E(ABCD): $2x + y - 2z - 4 = 0$

(e) $S(\,10 \mid 9 \mid -10\,)$

80. **Pyramide mit dreieckiger Grundfläche**

(a) $A = 7.5$

(b) $2x + 2y + z \pm 90 = 0$
Mit der Grundfläche lässt sich aus dem Volumen die Höhe der Pyramide $h = 30$ berechnen. Indem der Normalenvektor zur Ebene (PQR) auf die Länge 30 gebracht wird, kann z.B. von P aus je ein Punkt der gesuchten Ebenen gefunden werden.
Die Geleichungen der gesuchten Ebenen unterscheiden sich von der Gleichung der Ebene (PQR) nur im Zahlenwert. Dieser kann durch Einsetzen der gefundenen Punkte berechnet werden.

81. **Gerade, quadratische Pyramide**
$A(\,2 \mid -6 \mid 18\,)$; $B(\,22 \mid -2 \mid -4\,)$; $C(\,12 \mid 26 \mid -8\,)$ und $D(\,-8 \mid 22 \mid 14\,)$
Der Punkt A ist der Schnittpunkt der Gerade g(S,P) mit der Normalebene zu SM durch M.
Den Punkt D findet man indem der Vektor AM bei M angehängt wird.
Zur Berechnung der Punkte B und D muss der Normalenvektor zur Ebene ASM auf die gleiche Länge wie der Vektor AM gebracht werden. Anschliessend kann er in beide Richtungen bei M angehängt werden und liefert dadurch die Punkte B und D.

82. **Drei Geraden und eine Pyramide**

(a) $d = 6$
Eine mögliche Vorgehensweise: Man durchstösst eine beliebige Normalebene von p und q mit den beiden Geraden. Der Abstand des Durchstosspunkte entspricht dem gesuchten Abstand der Geraden.

(b) $\alpha \approx 47.55°$
Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der gerade berechnen.

(c) $S(\,-4 \mid 3 \mid 7\,)$. Mittelnormalebene zwischen p und q mit g schneiden liefert den gesuchten Punkt S.

(d) Die 4 Eckpunkte sind: $P_1(\,1 \mid -4 \mid 2\,)$, $P_2(\,5 \mid 0 \mid 4\,)$, $P_3(\,-1 \mid 0 \mid -2\,)$, und $P_4(\,3 \mid 4 \mid 0\,)$.
Normalebene zu p (und q) legen, von der S den Abstand ± 3 hat. Durchstosspunkt mit p und q liefern die Eckpunkte.

83. **Vom Quadrat zur Pyramide**

(a) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $B(\,8 \mid -10 \mid 5\,)$ $C(\,18 \mid 0 \mid 0\,)$ und $D(\,8 \mid 11 \mid 2\,)$

(c) $E:\ 5x + 2y + 14z - 90 = 0$

(d) $V = 450$. Die Höhe $h = 6$ der Pyramide findet man mit der Hess'schen Normalform.

(e) $\alpha \approx 54.74°$

84. **Tetraeder**

(a) $\gamma \approx 67.5131°$

(b) $A \approx 19.32$

(c) $7x + 9y - 6z - 7 = 0$

(d) $h \approx 12.884$
Die Spitze des Tetraeders liegt senkrecht über dem Schwerpunkt $S(\,1 \mid 0 \mid 0\,)$. Normale durch S zur Grundebene geschnitten Ebene E ergibt die Spitze $D(\,-6 \mid -9 \mid 6\,)$.

(e) $\approx 71.3°$

(f) $g' : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

85. **Berechnungen am Tetraeder**

(a) Die einzelnen Seitenflächen lassen sich mittels des Vektorproduktes zweier Kantenvektoren einfach berechnen. Oberfläche: ≈ 75.9

(b) Aus einer Skizze lässt sich ablesen, dass P nur auf den Seitenflächen ACD oder ABD liegen kann. Punkt im Polygontest liefert $P \in ABD$.

(c) Aus einer Skizze ist ersichtlich, dass die Gerade die Seitenfläche ABC durchstösst. Berechnung des Schnittpunktes Gerade/Ebene liefert $(\,4 \mid 1 \mid 14/3\,)$.

(d) Die Schwierigkeit liegt darin, dass nicht sofort ersichtlich ist, welche Seitenflächen von der Geraden durchstossen werden. Im schlimmsten Fall muss für alle Seitenflächen überprüft werden, ob die Gerade die Seitenfläche durchstösst. Der Rechenaufwand kann also beträchtlich werden.

86. **Gerader Kreiskegel**

(a) $h = 11$

(b) $\alpha \approx 55.245°$

(c) $Q(\,-1 \mid 6 \mid 23\,)$
Zuerst das Lot von S auf ε bestimmen. $\vec{PQ} = 2 \cdot \vec{PM}$

87. **Kreise und Tangenten**

(a) $M_1(\,12 \mid 7\,);\ r_1 = 3.6 \qquad M_2(\,\frac{55}{9} \mid 7\,);\ r_2 \approx 4.9115$
Zuerst kann der Schnittpunkt P von g und der Geraden durch A und B berechnet werden. Die Mittelpunkte M_1 und M_2 haben beide $y = 7$. Begründung: 45°-Winkel und gleiche x-Koordinaten der Punkte A und B!

88. **Zwei Kugeln**

(a) $M_1(\,0 \mid 0 \mid \frac{85}{18}\,)$ und $r \approx 7.4289$

(b) $M_2(\,0 \mid 0 \mid -2\,)$
Die Aufgabe kann auch wie folgt aufgefasst werden:
Wo schneidet die kürzeste Verbindung zwischen der Gerade durch A und B und der z-Achse die z-Achse? Tipp: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei (windschiefen) Geraden steht auf beiden Geraden senkrecht.

89. **Eine Ebene und zwei Kugeln**

(a) $-2x + 2y + z - 1 = 0$

(b) $\alpha \approx 53.13°$

(c) Der Mittelpunkt M_1 gespiegelt an der gegebenen Ebene ergibt den Mittelpunkt M_2. Aus den Kugelgleichungen ist zudem ersichtlich, dass $r_1 = r_2$ ist.

(d) $M(\,1 \mid 2 \mid -1\,)$ $r = \sqrt{27}$. Der Mittelpunkt M ist die Mitte zwischen M_1 und M_2. Der Radius lässt sich in einer Schnittzeichnung mit Hilfe des Pythagoras berechnen.

90. **Vier Punkte, eine Ebene und eine Kugel**

(a) $2x - 2y - z + 28 = 0$

(b) $A = 6$.
Der einfachste Weg zur Lösung führt über die Gleichung $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

(c) $\alpha \approx 62.01°$

(d) $P(\,-1.9 \mid 12.15 \mid 8.9\,)$

(e) $M'(\,7 \mid -1 \mid -6\,)$ $\quad r' = 8$
Der Lotfusspunkt vom Kugelmittelpunkt $M(\,3 \mid 1 \mid -2\,)$ auf die Ebene E_2 entspricht dem gesuchten Mittelpunkt M'. Den Radius r' findet man mit dem Pythagoras.

91. **Kreis und Kugel**

(a) $M(\,5 \mid 7\,)$ $\quad r = 5$

(b) $y_1 = \frac{3}{4}x - 3$ und $x = 0$ (y-Achse)
Die Lösung findet man zum Beispiel mit der Hess'schen Normalform: Der Kreismittelpunkt hat von den gesuchten Tangenten den Abstand 5 (=Radius).

(c) $(x-5)^2 + (y-7)^2 + (z-12)^2 = 169$
Mit einer guten Schnittskizze lassen sich die fehlende z-Koordinate des Mittelpunktes und der Radius finden.

92. **Reflektierende Kugel**

(a) Radius $r = 3$; Berührungspunkt $P(\,1 \mid 2 \mid 2\,)$
Die Verbindung PM steht senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden g.

(b) $Q(\,-6.6 \mid 0 \mid -2\,)$
Zuerst müssen die Durchstosspunkte des Lichtstrahls l mit der Kugel berechnet werden. Der näher bei L liegende Punkt ist der richtige (entspricht P aus obiger Teilaufgbe).
Als nächstes muss die Lichtstrahlgerade l an der Tangentialebene im Durchstosspunkt P gespiegelt werden. Dies liefert die Lichtgerade l'.
Schlussendlich muss der Durchstosspunkt der l' Gerade durch die xz-Ebene berechnet werden.

93. **Ebene, Kugel und Dreieck**

(a) $\alpha \approx 76.56°$
(b) $d = 12$. Z.B. Hess'sche Normalform verwenden.
(c) $(x+4)^2 + (y-10)^2 + (z+3)^2 = 225$. Den Kugelradius bekommt man mit einem Pythagoras.
(d) $p = -4$; $E_t : \ 12y - 9z + 78 = 0$. Der Vektor PM ist der Normalenvektor der gesuchten Tangentialebene.
(e) $A_{AMP} \approx 112.01$
(f) $A_{max} \approx 178.9$

94. **Billiard**

(a) $x - 2y = 0$
(b) $A(-\frac{1}{3} \mid \frac{1}{2})$ $\quad \alpha \approx 56.31°$
Das Loch L_1 kann an der oberen Bande gespiegelt werden (L_1'). Die Verbindung L_1L_1' geschnitten mit der oberen Bande ergibt den Reflexionspunkt A.
(c) $y = 0.6948x$ und $y = 0.3314x$
Man stelle sich die weisse Kugel punktförmig vor und dafür die schwarze als Kreis mit Radius 8cm. Somit gilt es die Tangenten vom weissen 'Punkt' an den schwarzen Kreis zu legen.
(d) $\approx 0.866m$
(e) $\approx 81.516\%$. Der von der Lampe beleuchtete Teil des Tisches besteht aus zwei Kreissektoren und zwei Dreiecken. Diese Flächen im Verhältnis zur gesamten Spielfläche ist zu bestimmen.

95. **Zylinder**
Der Zylinderradius entspricht dem kürzesten Abstand der beiden windschiefen Geraden: $r = 3$
P hat von a den Abstand $\sqrt{5}$, also liegt P nicht auf der Zylinderoberfläche.

96. **Punkte, Geraden, Abstände und eine Pyramide**

(a) $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$
(b) $\vec{n}_E \parallel \vec{PQ}$
(c) $g : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 39 \\ 55 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
(d) 4.085
(e) $C(4 \mid -1 \mid 7)$
(f) $S(2 \mid -6 \mid 11)$

97. **Pyramide**

(a) 10.8
Grundfläche: $\frac{27}{5}$
(b) $D_1(6 \mid 0 \mid -6)$ und $D_2(8 \mid -2 \mid 2)$

98. **Prisma**
V = 3402
Grundfläche: ≈ 54.5596