Funktionen (linear, quadratisch)

1. **Definitionsbereich**
   Bestimme den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{2x + 4}$

2. **Umkehrfunktionen**
   Wie lauten die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen?
   (a) $f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{5x}$
   (b) $g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

3. **Umkehrfunktionen**
   (a) Wie lautet die Umkehrfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^2}$?
   (b) Wie lautet die Umkehrfunktion von $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$?
   (c) Gesucht sind zwei verschiedene Funktionen $f(x)$, für die gilt $f(x) = f^{-1}(x)$

4. **Umkehrfunktionen**
   Wie lauten die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen?
   (a) $f(x) = 10\sqrt{x-1} + 1$
   (b) $f(x) = 5 - \sqrt[4]{5 - 2x}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x-4}{4x-1}$

5. **Nullstellen**
   Bestimme symbolisch die Nullstellen der Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x + 1}$

6. **Parabeln**
   Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2 - 4x + 5$. Wie lautet die Gleichung der am Nullpunkt gespiegelten Parabel?

7. **Verschieben einer Parabel**
   Die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2 - 4x + 5$ wird parallel zur x-Achse um 2 nach rechts und parallel zur y-Achse um 3 nach oben verschoben. Wie lautet die Gleichung der neuen Parabel?

8. **Drei Punkte**
   Gegeben sind die 3 Punkte $A(\,2 \mid 1\,)$, $B(\,5 \mid 3\,)$ und $C(\,0 \mid 4\,)$.
   (a) Gesucht sind die beiden Geradengleichungen g(AB) und h(AC).
   (b) Es ist zu beweisen, dass g und h senkrecht aufeinander stehen.

9. **Zwei Geraden**
   Gegeben ist die Gerade g: $y = -2x + 1$ und der Punkt $P(\,-2 \mid 1\,)$.
   (a) Gesucht ist die Gleichung jener Geraden h, welche durch den Punkt P geht und parallel zu g ist.
   (b) Gesucht ist die Gleichung jener Geraden k, welche durch den Punkt P geht und senkrecht zu g steht.

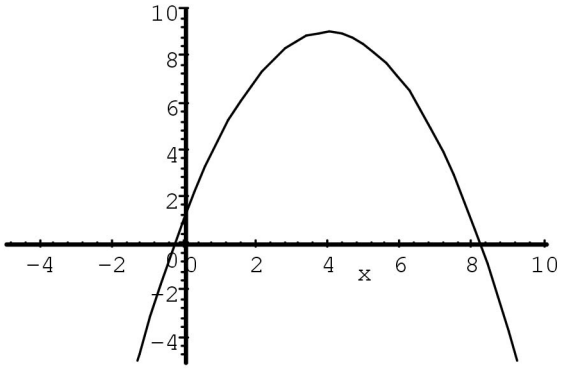
10. **Geradengleichung**
    Wie lautet die Funktionsgleichung einer linearen Funktion durch die Punkte $A(\,-2 \mid -1\,)$ und $B(\,4 \mid 1\,)$?

11. **Handy und SMS**
Ein Mobilfunkanbieter macht folgendes Angebot: Ein Monatsabonnement für ein Handy kostet 10 Euro Grundgebühr. In der Grundgebühr sind pro Monat 20 Gratis-SMS enthalten. Jede weitere SMS kostet 20 Cent. Wir nehmen an, dass Werner ein solches Abo löst und sein Handy nur für SMS benützt.

   (a) Der Verlauf der möglichen Monatskosten soll in einem Koordinatensystem graphisch dargestellt werden.

   (b) Wie lautet die Funktionsgleichung der linearen Funktion, für den Fall, dass Werner mehr als die 20 Gratis-SMS pro Monat versendet.

12. **Gleichung einer Parabel**
Von einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ist der untenstehende Ausschnitt des Graphen gegeben. Wie gross sind ungefähr die Koeffizienten a und b?



13. **Graphen von quadratischen Funktionen**
Es soll zuerst die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2 - x + 1$ skizziert werden.

   (a) Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes?

   (b) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt (1/2)?

   (c) Wie lautet die Gleichung der Parabel
   - nach Spiegelung am Scheitelpunkt?
   - nach Spiegelung an der x-Achse?
   - nach Spiegelung an der y-Achse?

14. **Berechnungen an Parabeln**
Gegeben sind zwei Parabeln mit den Gleichungen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ und $g(x) = 2x^2 - 8x$.

   (a) Es soll gezeigt werden, dass sich die beiden Parabeln in einem bestimmten Punkt berühren. Wie lautet die Gleichung der gemeinsamen Tangente in diesem Punkt?

   (b) Welchen Inhalt hat das von den beiden Parabeln eingeschlossene Flächenstück?

   (c) Dem von den beiden Parabeln eingeschlossenen Flächenstück werden Strecken parallel zur y-Achse einbeschrieben. Welches ist die grösstmögliche Streckenlänge?

15. **Interpretieren von Funktionsgraphen**
Gegeben sind die folgenden fünf Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1$$

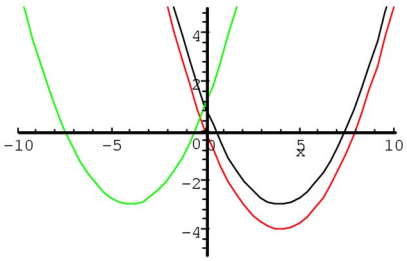
$$f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$$

$$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$$

$$f_4(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1$$

$$f_5/x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$$

und drei der dazugehörigen Graphen.



Welcher Graph gehört zu welcher Funktion? Die Zuordnung soll ohne irgendwelche Rechnungen erfolgen! Begründung?

16. **Scheitelpunkte bestimmen**
Bestimme den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion...
    (a) ...symbolisch: $f(x) = 2x^2 - x + \frac{13}{40}$
    (b) ...symbolisch: $f(x) = -x^2 - 136x - 4756$
    (c) ...numerisch: $f(x) = 10x^2 + 8x + 1.6$
    (d) ...numerisch: $f(x) = 16 - 50x + 25x^2$

17. **Quadratische Funktion gesucht**
Bestimme die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion, deren Scheitel die x-Koordinate 5 und die y-Koordinate 0 hat und deren Graph durch den Punkt $P(\,30 \mid 125\,)$ geht.

18. **Schnitt von Parabeln**
    (a) Gegeben sind die Parabeln mit den Gleichungen $P_1 : y = -x^2 + 4$ und $P_2 : y = 2x^2 - 6x + 3$.
        i. In welchen Punkten schneiden sich die beiden Parabeln?
        ii. Um wieviel muss die Parabel P_2 nach oben verschoben werden, dass sich die beiden Parabeln gerade berühren?
    (b) Wie lauten die Koordinaten der Schnittpunkte von $y = x^4$ und $y = -x^2 + 6$?

19. **Tangenten an Parabeln**
Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$. Wie lauten die Gleichungen der Tangente t_1 an die Parabel im Punkt $(0/-3)$ und der zu t_1 senkrecht stehenden Tangente t_2 an die Parabel?

20. **Brennpunkt und Leitgerade von Parabeln**
    (a) Wie lautet die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt (0/0) und dem Brennpunkt (0/1)?
    (b) Wie lauten die Koordinaten des Brennpunktes und die Gleichung der Leitgeraden der Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2$?

21. **Berechnung von Tangenten**
Wie lautet die Gleichung der Tangente durch den Punkt $(-3/0)$ an die Kurve $y = \sqrt{x}$.

22. **Interpolation von quadratischen Funktionen**
Welche Parabel $y = ax^2 + bx + c$ hat als Scheitelpunkt $(-1/2)$ und geht durch $(3/18)$?

23. **Approximation durch Parabel**
Die Kurve eines durchhängenden Seiles wird in sehr guter Näherung durch eine quadratische Funktion beschrieben. Ein Seil ist in den Punkten $P(0/4)$ und $Q(8/8)$ aufgehängt. Der tiefste Punkt des Seils liegt 3 Meter über dem Boden. Durch welche Gleichung wird die Seilkurve beschrieben?

24. **Punkt auf Parabel?**
Der Graph einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$ geht durch die Punkte $(-3/-14)$, $(3/10)$ und $(6/31)$. Liegt der Punkt $(90/3055)$ auf der Parabel?

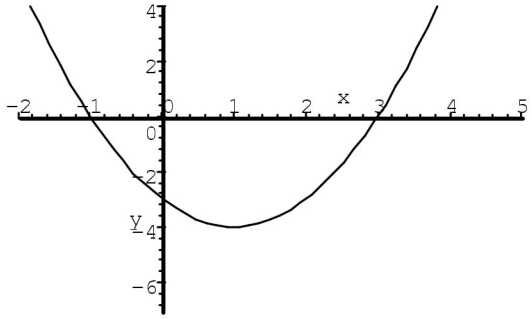
25. **Abstandsproblem**
Welcher Punkt auf der Parabel $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$ hat den kleinsten Abstand von der Geraden $y = x$?

26. **Versorgung eines Satelliten**
Im lokalen, ebenen Koordinatensystem der NASA bewegt sich ein Nachrichtensatellit auf einer parabelförmigen Bahn mit der Gleichung $y = x^2$. Ein Versorgungssatellit befindet sich im Punkt $(4/0)$ und soll nach der Nachschuboperation zum Punkt $(10/12)$ gelangen. In welchem Punkt der Satellitenbahn soll der Versorgungssatellit den Nachrichtensatellit treffen, damit die Flugbahn des Versorgungssatellites möglichst kurz ist?

27. **Gleichungen zu Bildern**
Untenstehend ist das "Bild" (Parabel) einer quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

abgebildet.



Die Parabel schneidet die x-Achse bei $x = -1$ und $x = 3$.
Welche Werte haben p und q? Wie lauten die exakten Koordinaten (x, y) des tiefsten Punktes der Parabel?

Lösung zu: Funktionen (linear, quadratisch)

1. **Definitionsbereich**
   $D = \{x/x \in I\!R \; und \; -4 \leq x \leq 4 \; und \; x \neq -2\}$

2. **Umkehrfunktionen**

   (a) $f^{-1}(x) = \frac{26}{5x}$

   (b) $g^{-1}(x) = \sqrt{x^3} + 1$

3. **Umkehrfunktionen**

   (a) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{6}{x}}$

   (b) $f^{-1}(x) = x^{-\frac{2}{3}} + 1$

   (c) Zum Beispiel: $y = x$ und $y = -x$.
   Es gibt unendlich viele Lösungen, die alle die Eigenschaft haben, dass sie symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden ($y = x$) sind.

4. **Umkehrfunktionen**

   (a) $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{10}\right)^2 + 1$

   (b) $f^{-1}(x) = \frac{5-(5-x)^4}{2}$

   (c) $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{4x-1}$

5. **Nullstellen**
   $x_1 = -3 \quad x_2 = 1$

6. **Parabeln**
   Aus der Scheitelpunktgleichung der Parabel $y = 2(x-1)^2 + 3$ folgt für die gespiegelte Parabel $y = -2(x+1)^2 - 3$.

7. **Verschieben einer Parabel**
   Scheitelpunktsform der Ausgangsparabel: $y = 2(x-1)^2 + 3$
   Scheitelpunktsform der verschobenen Parabel: $y = 2(x-3)^2 + 6 = 2x^2 - 12x + 24$

8. **Drei Punkte**

   (a) g: y = $\frac{2}{3}$x - $\frac{1}{3}$; h: y = $-\frac{3}{2}$x + 4

   (b) Es gilt: $a_g = -\frac{1}{a_h}$

9. **Zwei Geraden**

   (a) h: y = -2x - 3
   Die gesuchte Steigung von h entspricht der Steigung der gegebenen Geraden g.

   (b) k: y = 0.5x +2
   Die gesuchte Steigung von k entspricht der negativen reziproken Steigung der gegebenen Geraden g-

10. **Geradengleichung**
$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

11. **Handy und SMS**

    (a) Bis 20 SMS waagrecht bei 10 Euro, anschliessend linear steigend, 2 Euro pro 10 SMS.

    (b) $y = 0.2x + 6$

12. **Gleichung einer Parabel**
Ablesen der Koordinaten des Scheitelpunktes liefert die Scheitelpunktsgleichung

$$y = a(x-4)^2 + 9$$

Einsetzen der Koordinaten eines Punktes der Parabel liefert

$$y \approx -0.5x^2 + 4x + 1$$

13. **Graphen von quadratischen Funktionen**
Scheitelpunktsgleichung:

$$y = 2(x-0.25)^2 + 0.875$$

    (a) $(\,0.25 \mid 0.875\,)$

    (b) $y = 3x - 1$

    (c)
    - $-2x^2 + x + 0.75$
    - $-2x^2 + x - 1$
    - $2x^2 + x + 1$

14. **Berechnungen an Parabeln**

    (a) Die beiden Parabeln haben die gemeinsamen Punkte $(\,0 \mid 0\,)$ und $(\,4 \mid 0\,)$. Für $x = 4$ haben die beiden Kurven die gleiche Steigung und berühren sich deshalb im Punkt $(\,4 \mid 0\,)$.

    (b) $21\frac{1}{3}$

    (c) Berechnung des Maximums der Funktion $d(x) = f(x) - g(x)$ im Bereich $[0, 4]$ liefert $x = 4/3$ und als Streckenlänge ≈ 9.5.

15. **Interpretieren von Funktionsgraphen**
Von links nach rechts handelt es sich um die Graphen der Funktionen f_2, f_5 und f_1.

16. **Scheitelpunkte bestimmen**

    (a) $S(\,\frac{1}{4} \mid \frac{1}{5}\,)$

    (b) $S(\,-68 \mid -132\,)$

    (c) $S(\,-0,4 \mid 0\,)$

    (d) $S(\,1 \mid -9\,)$

17. **Quadratische Funktion gesucht**
$y = \frac{1}{5}(x-5)^2$
Als Ansatz wird idealerweise die Scheitelpunktform gewählt.

18. **Schnitt von Parabeln**

    (a) i. $3x^2 - 6x - 1 = 0 \rightarrow x_1 \approx 2.155, x_2 \approx -0.155$

ii. $-x^2+4 = 2x^2-6x+c$ soll genau eine Lösung haben. Diskriminante liefert $c = 7$. Die Parabel muss um 4 nach oben verschoben werden.

(b) $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}, y_{1,2} = 4$

19. **Tangenten an Parabeln**
$t_1 : y = -x - 3$
t_2 hat Steigung 1, also folgt der Ansatz $t_2 : y = x + b$. t_2 geschnitten mit der Parabel soll nur einen Schnittpunkt ergeben. $t_2 : y = x - 7$

20. **Brennpunkt und Leitgerade von Parabeln**

    (a) Brennpunktgleichung: $y = 0.25x^2$

    (b) Brennpunkt $(\,0 \mid -0.5\,)$, Leitgerade $y = 0.5$

21. **Berechnung von Tangenten**

$$t : y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

22. **Interpolation von quadratischen Funktionen**
Scheitelpunktsgleichung liefert $y = x^2 + 2x + 3$

23. **Approximation durch Parabel**
Scheitelpunkt liefert den Ansatz $y = a(x-h)^2 + 3$. Die beiden Punkte liefern ein Gleichungssystem für a und h; $y \approx 0.1636x^2 - 0.8090x + 4$

24. **Punkt auf Parabel?**
Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems liefert die Parabelgleichung

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 4x - 5$$

Der Punkt liegt auf der Parabel.

25. **Abstandsproblem**
Geometrische Lösung: Gerade $y = x$ parallel an Parabel verschieben.
Ansatz $t : y = x + b$, genau ein Schnittpunkt mit der Parabel; $y = x + 1.25$, $(\,1.5 \mid 2.75\,)$

26. **Versorgung eines Satelliten**
Die Länge des zurückzulegenden Weges des Versorgungssatelliten berechnet sich gemäss

$$d(x) = \sqrt{(4-x)^2 + x^4} + \sqrt{(10-x)^2 + (12-x^2)^2}$$

. Eine graphische Darstellung und Anwendung eines numerischen Verfahrens liefert für den optimalen Wert $x_{min} \approx 2.17$.

27. **Gleichungen zu Bildern**
$x2 - 2x - 3 = 0$, Scheitelpunkt $(\,1 \mid -4\,)$