Differentialrechnung

1. **Ableitungsfunktion**
   Gesucht ist je die Ableitung $f'(x)$ der folgenden Funktionen. Berechnung mit dem Differenzenquotient.

   (a) $f(x) = 2x^2 - 4$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2. **Ableitungen**
   Bestimme von den angegebenen Funktionen jeweils die ersten beiden Ableitungen.

   (a) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x}$

   (b) $h(t) = t \cdot \sin(4\pi) + \cos(4t)$

3. **erste Ableitung**
   Gesucht ist jeweils die **erste** Ableitung. Die Lösung ist soweit möglich zu vereinfachen und ohne negative Exponenten anzugeben.

   (a) $f(x) = x^2 e^{1-x}$

   (b) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

   (c) $h(x) = \ln(\ln x)$

   (d) $k(x) = \sqrt{x \sin x}$

   (e) $p(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4. **erste und zweite Ableitung**
   Gesucht sind die **erste und zweite** Ableitung. Die Lösungen sind soweit möglich zu vereinfachen und ohne negative Exponenten anzugeben.

   (a) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

   (b) $g(x) = x^4 \ln x$

   (c) $h(x) = \dfrac{x}{1-x}$

5. **einmal ableiten**
   Gesucht ist die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{2x} + \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

   (b) $g(t) = x \cdot \sin(3t) - \cos(xt)$

   (c) $x(i) = hihihi$

6. **zweimal ableiten**
   Berechne die erste und die 2. Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3} - x}{\sqrt{x}}$.

7. **99. Ableitung**
   Wie lautet die 99. Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(2x) - \cos(-x)$?

8. **Ableiten von Hand**
   Die Ableitungen der folgenden Funktionen sollen *von Hand* bestimmt werden:

   (a) $f(x) = \frac{2+e^x}{e^x}$

   (b) $g(t) = \tan \frac{t+1}{t-1}$

(c) $x(y) = y^2 e^{-y}$

(d) $K(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} + 3\cos p - \pi$

Die einzelnen Schritte (Anwendung der Ableitungsregeln) sollen dokumentiert werden.

9. **Ableiten von Hand**
Die Ableitungen der folgenden Funktionen sollen *von Hand* bestimmt werden:

(a) $g(t) = \left(\frac{3t+2}{3t-2}\right)^{-2}$

(b) $x(u) = u^2 \cdot e^{-u}$

(c) $K(p) = p \cdot \sqrt{1-p^2}$

(d) $f(u) = \ln \frac{1+u}{1-u}$

Die einzelnen Schritte (Anwendung der Ableitungsregeln) sollen dokumentiert werden.

10. **Ableitungen**
Bestimme von den angegebenen Funktionen jeweils die ersten beiden Ableitungen.

(a) $f(x) = 5(x^3 - x^2(x + 2x^2))$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 3}{\sqrt{x}}$

(c) $g(h) = hx^2 + hx + xh^2$

(d) $h(t) = t \cdot \sin 4\pi + \cos(4t) + \sqrt[4]{t^5}$

11. **Erste Ableitung**
Wie lautet die erste Ableigung der folgenden Funktionen in einfachster Schreibweise?

(a) $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 14}{x + 2}$

12. **Ableiten mit Differenzenquotient**
Die folgenden Funktionen sind mit Hilfe des Differenzenquotienten abzuleiten:

(a) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(c) $h(x) = (2x+1)^2$

13. **1. und 2. Ableitung**
Gesucht sind jeweils die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(t) = 4x^2 \sin(6t) + 3t\cos(4x) - 2\sqrt{(2t)}\sin(\sqrt{x})$

(b) $g(x) = \dfrac{a-x}{bx^2}$

(c) $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{4\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

14. **Interpretation eines vt-Diagramms**
Die Geschwindigkeit eines Körpers im Zeitabschnitt $[0, 15]$ ist gegeben durch

$$v(t) = 5\left(\frac{\sin t}{0.1t^2 + 1}\right)^2$$

Im Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Körper an der Stelle $s(t) = 2$.

(a) Gesucht ist eine Skizze des at- und das st-Diagramms.

(b) Wie lautet die Beschleunigungsfunktion?

15. **Zusammenhang**
Es ist in Worten zu erklären, weshalb beim Wendepunkt einer Kurve $f'''(x) \neq 0$ gelten muss.

16. **Lückentext**
Wendepunkt: Bezeichnung für einen Punkt einer Kurve, in welchem die ... ihr ... ändert. In einem Wendepunkt geht eine ... in eine ... über oder umgekehrt. Liegt an der Stelle x_0 ein Wendepunkt des Graphen von $f(x)$ vor, dann ist dort die ... extremal.
(Aus Duden Rechnen und Mathematik)

17. **Aufblasen eines Ballons**
Bläst man einen Ballon auf, so wird der Ballon zu Beginn rasch grösser. Je mehr Luft aber in den Ballon hineingeblasen wird, umso langsamer wächst der Radius des Ballons. Was wir hier beobachten, ist die Änderungsrate des Radius in Abhängigkeit des Volumens des Ballons.
Der Radius r einer Kugel mit Volumen V ist gegeben durch

$$r(V) = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(a) Gefragt ist eine Skizze des Graphen der Funktion $r(V)$ und der Ableitung $r'(V)$ im Bereich $0 \leq V \leq 2$.

(b) Wie gross ist die Änderungsrate des Radius an der Stelle $V = 0.5$, $V = 1$ und $V = 1.5$?

18. **Newton lässt grüssen**
Gegeben ist die Funktion

$$s(t) = \sin(t - \sin t)$$

$s(t)$ beschreibt die Position eines asymmetrisch schwingenden Körpers zur Zeit t.

(a) Wie lauten die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktionen?

(b) Wie gross ist der lokale Attraktor der Nullstelle $t = 0$ bei der Newtoniteration für die Funktion $s(t)$?

19. **Skizzieren einer Kurve**
Gegeben ist eine Funktion $f(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $f''(x) > 0$ nur für $x < -2$ und für $2 < x < 4$
- $f'(x)$ fällt für $x > 4$
- $f'(x) = 0$ existiert genau einmal im Intervall $-2 < x < 2$ und zudem bei $x = 5$.

Skizziere den möglichen Verlauf der Kurve.

20. **Es passt**
Von einer Funktion dritten Grades (kubisch) kennt man folgende Eigenschaften:

- Der Graph der Funktion geht durch den Ursprung $O(\,0 \mid 0\,)$;
- Die Tangente an die Funktion im Punkt $P(\,2 \mid \frac{8}{3}\,)$ ist horizontal;
- Der Wendepunkt der Funktion hat den x-Wert 4.

Gesucht ist die Funktionsgleichung.

21. **Kubische Funktion durch den Nullpunkt**
Eine Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Ursprung (Nullpunkt), hat in $P(\,2 \mid \frac{8}{3}\,)$ ein Extremum und an der Stelle $x = 4$ eine Wendestelle.

(a) Welche Werte haben die Parameter a, b, c und d?

(b) Gesucht ist das zweite Extremum (Hoch- oder Tiefpunkt) der Funktion.

22. **Unbekannte Polynomfunktion 3. Grades**
Wie lautet die Gleichung derjenigen Polynomfunktion 3. Grades, welche die x-Achse im Koordinatenursprung berührt und im $P(\,3 \mid 0\,)$ unter einem Winkel von $-45°$ (also fallend) schneidet?

23. **Zwei Kurven**
Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{1}{8}x^4 - x$. Gesucht wird eine Funktion $f(x)$ 3. Grades, mit den folgenden Eigenschaften. $f(x)$ hat mit $g(x)$ zwei Nullstellen gemeinsam. In derjenigen Nullstelle mit positiver x-Koordinate hat $f(x)$ gleichzeitig einen Wendepunkt. In der anderen Nullstelle schneiden sich die Kurven der Funktionen rechtwinklig. Bestimme die Funktionsgleichung von $f(x)$.

24. **Funktion 4. Grades**
Gesucht ist eine Funktion 4. Grades, die im Punkt $P(\,0 \mid 24\,)$ einen Hochpunkt hat. Bei $x = 2$ besitzt die Funktion einen Wendepunkt mit der Tangente $y = -20x + 40$. Bestimme die Funktionsgleichung.

25. **Überlegungen an Polynomfunktionen**

(a) Welche Polynomfunktion 4. Grades der Form $f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ hat im Punkt $P(1/0)$ und im Punkt $Q(0/-1)$ Wendepunkte?

(b) Wie muss der Parameter a gewählt werden, dass sich die Kurve $y = x^3 + ax$ und die Gerade $y = -x$ rechtwinklig schneiden?

(c) Welche Wende- und Terrassenpunkte hat die Kurve $y = x^4 + x^3$?

26. **Parabel einpassen**
Die Kurve $y = x^2$ und die Gerade $y = 1$ sollen zwischen den Punkten $P(\,0 \mid 0\,)$ und $Q(\,1 \mid 1\,)$ durch eine geeignete Parabel verbunden werden. Damit der Übergang möglichst 'harmonisch' verläuft, sollen im Punkt Q sowohl Steigung, wie auch Krümmung und im Punkt P die Steigungen der beiden zusammentreffenden Kurven übereinstimmen. Bestimme den Grad der gesuchten Parabel und berechne ihre Funktionsgleichung .

27. **Berühren zweier Kurven**
Für welche Werte des Parameters a berühren sich die Kurven$y = e^x$ und $y = ax^2$?

28. **Berühren von Kurven**
Für welche Werte des Parameters a berühren sich die beiden Kurven $y = \left(x^2 - a\right) e^{-x}$ und $y = -e^{-x}$?

29. **Rechtwinklig schneiden**
Gegeben sind die Kurven $y = 1 - \frac{1}{3}x^2$ und $y = ax^2$. Wie ist der Parameter a zu wählen, damit sich die beiden Kurven rechtwinklig schneiden?

30. **Parallele Tangente**
Wie gross muss a gewählt werden, damit $f(x) = \dfrac{ax-1}{x-1}$ an der Stelle $x = 2$ eine Tangente hat, die parallel zur Geraden $y = -3x + 5$ verläuft?

31. **Harmonie**
Gegeben sind die drei Funktionen

$$f_1(x) = 2 \cdot \cos x \qquad f_2(x) = -\frac{7}{16}x^4 + \frac{7}{4}x^3 - 2x^2 + 2 \qquad f_3(x) = \frac{4}{x^2}$$

Die beiden Kurven von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ werden im Punkt $P(\,0 \mid 2\,)$ miteinander verbunden. Die Kurven von $f_2(x)$ und $f_3(x)$ im Punkt $Q(\,2 \mid 1\,)$. Es ist rechnerisch zu untersuchen, ob die beiden Übergänge in P resp. Q harmonisch verlaufen.

32. **Harmonische Verbindung**
Die Kurven der Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 2$ sollen zwischen den beiden Punkten $A(\,-1 \mid -1\,) \in f(x)$ und $B(\,0 \mid 2\,) \in g(x)$ harmonisch verbunden werden. Für die Verbindung ist eine Polynomfunktion zu wählen.

33. **Zur Diskussion steht...**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3(x-5) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 8x + \frac{5}{2}$.

    (a) Wo befinden sich die Nullstellen, die Terassen- und die Wendepunkte des Funktionsgraphen?

    (b) Es ist zu zeigen, dass der Punkt $P(\,4 \mid -13.5\,)$ ein Tiefpunkt von $f(x)$ ist.

34. **e hoch**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2-x)e^x$.
Gesucht sind die Nullstellen, Hoch- Tief- und Wendepunkte der Funktion, sowie deren Verhalten für $x \to \pm\infty$.

35. **Kurveneigenschaften**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-2) \cdot \sqrt{x}$. Untersuche die folgenden Eigenschaften:

    - Definitionsbereich
    - Nullstellen
    - Hoch- und Tiefpunkt(e)
    - Wendepunkt(e)

36. **Untersuchung von Kurveneigenschaften**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

    (a) Wie lautet die erste Ableitung von f(x)?

    (b) Beweise: $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

    (c) Wo sind die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f(x)?

    (d) Wo sind die Wendepunkte der Funktion f(x)?

37. **Kurvendiskussion**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{t^3x^3 - 8}{4tx^2}$ mit $x \neq 0$ und dem reellen Parameter $t > 0$.
Untersuche den Graph der Funktion f(x) auf Nullstellen, Pole, Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten.

38. **Rationale Funktion**
Gegeben ist die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$
Gesucht ist ein aussagekräftiger Ausschnitt des Graphen, der Definitionsbereich der Funktion, Nullstellen und Horizontalstellen und weitere charakteristische Eigenschaften.

39. **Funktionenschar**
Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \dfrac{x^2 - x + t}{x-1}$ mit $t \neq 0 \in I\!R$.

    (a) Wir betrachten vorerst $t = 4$. Bei der Funktion $f_4(x)$ sind Definitionsbereich, Symmetrie, Pole, Asymptoten, Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte zu untersuchen. Es ist ein vernünftiger Ausschnitt der Kurve zu skizzieren.

    (b) Für welche $t \in I\!R$ haben die Graphen von $f_t(x)$ Extremalpunkte? (Auf einen Test mit der 2. Ableitung kann verzichtet werden.)

40. **Polynomfunktion wird zu Blatt**
Gegeben ist die Polynomfunktion
$$f(x) = 0.25x^5 - x^3 + x$$
   (a) Welches sind die wesentlichen Eigenschaften der Polynomfunktion? (Relevanter Ausschnitt des Graphen, Nullstellen, Horizontalstellen, Wendepunkte und allfällig weitere interessante Eigenschaften)
   (b) Spiegelt man die Kurve $y = f(x)$ im 1. Quadranten an der Geraden $y = x$, so entsteht eine blattförmige Figur.
      - Welche Fläche hat dieses Blatt?
      - Wie kann die Breite des Blattes berechnet werden? Stichwortartige Beschreibung!

41. **Kurveneigenschaften**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^3 - x^5$.
   (a) Wie sieht der Graph der Kurve aus? (Skizze)
   (b) Wo steigt und wo fällt die Kurve?
   (c) Wo steigt und wo fällt die erste Ableitung der Kurve?
   (d) Hoch-, Tief-, Wende- und Terrassenpunkte?

42. **Ausgezeichnete Punkte**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x} \cdot (4 - x)$. Gesucht sind alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte der Funtion.

43. **gebrochen-rationale Funktion light**
Gegeben ist die Funktion $f(x)$, sowie ihre beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.
$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$
Gesucht sind alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte der Funktion.

44. **Kurve untersuchen**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$. Es sind die Hoch- und Tiefpunkte, sowie die Wende- und Terrassenpunkte der Funktion rechnerisch zu bestimmen.

45. **Tangentengleichungen**
Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt $A(\,1 \mid -7\,)$ an die Kurve der Funktion $f(x) = 2x^2 - 1$ gelegt werden können?

46. **Schnittpunkt mit x-Achse**
An die Kurve mit der Gleichung $y = -\frac{1}{8}x^3$ wird im Punkt $P(\,2 \mid ?\,)$ die Tangente gelegt. In welchem Punkt schneidet diese Tangente die x-Achse?

47. **Tangenten legen**
Vom Punkt $P(\,-2 \mid 3\,)$ aus werden die Tangenten an die Funktion $f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ gelegt. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten?

48. **Tangenten und Normalen**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$.
   (a) Wie lauten die Gleichungen der Tangente und Normale durch den Punkt $P(0/0)$?
   (b) Wie lauten die x-Koordinaten der Berührungspunkte aller zu t parallelen Tangenten an den Graphen $y = f(x)$?
   (c) Für welche Werte des Parameters c berühren sich die Kurven $y = f(x)$ und $y = x^2 + c$?

49. **Tangente durch den Ursprung**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{3}{2(x+1)^2}$.
An welchem Punkt der Kurve geht die Tangente durch den Nullpunkt?

50. **Tangente an die Kurve**
Wie lautete die Gleichung der Tangente, die vom Punkt $P(\,0 \mid -4\,)$ aus an die Kurve $y = \dfrac{5}{x} + 2x$ gelegt werden kann.

51. **Untersuchungen an Hyperbeln**
Gegeben ist die Hyperbel $y = 1/x$.

    (a) In welchen Punkten hat die Hyperbel eine zur Geraden $y = -2x$ parallele Tangente?

    (b) Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Hyperbel vom Punkt $P(0/1)$ aus?

52. **Ableitungen und ihre Folgen**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{20x - 40}{x^2 - 2x + 1}$.
Gesucht ist der Wendepunkt und die Gleichung der Wendetangente der Funktion.

53. **Normale**
Gegeben sind die Gerade g: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ und die Parabel p: $y = x^2 + 2x - 2$. Beweise dass g eine Normale zur Parabel darstellt.

54. **Normalengleichung**
Wie lautet die Gleichung der Normale zur Kurve $y = \dfrac{3}{x} + 3$ im Schnittpunkt der Kurve mit der x-Achse?

55. **Für welches t?**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = tx^3 + 3x^2 + tx + t$. Für welchen Wert von t ($t \neq 0$)hat die Funktion genau eine horizontale Tangente?

56. **Rechtwinklig schneiden**
Gegeben sind die Kurven $y_1 = 1 - \frac{1}{3}x^2$ und $y_2 = ax^2$. Wie ist der Parameter a zu wählen, damit sich die beiden Kurven rechtwinklig schneiden?

57. **x-Achse als Tangente**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x(x-a)^2$ mit $a \in I\!R$ und $a > 0$.
Es ist zu beweisen, dass für jedes a die x-Achse eine Tangente an die Kurve von $f(x)$ ist.

58. **Tangenten**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2e^x}{2 + e^x}$.

    (a) Wie lautet der Definitionsbereich der Funktion?

    (b) Wie verhält sich die Funktion für sehr grosse und für sehr kleine x Werte?

    (c) An welcher Stelle hat die Tangente an die Kurve die Steigung 0.5?

    (d) Unter welchem Winkel schneidet die Tangente im Punkt $P(\,0 \mid ?\,)$ die x-Achse?

    (e) Gesucht ist der Wendepunkt W der Funktion.

59. **Wendestelle**
Für welchen Wert von a hat die Funktion $f(x) = (2x - a) \cdot e^{\frac{x}{a}}$ bei $x = -1$ eine Wendestelle?

60. **Berühren von Kurven**
Für welche Werte des Parameters a berühren sich die Kurven $y = e^x$ und $y = ax^2$?

61. **Berühren in einem Punkt**
Beweise, dass sich alle Parabeln mit der Gleichung $y = ax^3 + x + 3$ mit $a \in I\!R$ in einem festen Punkt berühren. Beachte: Beispiele sind kein Beweis!

62. **Sehne einer Parabel**
Gegeben ist die quadratische Funktion $f(x) = ax^2$ mit $a \in I\!R$. Wählt man zwei beliebige Punkte P und Q auf der Kurve von f(x) und verbindet sie, so nennt man diese Verbindung eine Sehne. Beweise dass die Steigung jeder beliebigen Sehne gerade gleich dem Durchschnitt der Tangentensteigungen in den entsprechenden Punkten P und Q ist.

63. **Symmetrie**
Beweise: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 8x^2$ ist symmetrisch zur Geraden $x = 2$.

64. **Berühren und senkrecht schneiden**
Gesucht ist die Gleichung derjenigen Gerade, welche die Kurve $y = x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ berührt und die Gerade $y = 2x - 3$ rechtwinklig schneidet.

65. **Abstand Punkt / Kurve**
Gegeben ist die Polynomfunkktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

(a) Welches sind die charakteristschen Merkmale dieser Funktion und wie sieht ein relevanter Ausschnitt der Graphen der Funktion aus?

(b) Welcher Punkt der Kurve $y = f(x)$ hat vom Punkt $(\,0 \mid 0\,)$ den kleinsten Abstand?

66. **Dreieck**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{tx^2 + t}{(x+1)^2}$ mit $t > 0 \in I\!R$.
Die Tangente an die Kurve im Punkt $P(\,2 \mid \frac{5}{9}t\,)$ und die Tangente im Punkt $Q(\,0 \mid t\,)$ schliessen zusammen mit der x-Achse ein Dreieck ein.

(a) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten in P und in Q?

(b) Es ist zu zeigen, dass die Dreiecksseite auf der x-Achse von t unabhängig ist.

(c) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

67. **Schnittwinkel mit x-Achse**
Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2 - a$ mit $a \in I\!R^+$. Für welchen Wert von a schneidet $f(x)$ die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

68. **berühren**
Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = 2x^2 - x^3$.

(a) Es ist rechnerisch zu zeigen, dass sich die beiden Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ im Punkt $P(\,2 \mid 0\,)$ berühren.

(b) Wie lautet die Gleichung der Wendetangente der Kurve $g(x)$?

69. **Schnittwinkel**
Wo und unter welchem Winkel im Intervall $[0..2\pi]$ schneiden sich die beiden folgenden Kurven?

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \qquad\qquad g(x) = \tan x$$

70. **Schnittpunkte von Kurven**
In welchen Punkten schneiden sich die Kurven $y = 2^x$ und $y = x^{20}$?

71. **Schnittpunkt mit Tangente**
An die Kurve mit der Gleichung $y = -\frac{1}{8}x^3$ wird an der Stelle $x = 2$ die Tangente gelegt. In welchem Punkt schneidet diese Tangente die gegebene Kurve?

72. **Winkel Kurve / Gerade**
Gegeben ist die Polynomfunktion
$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3$$
Unter welchen Winkeln schneidet die Parabel die x-Achse?

73. **Winkel und Terrassenpunkte**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin x + kx + 1$ mit dem Parameter $k \geq 0$.

(a) Unter welchen Winkeln schneidet der Graph der Funktion die x- und die y-Achse für den Parameterwert $k = 2$?

(b) Für welche Werte des Parameters $k \geq 0$ hat der Graph $y = f(x)$ unendlich viele Terrassenpunkte?

(c) Wie gross ist die mittlere Steigung des Graphen $y = f(x)$ für beliebiges $k \geq 0$?

74. **Tangente an Kurve**
Gegeben ist die Kurve $C : y = e^x$.

(a) Wie lautet die Gleichung der Tangente t an die Kurve C, welche parallel zur Geraden $g : y = 2x$ ist und in welchem Punkt berührt die Tangente die Kurve?

(b) In welchen Punkten und unter welchen Winkeln schneidet die Gerade $y = 2x + 1$ die Kurve C?

(c) Welcher Punkt auf der Kurve C hat den kleinsten Abstand vom Punkt $(\,3 \mid 0\,)$?

75. **Bewegungen auf einer Geraden**
Zwei Punkte starten zur Zeit $t = 0$ auf einer Geraden gemäss den Gesetzen
$$s_1(t) = 0.5t^2 + 5 \qquad \text{1. Punkt}$$
$$s_2(t) = t^3 - 10t \qquad \text{2. Punkt}$$
Dabei bezeichnet $s(t)$ den Abstand der Punkte vom Nullpunkt zur Zeit t.

(a) Mit welchen Geschwindigkeiten und in welche Richtungen beginnen die beiden Punkte ihre Bewegungen?

(b) Wann und wo kehrt der 2. Punkt um und wie gross ist im Umkehrpunkt seine Beschleunigung?

(c) Wann überholt der 2. Punkte den 1. Punkt?

(d) Welches ist die grösste Entfernung der beiden Punkte bevor der 2. Punkt den 1. Punkt überholt?

76. **Längenwachstum von Fichten**
Das jährliche Längenwachstum w (in Metern) einer Fichte wird in Abhängigkeit ihres Alters t (in Jahren) näherungsweise durch die Funktion
$$w(t) = \frac{500}{625 + (t - 38.75)^2}$$
beschrieben.

(a) In welchem Alter wächst der Baum 50cm im Jahr?

(b) In welchem Zeitpunkt wächst die Fichte am meisten?

(c) Gefragt ist eine Skizze des Graphen der Funktion $w(t)$ und der Ableitung $w'(t)$.

(d) Wie lautet die Ableitung $w'(t)$?

(e) Wie hoch wird (nach obigem Wachstumsgesetz) eine ausgewachsene Fichte?

77. **Aufblasen eines Ballons**
Bläst man einen Ballon auf, so wird der Ballon zu Beginn rasch grösser. Je mehr Luft aber in den Ballon hineingeblasen wird, umso langsamer wächst der Radius des Ballons. Was wir hier beobachten, ist die Änderungsrate des Radius in Abhängigkeit des Volumens des Ballons.
Der Radius r einer Kugel mit Volumen V ist gegeben durch

$$r(V) = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(a) Gefragt ist eine Skizze des Graphen der Funktion $r(V)$ und der Ableitung $r'(V)$ im Bereich $0 \leq V \leq 2$.
(b) Wie gross ist die Änderungsrate des Radius an der Stelle $V = 0.5$, $V = 1$ und $V = 1.5$?

78. **Energieverbrauch von Papageien**
Bei einer Papageienart hat man gemessen, dass der Flug über 1 km bei einer Geschwindigkeit von v km/h die Energie

$$E(v) = 0.31v + \frac{379.75}{v} - 21.7$$

Joule pro g Körpergewicht kostet.

(a) Gefragt ist eine Skizze eines relevanten Ausschnittes des Graphen der Funktion $E(v)$.
(b) Mittels der Ableitung $E'(v)$ soll der exakte Wert der Fluggeschwindigkeit, bei welcher der Energieverbrauch des Papageis minimal ist, bestimmt werden.
(c) Das Resultat ist anhand eines numerischen Verfahrens zu überprüfen und es soll argumentiert werden, warum bei dieser Aufgabe die Lösung mittels eines numerischen Verfahrens der exakten Lösung mittels Differentialrechnung vorzuziehen ist.

79. **Newton lässt grüssen**
Gegeben ist die Funktion

$$s(t) = \sin(t - \sin t)$$

$s(t)$ beschreibt die Position eines asymmetrisch schwingenden Körpers zur Zeit t.

(a) Wie lautet die Geschwindigkeitsfunktion?
(b) Wie gross ist der lokale Attraktor der Nullstelle $t = 0$ bei der Newtoniteration für die Funktion $s(t)$?

80. **Bewegung eines Punktes**
Ein Punkt startet zur Zeit $t = 0$ und bewegt sich gemäss der Vorschrift

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin^2(3t) \end{pmatrix}$$

$\vec{s}(t)$ ist also der Ortsvektor des Punktes zur Zeit t.

(a) Gefragt ist eine Skizze der Bahnkurve des Punktes in einem Schrägbild.
(b) Wann hat der Punkt die grösste Geschwindigkeit?

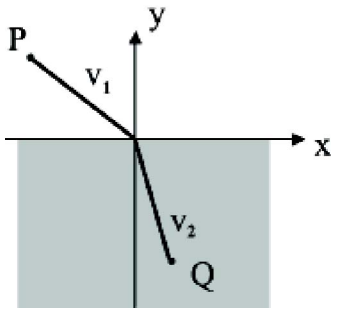
81. **Brechungsgesetz von Snellius**
Lichtstrahlen werden beim Übergang von einem Medium (Beispiel: Luft) in ein anderes Medium (Beispiel: Wasser) gebrochen. Die Lichtbrechung ist unter anderem für das Entstehen von Regenbogen verantwortlich. Zur Erklärung des Phänomens der Lichtbrechung genügen einfache geometrische Beziehungen und das Extremalprinzip der Natur: Ein Lichtstrahl wählt seinen Weg immer so, dass er den Weg in *minimaler Zeit* zurücklegen kann.
In untenstehender Skizze legt ein Lichtstrahl den Weg vom Punkt $P(-1 \mid 1)$ zum Punkt $Q(1 \mid -1)$ zurück. Unterwegs wird er an der x-Achse gebrochen. Oberhalb der x-Achse beträgt die Geschwindigkeit des Lichtstrahls $v_1 = 5$, unterhalb der x-Achse $v_2 = 2$.

(a) An welche Stelle x durchstösst der Lichtstrahl die Trennlinie der beiden Medien?

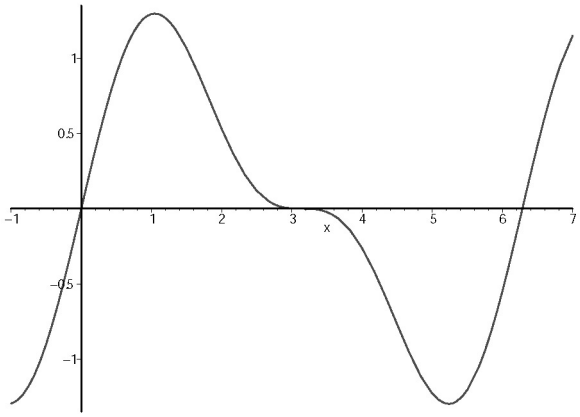
(b) α_1 bzw. α_2 bezeichnen die Winkel des Lichtstrahls gegenüber der Vertikalen. Das Brechnungsgesetz von Snellius besagt

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

Das Brechnungsgesetz soll anhand der berechneten Daten überprüft werden.



82. **Interpretation des vt-Diagramms einer Schwingung**
Gegeben ist untenstehender Ausschnitt des vt-Diagrammes einer Schwingung. Die Kurve ist punktsymmetrisch bezüglich dem Punkt$(\pi, 0)$.



(a) Gesucht ist Näherungswert für $f'(4.5)$ an.

(b) Gefragt ist eine Skizze des at-Diagramms.

(c) Gefragt ist eine Skizze des st-Diagramms unter der Anfangsbedingung $s(0) = 0$.

83. **Hirschpopulation**
Die Grösse $P(t)$ einer Hirschpopulation wird modelliert durch

$$P(t) = 4000 + 400\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 180\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

wobei t die Zeit in Monaten ab dem 1. April bezeichnet.

(a) Wann ist die Population am grössten? Wieviele Hirsche umfasst die Population in diesem Zeitpunkt?

(b) Wann ist die Population am kleinsten? Wieviele Hirsche umfasst die Population in diesem Zeitpunkt?

(c) Wann wächst die Population am schnellsten? Wann nimmt die Population am stärksten ab?

(d) Wie schnell wächst die Population am 1. April?

84. **Rechteck in Trapez**
Gegeben ist ein *gleichschenkliges* Trapez mit den Seitenlängen a = 6 cm, c = 2 cm und der Höhe h = 4 cm. Dem Trapez wird ein Rechteck einbeschrieben. Eine Seite des Rechtecks liegt auf der Trapezseite a und je eine Ecke auf den Trapezschenkeln. Wie sind die Länge und die Breite des Rechtecks zu wählen, damit das Rechteck möglichst grossen Flächeninhalt

85. **Rechteck in rechtwinkligem Dreieck**
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC (rechter Winkel bei C). Die beiden Katheten a und b messen 8 cm resp. 12 cm. Dem Dreieck wird ein Rechteck einbeschrieben, so dass je eine Rechteckseite auf jeder Kathete zu liegen kommt. Wie sind die Länge und die Breite des Rechtecks zu wählen, damit sein Flächeninhalt möglichst gross wird?

86. **Quader in Pyramide**
Gegeben ist eine regelmässige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Quadratseite misst 10 cm und die Pyramidenhöhe 12 cm.
In die Pyramide wird nun ein Quader gestellt. Der Quader besitzt zwei quadratische Seiten - eine davon liegt in der Grundfläche der Pyramide. Die Ecken der zweiten quadratischen Quaderseite liegen auf den Kanten der Pyramide.
Wie ist die Quadratseite und die Höhe des Quaders zu wählen, damit er maximales Volumen hat?

87. **Rechtecke in Parabeln**
Dem oberhalb der x-Achse liegenden Segment der Parabel $y = -2x^2 + 1$ werden Rechtecke so einbeschrieben, dass eine Seite der Rechtecke auf der x-Achse liegt. Wie gross sind die Koordinaten der rechten oberen Ecke des Rechtecks mit maximalem Umfang?

88. **Zylinder in Kreiskegel**
Einem geraden Kreiskegel mit der Höhe 10 cm und dem Grundkreisradius 2 cm ist ein Zylinder einzubeschreiben, dessen Volumen möglichst gross ist. Berechne seinen Radius und seine Höhe.

89. **zerlegte Zahl**
Die Zahl 72 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass deren Produkt möglichst gross wird.

90. **zerlegt Zahl**
Die Zahl 96 ist so in zwei Faktoren zu zerlegen, dass deren Summe möglichst klein wird.

91. **Neuer Bahnhof**
Die beiden Orte A und B liegen abseits einer (geradlinigen) Eisenbahnlinie. Der an der Bahnlinie dem Ort A am nächsten gelegene Punkt C hat einen Abstand von 5 km. Analog hat der dem Ort B am nächsten gelegene Punkt D der Bahnlinie einen Abstand von 7 km. Die Entfernung von C zu D beträgt 12 km. An der Bahnlinie, zwischen C und D soll ein neuer Bahnhof erstellt werden mit der Bedingung, dass die Gesamtentfernung (d.h. von A zum Bahnhof plus von B zum Bahnhof) so klein als möglich wird. Wieviele Kilometer von C entfernt kommt der neue Bahnhof zu stehen?

92. **Radiergummi**
Eine Firma stellt Radiergummi her. Die Produktionsmaschinen können pro Tag maximal 10'000 Stück herstellen. Die Produktionskosten $K(x)$ für x Mengeneinheiten zu 1'000 Stück lassen sich mit folgender Formel berechnen:
$$K(x) = 2x^3 - 18x^2 + 60x + 32$$
Ein Paket zu 1000 Radiergummis wird an Papeterien für 50 Euro verkauft. Wie viele Radiergummi sollte die Firma pro Tag herstellen um einen möglichst grossen Gewinn zu machen. Es kann davon ausgegangen werden, dass alle produzierten Gummis auch wirklich verkauft werden.

93. **Bogenfenster**
Ein Bogenfenster besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Wie müssen die Abmessungen des Fensters gewählt werden, damit bei einer Fensterfläche von 250 dm^2 möglichst wenig Fensterumrandung benötigt wird?

94. **Bogenfenster**
Ein Bogenfenster besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Wie müssen die Abmessungen des Fensters gewählt werden, damit bei einer 6 Meter langen Fenster-umrandung eine möglichst grosse Fensterfläche entsteht?

95. **Figuren aus Draht**
Ein 4m langer Draht wird in zwei Teile geschnitten. Aus einem Teil wird ein Kreis gebogen, aus dem anderen ein Quadrat. Bei welchem Kreisradius ist die Summe der Kreisfläche und der Quadratfläche minimal bzw. maximal?

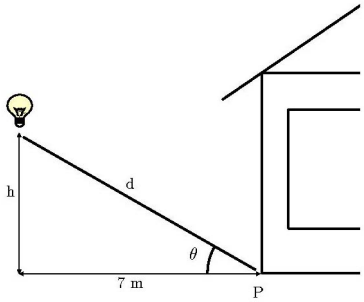
96. **Optimale Joghurtbecher**
Es sollen zylindrische Joghurtbecher mit $220cm^3$ Inhalt hergestellt werden, die mit einem Aluminiumdeckel verschlossen werden. Der Preis für Aluminiumblech ist fünfmal so hoch wie der Preis für den verwendeten Plastik. Wie gross sind unter diesen Annahmen der Radius und die Höhe des Bechers zu wählen, damit die Materialkosten minimal werden?

97. **Maximale Tragfähigkeit eines Balkens**
Die Tragfähigkeit T eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt der Breite b und der Höhe h berechnet sich nach der Formel $T = mbh^2$. Aus einem zylindrischen Holzstamm mit Radius r soll ein Balken mit maximaler Tragfähigkeit geschnitten werden. Welche Breite und Höhe hat der Balken?

98. **Optimale Beleuchtung**
Eine Lampe steht 7m vor dem Schaufenster eines Geschäftes. Der Punkt P am Boden wird je nach Höhe h der Lampe verschieden stark beleuchtet. Die Intensität I der Beleuchtung im Punkt P ist proportional zu $\sin\theta$ und umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung d. Es gilt:

$$I = k \cdot \frac{\sin\theta}{d^2}$$

k ist eine von der Lampe abhängige Konstante. In welcher Höhe h muss die Lampe montiert werden, damit die Beleuchtungsintensität I im Punkt P maximal wird?



99. **Dachrinne**
Ein Blech der Breite b soll durch Hochbiegen der seitlichen Enden zu einer *trapezförmigen Dachrinne* mit möglichst grossem Querschnitt verformt werden. Unter welchem Winkel müssen die Enden abgebogen werden, wenn auf beiden Seiten je ein Stück Blech der Breite $1/3b$ hochgebogen wird?

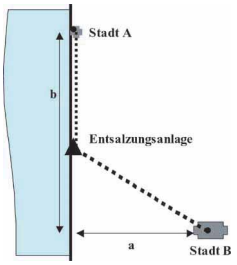
100. **Pfadfinder**
Eine Gruppe von Pfadfindern soll aus zwei Stangen der Länge 2m und zwei Stangen der Länge 4m ein Tor für den Eingang zu ihrem Lagerplatz zimmern. Die 2m-Stangen werden als Pfosten und die 4m-Stangen als Dach eingesetzt. Wie muss der obere Öffnungswinkel α gewählt werden, wenn das Tor eine möglichst grosse Durchlassfläche (Querschnittfläche) haben soll?

101. **Champagnerglas**
Ein Champagnerglas hat die Form eines Kegels und fasst exakt 1.5 dl. Wie gross ist die obere Glasöffnung zu wählen, damit bei der Herstellung des Glases möglichst wenig Material gebraucht wird? Wir nehmen an, dass die Dicke des Glases überall gleich gross ist und somit keine Rolle spielt. (Gerader Kreiskegel: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad M = \pi r s$)

102. **Zylindrisches Gefäss**
Ein zylinderfürmiges Gefäss ohne Deckel soll einen Inhalt von $200dm^3$ aufweisen. Der Boden wird aus einem quadratsichen Stück Blech ausgeschnitten. Das dabei wegfallende Material wird nicht wiederverwendet und muss zum Materialverbrauch gerechnet werden.
Bei welche Zylindermassen ist der Materialverbrauch für die Herstellung des Gefässes am geringsten?

103. **Meerwasser-Entsalzungsanlage**
Die Stadt A befindet sich direkt am Meer, die Stadt B in nicht leicht zugänglichem Gebiet a km vom Meer entfernt. Die beiden Städte kommen überein, eine gemeinsame Meerwasser-Entsalzungsanlage zu bauen. Die Kosten für das Verlegen der Pipeline vom Meer weg ins Landesinnere ist pro km doppelt so teuer wie das Verlegen der Pipeline (pro km) dem Meer entlang. An welcher Stelle muss die Entsalzungsanlage gebaut werden, damit die Kosten für die Pipeline möglichst gering ausfallen, wenn

- $a = 8$ km, $b = 10$ km
- a und b beliebig sind?



104. **Optimierungsproblem**
Aus einem Stück Schnur der Länge 10cm soll der Umfang eines Kreissektors gebildet werden. Für welchen Radius und welchen Zentriwinkel wird der Flächeninhalt des Kreissektors möglichst gross?

105. **Optimale Tüten**
Aus einem kreisförmigen Stück Karton mit Radius 10cm soll eine kegelförmige Tüte geformt werden, indem man den Kreis längs eines Radius einschneidet und einen (vernachlässigbaren) Teil der Kreisfläche überlappen lässt. Welches ist das grösstmögliche Volumen einer so hergestellten Tüte?

106. **Quaderförmige Schachtel**
Eine Schachtel hat die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche. Die Oberfläche der Schachtel sei S. In welchem Verhältnis muss die Kante a der Grundfläche zur Schachtelhöhe h sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?

107. **Zylinder liegt in Halbkugel**
Einer Halbkugel mit dem Radius R = 4cm wird ein liegender Zylinder mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h einbeschrieben. D. h. der Zylinder berührt mit der Mantelfläche den Boden der Halbkugel. Wie ist die Zylinderhöhe h zu wählen, damit der Zylinder möglichst grosses Volumen hat?

108. **Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden**
Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden

$$g_1 : \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{r}(\mu) = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P(\lambda)$ und $Q(\mu)$ seien die Endpunkte der kürzesten Verbindung der beiden Geraden. Die Parameterwerte λ und μ können mittels geometrischer Üerlegungen bestimmt werden. λ und μ können aber auch als Werte bestimmt werden, für welche die Abstandsfunktion

$$d(\lambda, \mu) = \overline{P(\lambda)Q(\mu)}$$

den kleinsten Wert hat.
Es sollen mit den Methoden der Differentialrechnung die exakten Koordinaten der Endpunkte P und Q des kürzesten Abstandes der beiden Geraden berechnet werden.

109. **Flächen im Raum**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{4}{\sqrt{3x^2 + y^2 + 2xy + 1}}$$

(a) Wo befindet sich das absolute Maximum dieser Funktion?

(b) Wie lauten die Gleichungen der Querschnitte des Funktionsgraphen mit der Aufriss- und Seitenrissebene. Gefragt sind auch Skizzen dieser Querschnitte.

(c) Gefragt ist in einem Schrägbild das ungefähre Aussehen des Graphen $z = f(x,y)$.

Lösung zu: Differentialrechnung

1. **Ableitungsfunktion**

   (a) $f'(x) = 4x$

   (b) $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

2. **Ableitungen**

   (a) $f'(x) = 4x + 3 + \dfrac{3}{x^2}$
   $f''(x) = 4 - \dfrac{6}{x^3}$
   Unbedingt Bruch aufteilen.

   (b) $h'(t) = \sin 4\pi - 4\sin 4t$
   $h''(t) = 16\cos 4t$ Variable beachten.

3. **erste Ableitung**

   (a) $f'(x) = e^{1-x}(2x - x^2)$

   (b) $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x}{2\sqrt{(x+1)^3}}$

   (c) $h'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

   (d) $k'(x) = \dfrac{\sin x + x\cos x}{2\sqrt{x\sin x}}$

   (e) $p'(x) = 1 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2$

4. **erste und zweite Ableitung**

   (a) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; $f''(x) = -4\sin x\cos x$

   (b) $g'(x) = 4x^3\ln x + x^3$; $g''(x) = 12x^2\ln x + 7x^2$

   (c) $h'(x) = \dfrac{1}{1-x)^2}$; $h''(x) = \dfrac{2}{1-x)^3}$

5. **einmal ableiten**

   (a) $f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$

   (b) $g'(t) = 3x\cos(3t) + x\sin(xt)$

   (c) $3h^3i^2$

6. **zweimal ableiten**
   $f'(x) = x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
   $f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
   Die Funktion kann vor dem Ableiten vereinfacht (=Bruch aufgeteilt) werden.

7. **99. Ableitung**
   $f^{(99)} = -2^{99}\cos(2x) + \sin(-x)$
   Nach 4 Ableitungen wiederholt sich deren Form (exkl. Faktor $2^{\cdot\cdot}$). Die 99. Ableitung entspricht somit im Wesentlichen der 3. Ableitung.

8. **Ableiten von Hand**

   (a) $f'(x) = -\frac{2}{e^x}$
   (b) $g'(t) = \left(1 + \tan\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2\right)\left(\frac{-2}{(t-1)^2}\right)$
   (c) $x'(y) = e^{-y}\left(2y - y^2\right)$
   (d) $K'(p) = -0.5p^{-1.5} - 3\sin p$

9. **Ableiten von Hand**

   (a) $g'(t) = 24\frac{3t-2}{(3t+2)^3}$
   (b) $x('u) = ue^{-u}(2-u)$
   (c) $K'(p) = \frac{1-2p^2}{\sqrt{1-p^2}}$
   (d) $f'(u) = \frac{2}{1-u^2}$

10. **Ableitungen**

    (a) $f'(x) = -40x^3 \quad f''(x) = -120x^2$
    (b) $f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{9}{4}x^{-\frac{5}{2}}$
    (c) $g'(h) = x^2 + x + 2hx \qquad g''(h) = 2x$
    (d) $h'(t) = \sin(4\pi) - 4\sin(4t) + \frac{4}{5}t^{-\frac{1}{5}} \qquad h''(t) = -16\cos(4t) - \frac{4}{25}t^{-\frac{6}{5}}$

11. **Erste Ableitung**

    (a) $f'(x) = 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 2x + 1$
    (b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{(x+2)^2}$

12. **Ableiten mit Differenzenquotient**

    (a) $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$
    (b) $g'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$
    (c) $h'(x) = 8x + 4$

13. **1. und 2. Ableitung**

    (a) $f'(t) = 24x^2\cos(6t) + 3\cos(4x) - \sqrt{2}\sin\sqrt{x}\cdot t^{-\frac{1}{2}}$
    $f''(t) = -144x^2\sin(6t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{x}\cdot t^{-\frac{3}{2}}$
    (b) $g'(x) = -\frac{2a}{b}x^{-3} + \frac{1}{b}x^{-2}$
    $g''(x) = \frac{6a}{b}x^{-4} - \frac{2}{b}x^{-3}$
    (c) $h'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{7}{6}}$
    $h''(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{7}{9}x^{-\frac{13}{6}}$

14. **Interpretation eines vt-Diagramms**

(a) mit Rechner

(b) Ableiten der Geschwindigkeitsfunktion liefert für die Beschleunigungsfunktion

$$a(t) = 10 \sin t \frac{\cos\left(0.1t^2 + 1\right) - \sin 0.2t}{\left(0.1t^2 + 1\right)^3}$$

15. **Zusammenhang**
$f'''(x) \neq 0$ bedeutet einen zwingenden Vorzeichenwechsel in der zweiten Ableitung. Ein Vorzeichenwechsel in der zweiten Ableitung besagt, dass dort der Graph der Funktion von einer Rechts- in eine Linkskurve übergeht oder umgekehrt. Zwischen einem Wechsel der Kurvenkrümmung liegt zwingenderweise ein Wendepunkt.

16. **Lückentext**

2. Ableitung...Vorzeichen...Linkskurve...Rechtskurve...1. Ableitung

17. **Aufblasen eines Ballons**

(a) –

(b) $0.328, 0.207, 0.158$

18. **Newton lässt grüssen**

(a) Ableiten liefert

$$v(t) = \cos(t - \sin t)(1 - \cos t)$$
$$a(t) = -\sin(t - \sin t)(1 - \cos t)^2 + \cos(t - \sin t)\sin t$$

(b) Iterationsvorschrift:

$$N(t) = t - \frac{\sin(t - \sin t)}{\cos(t - \sin t)(1 - \cos t)}$$

Bedingung für lokalen Attraktor: $t = -N(t), t \approx 2.225$

19. **Skizzieren einer Kurve**
Die angegebenen Bedingungen führen zu folgenden Aussagen für $f(x)$:

- Linkskurve für $x < -2$ und Linkskurve im Intervall $2 < x < 4$.
- Rechtskurve für $x > 4$.
- Ein Maximum zwischen -2 und 2 und ein Maximum bei $x = 5$

Daraus lässt sich der Schluss ziehen, dass bei $x = -2$; $x = 2$ und $x = 4$ je ein Wendepunkt sein muss. Die Verschiebung der Kurve in y-Richtung ist nicht definiert.

20. **Es passt**
$y = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$
Bedingungen:f(0) = 0; f(2) = $\frac{8}{3}$; f'(2) = 0; f"(4) = 0

21. **Kubische Funktion durch den Nullpunkt**

(a) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$

(b) Tiefpunkt T(6/0)

22. **Unbekannte Polynomfunktion 3. Grades**
$y = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2$
Bedingungen: $f(3) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ und $f'(3) = -1$

23. **Zwei Kurven**
$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x = 0$
Der kubische Ansatz verlangt 4 Unbekannte. Die 4 Bedingungen $f(0) = 0$; $f(2) = 0$; $f''(2) = 0$ und $f'(0) = 1$ liefern ein lineares 4x4 Gleichungssystem, das sich lösen lässt.

24. **Funktion 4. Grades**
$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 24$
Der Ansatz einer Funktion 4. Grades benötigt 5 Unbekannte. Die 5 Bedingungen $f(0) = 24$; $f'(0) = 0$; $f''(2) = 0$; $f'(2) = -20$ und $f(2) = 0$ liefern ein lineares 5x5 Gleichungssystem, das sich lösen lässt. Beachte: Die 5. Bedingung $f(2) = 0$ folgt aus der Tatsache, dass der Punkt auf dem Graphen von $f(x)$ bei $x = 2$ auch auf der gegebenen Tangente liegen muss. Daraus kann der y-Wert des Punktes berechnet werden.

25. **Überlegungen an Polynomfunktionen**

    (a) P und Q müssen auf dem Graph liegen und die zweite Ableitung muss für $x = 1$ und $x = 0$ Null sein. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

    (b) Gemeinsamer Schnittpunkt: $x^3 + ax = -x$
    Senkrecht schneiden: $3x^2 + a = 1$
    $a_1 = 1, a_2 = -2$

    (c) Terrassenpunkt bei $x = 0$, Wendepunkt bei $x = -0.5$

26. **Parabel einpassen**
$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$
Folgende Bedingungen müssen berücksichtigt werden:
$f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f'(1) = 0$; $f''(1) = 0$ und $f'(0) = 0$

27. **Berühren zweier Kurven**
Der Parameter a muss so gewählt werden, dass die beiden Kurven einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt die gleiche Steigung haben. Daraus folgt das Gleichungssystem

$$e^x = ax^2, e^x = 2ax$$

und für den Berührungspunkt $x = 2$, also $e^2 = 4a$ und $a \approx 1.85$.

28. **Berühren von Kurven**
Für einen Berührungspunkt müssen sowohl die Funktionswerte an einer Stelle x als auch die Ableitungen an dieser Stelle übereinstimmen. Das resultierende Gleichungssystem liefert $x = 0, a = 1$.

29. **Rechtwinklig schneiden**
$a = 1$
Die Schnittstellen der beiden Kurven liegen bei $x = \pm\sqrt{\frac{1}{a+\frac{1}{3}}}$. Bringt man die beiden Ableitungen an den x-Stellen der Schnittpunkte in die Beziehung $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ so entsteht eine Gleichung, die nach a aufgelöst werden kann.

30. **Parallele Tangente**
$a = 4$
Es muss $f'(2) = -3$ erfüllt sein.

31. **Harmonie**
Beide Anschlüsse sind nicht harmonisch! Zwar stimmen sowohl in P, als auch in Q die Funktionswerte und die Steigungen der jeweiligen Kurven überein, die Krümmungen (= 2. Ableitung) ist aber jeweils unterschiedlich.

32. **Harmonische Verbindung**
$f(x) = 12x^5 + 30x^4 + 21x^3 + 2$
Die entsprechenden Bedingungen lauten: $f(-1) = -1$; $f'(-1) = 3$; $f''(-1) = -6$; $f(0) = 2$; $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$

33. **Zur Diskussion steht...**

    (a) Nullstellen bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$
    Kann aus der faktorisierten Funktionsgleichung abgelesen werden.
    Wendepunkt $W(\,3 \mid -8\,)$
    Terrassenpunkt $T(\,1 \mid 0\,)$

    (b) Zu zeigen ist, dass $f(4) = -13.5$; $f'(4) = 0$ und $f''(4) > 0$ ist.

34. **e hoch**
$N_1(\,2 \mid 0\,)$; $H(\,1 \mid e\,)$; $W(\,0 \mid 2\,)$
$x \to +\infty \;\; f(x) \to -\infty$ und $x \to -\infty \;\; f(x) \to 0$

35. **Kurveneigenschaften**
$D = \{x/x \in I\!R \text{ und } x \geq 0\}$
Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$
Tiefpunkt bei $T(\,0.666 \mid -1.088\,)$
KEIN Wendepunkt (Die in Frage kommende Nullstelle der 2. Ableitung liegt nicht im Definitionsbereich!)
Um die notwendigen Ableitungen zu berechnen muss die Funktion ausmultipliziert werden. Zudem empfiehlt sich die Potenzschreibweise für die Wurzeln.

36. **Untersuchung von Kurveneigenschaften**

    (a) $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

    (b) Beweis mit Quotientenregel.

    (c) $H(\,1 \mid \frac{1}{2}\,)$; $T(\,-1 \mid -\frac{1}{2}\,)$

    (d) $W_1(\,-\sqrt{3} \mid -\frac{\sqrt{3}}{4}\,)$; $W_2(\,0 \mid 0\,)$ und $W_3(\,\sqrt{3} \mid \frac{\sqrt{3}}{4}\,)$

37. **Kurvendiskussion**
Nullstellen: $N_1(\,\frac{2}{t} \mid 0\,)$
Polstelle: $x = 0$
Hochpunkt: $H(\,-\frac{\sqrt[3]{16}}{t} \mid -\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot t\,)$
keine Wendpunkte
Asymptote: $y = \frac{t^2}{4}x$
Ableitungen: $f'(x) = \dfrac{t^3x^3 + 16}{4tx^3} = \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{4}{t}x^{-3} \qquad f''(x) = -\dfrac{12}{tx^4}$

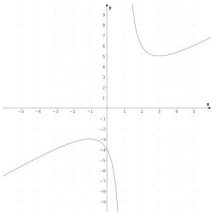
38. **Rationale Funktion**

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Nullstelle und Horizontalstelle be $x = 0$
Einfache Polstellen bei $x = \pm 1$
Symmetrisch bezüglich der y-Achse

39. **Funktionenschar**

(a) $D = I\!R \setminus \{1\}$; keine Symmetrie; Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x = 1$; Schiefe Asymptote $y = x$; keine Nullstellen; Tiefpunkt $T(\,3 \mid 5\,)$; Hochpunkt $H(\,-1 \mid -3\,)$; keine Wendpunkte
Ableitungen: $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$; $y'' = \dfrac{8}{(x-1)^3}$



(b) $t > 0$; aus der Diskriminante der quadratischen Funktion im Nenner der ersten Ableitung.

40. **Polynomfunktion wird zu Blatt**

(a) Einfache Nullstelle: $x = 0$, gleichzeitig Wendepunkt
Zweifache Nullstelle: $x = \pm\sqrt{2}$, gleichzeitig Horizontalstellen

(b)
- 8/3
- Breitestes Stelle: Kurvenpunkt mit Steigung 1. $x \approx 1.55, y \approx 0.061$
  Blattbreite ≈ 2.1

41. **Kurveneigenschaften**

(a) –

(b) Nullstellen der ersten Ableitung $x_1 = 0$ $x_{2,3} = -\sqrt{\frac{6}{5}}$.
$f(x)$ ist fallend links von x_3 und rechts von x_2.
$f(x)$ ist steigend zwischen x_2 und x_3.
Bemerkung: x_1 ist ein Terrassenpunkt

(c) Nullstellen der zweiten Ableitung x_1=0; $x_{2,3} = -\sqrt{\frac{6}{10}}$.
steigend - x_3 - fallend - x_1 - steigend - x_2 - fallend

(d) Tiefpunkt $T(\,-1.09 \mid -1.05\,)$; Hochpunkt $H(\,1.09 \mid 1.05\,)$
Wendepunkte: $W_1(\,-0.774 \mid -0.65\,)$ $W_2(\,0.774 \mid 0.65\,)$
Terrassenpunkt: $TER(\,0 \mid 0\,)$

42. **Ausgezeichnete Punkte**
Hochpunkt $H(\,1.33 \mid 3.079\,)$
Kein Wendepunkt. Der Kandidat bei $x = -\frac{4}{3}$ liegt nicht im Definitionsbereich.

43. **gebrochen-rationale Funktion light**
$H(\,1 \mid 0.5\,)$
$T(\,-1 \mid -0.5\,)$

$W_1(\,-\sqrt{3} \mid -\frac{\sqrt{3}}{4}\,)$ $W_2(\,0 \mid 0\,)$ $W_2(\,\sqrt{3} \mid \frac{\sqrt{3}}{4}\,)$

44. **Kurve untersuchen**
Hochpunkt: $H(\,-1.095 \mid 2.051\,)$
Tiefpunkt: $T(\,1.095 \mid -0.0516\,)$
Wendepunkt: 1 $W_1(\,-0.7745 \mid 1.65\,)$
Wendepunkt: 1 $W_2(\,0.7745 \mid 0.35\,)$
Terrassenpunkt: $TP(\,0 \mid 1\,)$

45. **Tangentengleichungen**
t1: y = 12x - 19
t2: y = -4x -3

46. **Schnittpunkt mit x-Achse**
Schnittpunkt $S(\frac{4}{3} \mid 0)$
Tangentengleichung: t: $y = -\frac{3}{2}x + 2$

47. **Tangenten legen**
t1: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
t2: $y = \frac{5}{3}x + \frac{19}{3}$

48. **Tangenten und Normalen**

    (a) Tangente $t : y = x$, Normale $n : y = -x$
    (b) Tangenten mit Steigung 1, also $f'(x) = 1$. $x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}$
    (c) Funktionswerte und Steigungen an der Stelle x müssen übereinstimmen:
    $x_1 \approx -0.83, x_2 \approx 0.23, x_3 \approx 1.35$
    $c_1 \approx -1.16, c_2 \approx 0.11, c_3 \approx -1.43$

49. **Tangente durch den Ursprung**
$P(-\frac{1}{3} \mid \frac{27}{8})$
Ansatz für Tangente: $y = ax$.
Im Berührungspunkt gilt somit $\dfrac{3}{2(x_0+1)^2} = -\dfrac{3}{(x_0+1)^3} \cdot x_0$

50. **Tangente an die Kurve**
$y = \frac{6}{5}x - 4$

51. **Untersuchungen an Hyperbeln**

    (a) $-\frac{1}{x^2} = -2, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
    (b) $y = -0.25x + 1$

52. **Ableitungen und ihre Folgen**
$W(4 \mid \frac{40}{9})$; Wendetangente $y = -\frac{20}{27} + \frac{200}{27}$

53. **Normale**
Schnittstellen der Kurven bei $x_1 = 1$ und bei $x_2 = -\frac{13}{4}$. Bei x_1 verhalten sich die beiden Steigungen der Tangenten wie $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, d.h. sie stehen senkrecht aufeinander.

54. **Normalengleichung**
$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$
Zuerst die Nullstelle bestimmen. Die Steigung der Normale in der Nullstelle ist minus 1 durch die Steigung der Tangente (=Ableitung) in der Nullstelle.

55. **Für welches t?**
$t = \pm\sqrt{3}$
Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt eine quadratische Gleichung, deren Diskriminante null sein muss, damit die Bedingung erfüllt ist.

56. **Rechtwinklig schneiden**
a = 1
Im Schnittpunkt muss die Bedingung $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ gelten.

57. **x-Achse als Tangente**
Nullstellen ablesen: $x_1 = 0$ und $x_2 = a$
Wenn f(x) die x-Achse als Tangente hat, so muss eine der beiden Nullstellen für jeden Wert von a gleichzeitig ein Extremum sein.
$f'(x_1) = f'(0) \neq 0 \Rightarrow$ kommt nicht in Frage.
$f'(x_2) = f'(a) = \frac{3}{8}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = 0$ unabhängig vom Wert von a!

58. **Tangenten**

   (a) Definitionsbereich = $I\!R$
   (b) $x \to +\infty \;\; f(x) \to 2$ und $x \to -\infty \;\; f(x) \to 0$
   (c) x=0.6931
   (d) 23.96°
   (e) $W(\,0.6931 \mid 0\,)$

59. **Wendestelle**
$a = \frac{2}{3}$
$y' = e^{\frac{x}{a}} \cdot \left(1 + \frac{2a}{x}\right) \;\; y'' = e^{\frac{x}{a}} \cdot \left(\frac{3}{a} + \frac{2x}{a^2}\right)$

60. **Berühren von Kurven**
Gemeinsamer Kurvenpunkt: $e^x = ax^2$
Gleiche Steigung: $e^x = 2ax$
$x = 2, a = \frac{e^2}{4}$

61. **Berühren in einem Punkt**
Der gemeinsame Punkt ist $P(\,0 \mid 3\,)$. Die Ableitung lautet $y' = 3ax^2 + 1$ und ist im Punkt P unabhängig von a immer 1. Folge: Alle Kurven haben den Punkt P gemeinsam und dort die gleiche Tangentensteigung, also berühren sie sich dort.

62. **Sehne einer Parabel**
Zwei Punkte P und Q auf der Parabel haben die Koordinaten $P(\,x_P \mid ax_P^2\,)$ und $Q(\,x_Q \mid ax_Q^2\,)$. Die Steigung der Verbindung zwischen P und Q ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax_P^2 - ax_Q^2}{x_P - x_Q} = ax_P + ax_Q$.
Berechnet man nun den Durchschnitt zwischen den Werten der Ableitung in P und in Q, so ergibt sich ebenfalls $ax_P + ax_Q$.

63. **Symmetrie**
Es ist zu zeigen, dass für alle a gilt $f(2-a) = f(2+a)$

64. **Berühren und senkrecht schneiden**
$y - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$

65. **Abstand Punkt / Kurve**

   (a) Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 1$
   Horizontalstellen bei $x = -0.5$ und $x = 1$
   Wendepunkt bei $(\,0 \mid 1\,)$
   (b) $(\,0.4 \mid -0.3\,)$

66. **Dreieck**

   (a) $y_P = \frac{2}{27}tx + \frac{11}{27}t$ und $y_Q = -2tx + t$
   (b) 6; Nullstelle von y_P bei $x = -\frac{11}{2}$, Nullstellen von y_Q bei $x = \frac{1}{2}$

(c) $A_\triangle = \frac{9}{7}t$
Der y-Werte des Schnittpunktes der beiden Tangenten ist die Höhe des Dreiecks.

67. **Schnittwinkel mit x-Achse**
$a = \frac{1}{4}$
Schnittpunkte mit der x-Achse sind $\pm\sqrt{a}$. Schnittwinkel 45° bedeutet bei $+\sqrt{a}$ Steigung 1.

68. **berühren**

(a) $f(2) = 0$ und $g(2) = 0$ und $f'(2) = g'(2) = -4$
(b) $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

69. **Schnittwinkel**
Winkel bei beiden Schnittpunkten 1.15^r $(= 65.9°)$
Schnittpunkte: $S_1(\,0.904 \mid 1.272\,)$ und $S_2(\,5.378 \mid -1.272\,)$

70. **Schnittpunkte von Kurven**
Achtung! Es gibt drei Schnittpunkte, da die Exponentialfunktion langfristig schneller wächst als jede Potenzfunktion:
$x_1 \approx -0.967, x_2 \approx 1.037, x_3 \approx 143.247$

71. **Schnittpunkt mit Tangente**
$P(\,-4 \mid 8\,)$
Zuerst kann an der Stelle $x = 2$ die Gleichung der Tangente ermittelt werden. Sie lautet $y = -\frac{3}{2}x + 2$. Schneidet man diese Gerade mit der Kurve, so ergibt sich eine Gleichung dritten Grades. Da aber eine Schnittstelle ($x = 2$) bekannt ist, können auch die anderen symbolisch berechnet werden (Polynomdivision).

72. **Winkel Kurve / Gerade**
Die Polynomfunktion hat zwei Nullstellen:
$x_1 \approx -2.26, \alpha_1 \approx 86.31°$ $x_2 = 1, \alpha_2 \approx 84.29°$

73. **Winkel und Terrassenpunkte**

(a) Winkel zur x-Achse: $\approx 71.25°$
Winkel zur y-Achse: $\approx 18.43°$
(b) Gleichungssystem $f'(x) = \cos x + k = 0$ und $f''(x) = -\sin x = 0$ liefert als einzige Lösung $k = 1$.
(c) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)dx = k$

74. **Tangente an Kurve**

(a) Punkte der Kurve C mit Steigung 2, also $e^x = 2$ und damit der Berührungspunkt $(\,x \mid y\,)$ mit $x = \ln 2$ und $y = 2$.
$$t : y = 2x + 2 - 2\ln 2$$
(b) Zwei Schnittpunkte
$$x = 0, \varphi \approx 18.4°$$
$$x \approx 1.26, \varphi \approx 11.95°$$
(c) Gleichung der Normalen n zur Kurve C durch $(\,3 \mid 0\,)$ liefert für den Schnittpunkt der Normalen mit der Kurve
$$e^{2x} + x - 3 = 0$$
und für $x \approx 0.4651$.

75. **Bewegungen auf einer Geraden**
$v_1(t) = t, a_1(t) = 1$ und $v_2(t) = 3t^2 - 10, a_2(t) = 6t$.

(a) $v_1(0) = 0$ nach links und $v_2(0) = -10$ nach rechts
(b) $v_2(t) = 0$ liefert $t \approx 1.83, s_2 \approx -12.17, a_2 \approx 10.95$.
(c) $s_(t) = s_2(t)$ liefert $t \approx 3.63$
(d) $d(t) = s_1(t) - s_2(t)$ hat ein Maximum bei $t = 2$, $d(2) = 19$.

76. **Längenwachstum von Fichten**

(a) Nach 19 und 58 Jahren.
(b) $w(t)$ wird maximal, wenn der Nenner minimal wird, also für $t = 38.75$.
(c) –
(d) $w'(t) = -500\frac{2t-77.5}{(625+(t-38.75)^2)^2}$
(e) $\int_0^{150} w(t)dt \approx 50$

77. **Aufblasen eines Ballons**

(a) –
(b) $0.328, 0.207, 0.158$

78. **Energieverbrauch von Papageien**

(a) –
(b)

$$E'(v) = 0.31 - \frac{379.75}{v^2}$$
$$v_{min} \approx 35km/h$$

(c) Die angeführte Formel kann nur eine grobe Näherung darstellen. Eine exakte Lösung macht deshalb keinen Sinn und eine numerische Lösung ist sehr einfach berechenbar.

79. **Newton lässt grüssen**

(a) $v(t) = \cos(t - \sin t)(1 - \cos t)$
(b) Iterationsvorschrift

$$N(t) = t - \frac{\sin(t - \sin t)}{\cos(t - \sin t)(1 - \cos t)}$$

Graph punktsymmetrisch bezüglich dem Nullpunkt, also ist $N(t) = -t$ die Bedingung für einen lokalen Attraktor, $t \approx 2.225$.

80. **Bewegung eines Punktes**

(a) –
(b) Ableiten liefert

$$\vec{v(t)} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 3\sin 6t \end{pmatrix}$$
$$\left|\vec{v(t)}\right|^2 = 9\sin^2 6t + 1$$

Maximale Geschwindigkeit bei $t = k\frac{\pi}{12}, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

81. **Brechungsgesetz von Snellius**

   (a) Die Zeit des Lichtstrahl vom Punkt P zum Punkt Q berechnet sich gemäss

   $$t(x) = \frac{\sqrt{(1+x)^2+1}}{5} + \frac{\sqrt{(1-x)^2+1}}{2}$$

   Die Funktion $t(x)$ hat im relevanten Bereich ein Minimum bei $x \approx 0.6368$.

   (b) $\sin\alpha_1 \approx 0.8533$
   $\sin\alpha_2 \approx 0.3413$
   $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 \approx 5 : 2$

82. **Interpretation des vt-Diagramms einer Schwingung**
   Überlegung am Graph liefert $f'(4.5) \approx -1$
   Es handelt sich um einen Ausschnitt des Graphen der Funktion

   $$f(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x)$$

   .

83. **Hirschpopulation**

   (a) $t \approx 2, \approx 4500$ Hirsche
   (b) $t \approx 10, \approx 3480$ Hirsche
   (c) $t = 0; t \approx 3.5$ und 8.5
   (d) ≈ 400 Hirsche

84. **Rechteck in Trapez**
   Länge: 3 cm, Breite 3 cm
   Ansatz: $l \cdot b$=max.
   Nebenbedingung: $4 : 2 = b : \frac{6-l}{2}$

85. **Rechteck in rechtwinkligem Dreieck**
   Länge: 6 cm, Breite: 4 cm
   Ansatz: $l \cdot b = \max.$
   Nebenbedingung: $12 : 8 = (12 - l) : b$

86. **Quader in Pyramide**
   Quadratseite: 6.666 cm
   Quaderhöhe: 4 cm
   Als Nebenbedingung kann der Strahlensatz benützt werden
   $q : 10 = (12 - h) : h$ mit Quadratseite q und Quaderhöhe h.

87. **Rechtecke in Parabeln**
   Umfang $U(x) = 4x + 2(-2x^2 + 1)$, maximaler Umfang: Scheitelpunkt der Parabel $U(x)$, $(\,0.5 \mid 0.5\,)$

88. **Zylinder in Kreiskegel**
   Radius: $\frac{4}{3}$cm Höhe: $\frac{10}{3}$cm
   Wird der gesuchte Radius als x bezeichnet und die gesuchte Höhe als y, so muss $V(x, y) = \pi \cdot x^2 \cdot y = max.$ sein. Die Beziehung zwischen x und y lässt sich über einen Strahlensatz oder ähnliche Dreiecke herleiten.

89. **zerlegte Zahl**
   36 + 36 = 72
   Ansatz: $a \cdot b$= max.
   Nebenbedingung: a + b = 72

90. **zerlegt Zahl**
$\sqrt{96} \cdot \sqrt{96} = 96$
Ansatz: a + b = min.
Nebenbedingung: $a \cdot b = 96$

91. **Neuer Bahnhof**
5 km von C entfernt.
Ansatz: E = a + b = min.
Nebenbedingungen:
$a = \sqrt{25 + x^2}$
$b = \sqrt{(12 - x)^2 + 49}$
mit a: Entfernung von A zu Bahnhof; b: Entfernung von B zu Bahnhof

92. **Radiergummi**
Es sollten 5708 Stück produziert werden.
Ansatz: Gewinn = Verkaufserlös - Produktionskosten = max.

93. **Bogenfenster**
167.35 x 167.35 cm
Ansatz: $U = 2r + 2h + \pi \cdot r =$ min. (h: Rechteckhöhe, r: Halbkreisradius)
Nebenbedingung: $A = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2 = 250$

94. **Bogenfenster**
168.03 x 168.03 cm
Ansatz: $A = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2 =$ max. (h: Rechteckhöhe, r: Halbkreisradius)
Nebenbedingung: $U = 2r + 2h + \pi r = 600$

95. **Figuren aus Draht**
Kreisradius: r
Umfangs des Quadrates: $4 - 2\pi r$
Summe der Flächen:
$$\pi r^2 + (1 - 0.5\pi r)^2$$
Minimum bei $r = 2/(4 + \pi)$
Maximum bei $r = 2/\pi$ (nur Kreis)

96. **Optimale Joghurtbecher**
Die Materialkosten berechnen sich unter der Annahme, dass $1cm^2$ Plastik den Preis 1 hat gemäss
$$M(r) = \pi r^2 + 5\pi r^2 + 2\pi rh$$
Mit
$$h = \frac{220}{\pi r^2}$$
ergibt sich
$$M(r) = 6\pi r^2 + \frac{440}{r}$$
und als optimale Masse $r_{min} \approx 2.27cm$ und $h_{min} \approx 13.61cm$.

97. **Maximale Tragfähigkeit eines Balkens**
Mittels Pythagoras kann h^2 durch r und b ausgedrückt werden. Tragfähigkeit $T(x) = -mb^3 + 4mr^2b$.
$b_{max} = \sqrt{\frac{4}{3}}r, h_{max} = \sqrt{\frac{8}{3}}r$

98. **Optimale Beleuchtung**
Mit $\sin\theta = \frac{h}{d}$ folgt
$$I(h) = k\frac{h}{(h^2 + 49)^{1.5}}$$
Maximale Beleuchtung in Höhe ≈ 4.95 m.

99. **Dachrinne**
Die Querschnittsfläche berechnet sich gemäss

$$F(\alpha) = \frac{1}{3}b\sin\alpha \cdot \frac{1}{3}b\cos\alpha + \frac{1}{3}b \cdot \frac{1}{3}b\sin\alpha = \frac{1}{9}b^2\sin\alpha\,(\cos\alpha + 1)$$

Mittels eines numerischen Verfahrens folgt $\alpha \approx 60°$.

100. **Pfadfinder**
$\alpha = 120°$
Funktion für die Durchlassfläche in Abhängigkeit der halben Durchlassbreite (=x) aufstellen. Ableitung dieser Funktion Null setzen liefert x. Symbolische Ableitung benötigt die Kettenregel.

101. **Champagnerglas**
Öffnung: ≈ 9.32 cm
Für die Mantelfläche in Abhängigkeit vom Radius gilt $M(r) = \pi \cdot r \cdot \sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{450}{\pi \cdot r^2}\right)^2\right)} = min.$

102. **Zylindrisches Gefäss**

$$\pi r^2 h = 200 \Rightarrow h = \frac{200}{\pi r^2}$$

Materialverbrauch:

$$M(r) = \frac{400}{r} + 4r^2$$

$M(r)$ hat ein Minimum bei $r = \sqrt[3]{50} \approx 3.68dm$.

103. **Meerwasser-Entsalzungsanlage**
Kostenfunktion:

$$K(x) = 2\sqrt{x^2 + a^2} + b - x$$

Numerische Bestimmung des Minimum für $a = 8, b = 10$ liefert $x_{min} \approx 4.62$.
Für beliebige a und b liefert Ableiten die Funktion

$$K'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - 1$$

$K'(x) = 0$ liefert $x_{min} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

104. **Optimierungsproblem**
Umfang Kreissektor:

$$U(r, \alpha) = 2r + \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha = 10 \rightarrow \alpha = \frac{180(10 - 2r)}{\pi r}$$

Flächeninhalt Kreissektor:

$$F(r) = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \frac{180(10 - 2r)}{\pi r} = -r^2 + 5r, r_{max} = 2.5, \alpha_{max} \approx 114°$$

105. **Optimale Tüten**
Das Volumen eines Kegel berechnet sich gemäss der Formel $V = \frac{1}{3}Fh$, wobei F die Grundfläche, h die Höhe bezeichnet. 10cm ist die Mantellinie des Kegels. Mittels Pythagoras erhält man für das Kegelvolumen

$$v(h) = \frac{1}{3}\pi\left(100 - h^2\right) \cdot h$$

und damit $h_{max} \approx 5.77$ und für das maximale Volumen $V_{max} \approx 403cm^3$.

106. **Quaderförmige Schachtel**
Verhältnis 1:1, d.h. der Quader ist ein Würfel.
Zuerst kann die Höhe h in Abhängigkeit von S berechnet werden, anschliessend die Grundkante a, ebenfalls in Abh"ngigkeit von S. Beide Werte sind identisch.

107. **Zylinder liegt in Halbkugel**
$h \approx 4.62\text{cm}$
$V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h = max.$
Nebenbedingung mit Pythagoras aus Querschnitt: $16 = 4r^2 - \frac{h^2}{4}$

108. **Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden**
Abstand zweier Punkte der beiden Geraden:
$d(\lambda, \mu)^2 = 5\lambda^2 + 5\mu^2 + 8\lambda\mu - 108\lambda - 108\mu + 873$
Minimum für $\lambda = \mu = 6$
$P(\,2 \mid -4 \mid 6\,)$, $Q(\,-3 \mid 6 \mid -4\,)$

109. **Flächen im Raum**

(a) $f(x, y)$ ist maximal, wenn der Nenner minimal ist. $x = y = 0$
(b) –
(c) –