

Funktionen (trigonometrisch)

1. Einfache trigonometrische Beziehungen

- (a) Ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ hat die Katheten $a = 12$ und $b = 5$. Welche exakten Werte haben $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \sin \beta, \cos \beta, \tan \beta$?
- (b) Gegeben ist $\cos \alpha = 1/3$. Wie können ausgehend von diesem Wert so exakt wie möglich $\sin \alpha, \tan \alpha, \sin(90^\circ - \alpha), \tan(90^\circ - \alpha)$ berechnet werden?

2. Einfache trigonometrische Beziehungen

Die untenstehenden Ausdrücke sind soweit als möglich zu vereinfachen:

- (a) $\frac{1}{2} \left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \right) \cdot \sin 2\alpha$
- (b) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \tan^2(90^\circ - \alpha)$

3. Trigonometrische Beziehung - und ein Integral

Beweise, dass $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$ ist und berechne damit das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx$$

4. Billardkugeln

Zwei Billardkugeln A und B haben von einer Bande 60 cm bzw. 15 cm Abstand. Ihre gegenseitige Entfernung beträgt 130 cm. Unter welchem Winkel muss die Kugel A gegen die Bande gestossen werden, damit sie nach einmaliger Reflexion die Kugel B genau in der Mitte trifft?

5. Viadukt

Gegeben sind die Orte A, B und C. A und B liegen an den Seitenhängen eines Tals. Der Ort C liegt in der Talsohle. Von A nach B führt ein (gerader) Viadukt übers Tal. Auf einer Karte kann man erkennen, dass der Ort A 61m und der Ort B 93m höher liegen als der Ort C. Auf der Karte misst der Winkel $ACB = 95.1708^\circ$.

Von C aus erkennt man die Orte A resp. B unter den Höhenwinkeln $\alpha = 9.84^\circ$ und $\beta = 11.2114^\circ$. Welche Steigung (in Prozent) hat der Viadukt von A nach B?

6. Schiefer Turm von Pisa

Der schiefe Turm von Pisa hat eine Höhe von 54m (..dem Turm entlang gemessen!). Seine Neigung beträgt 4.43° .

Ein Beobachter sieht die Spitze des sich direkt auf ihn zu neigenden Turms unter einem Höhenwinkel von 13.7° . Wie weit steht der Beobachter vom Turm entfernt?

(Die Körpergrösse muss nicht berücksichtigt werden, d.h. es kann davon ausgegangen werden, dass sich die Augen des Beobachters auf Bodenniveau befinden.)

7. Olympiastadion Montreal

Im Jahre 1976 fanden in Montréal (Canada) die Olympischen Sommerspiele statt. Die Schweiz gewann damals 4 Medallien, darunter eine goldene von Christine Stückelberger im Dressurreiten. Das Markenzeichen des damaligen Olympiastadions war/ist ein schiefer Aussichtsturm mit einer Neigung von 45° . Auf dem Turm befindet sich in einer Höhe von 166m über dem Boden (senkrecht) eine Aussichtsplattform. Ein Tourist beobachtet von der Aussichtsplattform aus einen Fussballspieler, den er im Verlängerung der Turmachse unter einem Tiefenwinkel von 72° sieht. Wie weit ist der Fussballspieler vom Tourist entfernt (Luftlinie)?

8. Zifferblatt

Bei einer Uhr hat der Minutenzeiger, vom Zentrum des Zifferblattes bis zur Zeigerspitze gemessen, eine Länge von 40 cm. Die entsprechende Länge des Stundenzeigers beträgt 25 cm. Berechne die Entfernung zwischen den Zeigerspitzen um 20.27 Uhr.

9. **Aussicht vom Turm**

Auf einem 46.33m hohen Aussichtsturm steht eine Person und blickt auf den vorbeifliessenden Fluss hinunter. Sie sieht das entfernte Ufer unter einem Tiefenwinkel von 14° . Das näher liegende Ufer unter einem Tiefenwinkel von 38° . Wie breit ist der Fluss und wie weit vom Turm entfernt fliesst er vorbei?

10. **Untere Grenze der Wolkenschicht**

Zur Bestimmung der Höhe der unteren Grenze einer Wolkenschicht über einem Flugplatz wird die Wolke durch einen Scheinwerfer vertikal angestrahlt. Vom 1.5 km entfernten Ende des horizontalen Rollfeldes sieht man den Lichtfleck auf der Wolke unter einem Höhenwinkel von 63° . Wie hoch über dem Boden befindet sich das untere Ende der Wolkenschicht?

11. **Von Bad Ragaz nach Neuenburg**

Der 47° -Breitenkreis geht durch Neuenburg und Bad Ragaz. Berechne den Abstand der beiden Ortschaften (auf der Erdoberfläche), wenn Neuenburg auf 6.95° östlicher Länge und Bad Ragaz auf 9.5° östlicher Länge liegt. Der Erdradius beträgt 6370 km.

12. **Steigungsprozent**

Auf einer Verkehrstafel steht, dass eine Strasse innerhalb der nächsten 2400 m um 7% fällt. Welche horizontale und welche vertikale Distanz wird dabei zurückgelegt? Wie gross ist der Böschungswinkel?

13. **Überflug**

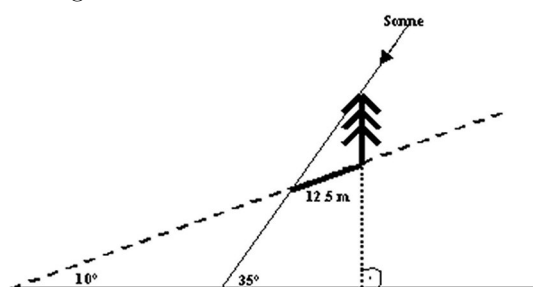
Ein Flugzeug überfliegt die Städte A und B entlang ihrer 40 km langen Verbindungsstrasse. Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird das Flugzeug von A aus unter einem Höhenwinkel von 22.7° beobachtet. Gleichzeitig sieht man es von B aus unter einem Höhenwinkel von 48.5° . Wie hoch fliegt das Flugzeug?

14. **Tunnelbau**

Durch einen Berg soll ein Tunnel gebaut werden. Beide Tunneleinfahrten A und B liegen auf gleicher Höhe über Meer. Die gradlinige Verbindung von A nach B ist 14.25 km lang. Mit dem Bau wird von beiden Enden aus mit gleichem Tempo begonnen. Von A aus steigt der Tunnel gegenüber der Verbindung AB um 3.8° . Von B aus um 6.8° . Wie lang ist der Tunnel?

15. **Baum an Böschung**

Ein Baum steht an einer Böschung (Böschungswinkel 10°). In dem Moment, wo der Schatten des Baumes genau in die Falllinie fällt, wird die Länge des Schattens mit 12.5 m gemessen. Die Sonnenhöhe beträgt 35° . Welche Höhe hat der Baum?



16. **Sportanlage**

Zwischen drei Ortschaften A, B und C soll eine Sportanlage gebaut werden. Die Lage des zugehörigen Parkplatzes soll so sein, dass von allen Städten aus eine gleichlange, geradlinige Strasse zum Parkplatz führen soll. Die Ortschaften haben folgende Abstände: $\overline{AB} = 11.5 \text{ km}$, $\overline{AC} = 12.4 \text{ km}$ und $\overline{BC} = 9.9 \text{ km}$.

Wie weit ist der Parkplatz von jedem der 3 Ortschaften entfernt?

(Tipp: Für den Umkreisradius r eines Dreiecks gilt die Beziehung $r = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha}$)

17. **Überlagerung harmonischer Schwingungen**

Man kann leicht zeigen, dass die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz wieder eine harmonische Schwingung ergibt. Die Funktion $f(x) = 2 \sin x + 5 \cos x$ kann deshalb als Schwingung $f(x) = a \sin(bx + c)$ geschrieben werden. Welche Werte haben die Parameter a , b und c ?

18. **Trans-Alaska Pipeline**

Beim Bau der Trans-Alaska Pipeline musste die Pipeline isoliert werden, damit die Wärmeabstrahlung der Pipeline nicht den permanent gefrorenen Boden auftaute. Im Hinblick auf eine effiziente Verwendung des Isoliermaterials mussten die Temperaturschwankungen im Verlaufe eines Jahres berücksichtigt werden. Dazu wurde die Funktion $T(t)$ bestimmt, welche die mittlere Lufttemperatur T in Grad Celsius an einem beliebigen Tag t , $1 \leq t \leq 365$, des Jahres angibt. Als Grundlagen dienten die folgenden Angaben:

- Die Temperaturschwankungen über ein Jahr hinweg verhalten sich ziemlich exakt sinusförmig.
- Die höchste mittlere Temperatur beträgt 16° und wird im langjährigen Mittel am 3. Juli erreicht.
- Die tiefste mittlere Temperatur beträgt -26° .

Wie lautet die Gleichung der Funktion $T(t)$ und an welchen Tagen beträgt die mittlere Temperatur gerade 0° ?

19. **Zusammensetzen von Funktionen**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 - \cos x}$$

Der grobe Verlauf des Graphen $y = f(x)$ kann aufgrund elementarer Überlegungen ohne Benutzung eines Rechners bestimmt werden. Welche Überlegungen spielen eine Rolle und wie sieht ein aussagekräftiger Ausschnitt des Graphen aus?

20. **Verflixte Gleichung**

Gegeben ist die Gleichung

$$x^{63} + \cos 63x = 63e^x \quad (x \text{ im Bogenmass})$$

Wie lauten die Lösungen dieser Gleichung?

21. **Anzahl Lösungen**

Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$0.001 \sin(384x - 1.3) = x^2$$

Lösung zu: Funktionen (trigonometrisch)

1. Einfache trigonometrische Beziehungen

(a) $\sin \alpha = 12/13, \cos \alpha = 5/13, \tan \alpha = 12/5, \sin \beta = 5/13, \cos \beta = 12/13, \tan \beta = 5/12$

(b) $\sin \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{2}, \tan \alpha = 2\sqrt{2}, \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}, \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. Einfache trigonometrische Beziehungen

(a) Ersetzen aller Ausdrücke durch $\sin \alpha$ bzw. $\cos \beta$ liefert den Wert 1.

(b) Mit

$$\tan^2(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan^2 \alpha}$$

und $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ folgt der Wert 1.

3. Trigonometrische Beziehung - und ein Integral

$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$ mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \sin 2x dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$

4. Billiardkugeln

$\alpha \approx 31.589^\circ$

Das Reflexionsgesetz (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) ist zu berücksichtigen.

5. Viadukt

5.24% Steigung.

Mit den gegebenen Höhenwinkeln lassen sich die Horizontalentfernungen von A und B berechnen. Anschliessend in der Horizontalebene den Cossiussatz verwenden.

6. Schiefer Turm von Pisa

225.03 Meter

Sinussatz verwenden.

7. Olympiastadion Montreal

174.54 Meter

Der Tiefenwinkel wird von der Horizontalen nach unten gemessen.

8. Zifferblatt

47.72 cm

Die beiden Zeiger schliessen einen Winkel von 91.5 Grad ein. Anschliessend Abstand mit Coninussatz berechnen.

9. Aussicht vom Turm

Entfernung: 59.3 m

Flussbreite: 126.52 m

10. Untere Grenze der Wolkenschicht

Höhe: 2943.92m

11. Von Bad Ragaz nach Neuenburg

193.34 km

Zuerst muss der Radius des 47. Breitengrades berechnet werden.

12. Steigungsprozent

Horizontaldistanz: 2394.14m

Vertikaldistanz: 167.59m

Böschungswinkel: 4.0014°

13. **Überflug**

$h = 12.21 \text{ km}$

Zuerst Sinussatz anwenden, dann die Sinusbeziehung im rechtwinkligen Dreieck.

14. **Tunnelbau**

14.306 Km

Zwei mal den Sinussatz anwenden und die Resultate addieren.

15. **Baum an Böschung**

$h = 6.45 \text{ m}$

Zuerst einzelne Winkel in der Skizze ergänzen, anschliessend mit dem Sinussatz die gewünschte Höhe berechnen.

16. **Sportanlage**

$r = 6.5826 \text{ km}$

Mit dem Cosinussatz den Winkel α berechnen. Der Umkreisradius im Dreieck ist die gesuchte Entfernung.

17. **Überlagerung harmonischer Schwingungen**

$$f(x) = 5.4 \sin(x + 1.2)$$

18. **Trans-Alaska Pipeline**

Die Periode der Schwingung $T(t)$ beträgt $2\pi/365$. Aus der tiefsten und höchsten Temperatur folgt die Amplitude 21. Aus dem Ansatz

$$T(t) = 21 \sin\left(\frac{2\pi}{365}t + c\right) - 5$$

folgt mit den Temperaturwerten des 3. Juli

$$T(t) \approx 21 \sin\left(\frac{2\pi}{365}t + 1.596\right) - 5$$

Die mittlere Temperatur beträgt nach 107 und 261 Tagen gerade 0° .

19. **Zusammensetzen von Funktionen**

Die Funktion $f(x)$ hat Nullstellen bei

$$x = \pi/2 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

und Polstellen bei

$$x = k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

Mit diesen Angaben lässt sich der Graph der Funktion einfach skizzieren.

20. **Verflixte Gleichung**

Skizziert man die Kurven $y = x^{63} + \cos 63x$ und $y = 63e^x$ im gleichen Koordinatensystem, stellt man fest, dass der Term $\cos 63x$ für die Lösungen keine Rolle spielt.

Ein erster Schnittpunkt in der Nähe von $x = 1$ lässt sich numerisch einfach berechnen und liegt bei $x \approx 1.0865$.

Leicht übersehen wird, dass die Exponentialfunktion langfristig schneller wächst als die Potenzfunktion. Es gibt deshalb noch einen zweiten Schnittpunkt bei $x \approx 368.079$.

Hinweis:

Damit die auftretenden Zahlen nicht zu gross werden, lohnt es sich allenfalls zu einer logarithmischen Skala über zu gehen und die Gleichung

$$63 \ln x = \ln 63 + x$$

zu betrachten

21. **Anzahl Lösungen**

Eine grobe Skizze der Kurven $y = 0.001 \sin(384x - 1.3)$ und $y = x^2$ im Bereich $-0.1 < x < 0.1$ und $-0.001 < y < 0.001$ zeigt, dass es 8 Lösungen gibt.