

## 2 Kreise, Bewegung, Harmonie

Gleichförmige Kreisbewegungen sind besonders einfache periodische Vorgänge. In diesem Kapitel wird ein Zusammenhang zwischen harmonischen Schwingungen und gleichförmigen Kreisbewegungen hergestellt. Zeigerdiagramme und komplexe Schreibweise der harmonischen Schwingung sind zwei nützliche und anschauliche Darstellungen, die am besten mit gleichförmigen Kreisbewegungen in Zusammenhang gebracht werden. Diese Darstellungsformen machen einsichtig, was bei der Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen geschieht.

### Voraussetzungen und Ziele

In diesem Kapitel sind Voraussetzungen und Ziele verknüpft. Es wird angenommen, dass Trigonometrie, Elemente der Vektorgeometrie, die trigonometrischen Funktionen in der Analysis, Einführung der komplexen Zahlen, Parameterdarstellungen von Kurven im Unterricht behandelt wurden. Diese verschiedenen Themen werden aber üblicherweise im Unterricht unabhängig voneinander erarbeitet. Im Hinblick auf Anwendungen sollen die Vorkenntnisse nun vernetzt werden. Manches wird neu zusammengestellt und allenfalls ergänzt werden. Inhaltliche Wiederholung unter verschiedenen formalen Gesichtspunkten ist beabsichtigt.

Es wird gezeigt, wie die gleichförmige Kreisbewegung und harmonische Schwingungen zusammenhängen. Zur Beschreibung von harmonischen Schwingungen werden vier verschiedene Darstellungen eingeführt. In jeder Darstellungsart wird die Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz behandelt. Die Verwendung komplexwertiger Funktionen führt zur komplexen Darstellung von Schwingungen. Ihr Hauptvorteil ist die Einfachheit. Diese Darstellung wird sich im Kapitel 3 als besonders geeignet erweisen.

## 2.1 Gleichförmige Kreisbewegungen

Menschen, die in den Kreisläufen der Natur eingebettet sind, erleben periodische Vorgänge als etwas Natürliches. In der antiken Tradition galt allein die gleichförmige Kreisbewegung als «natürliche» Bewegung. Sie ist der elementare Prototyp einer periodischen Bewegung und sie lässt sich benutzen, um viel komplexere Bewegungen aufzubauen – davon wird das nächste Kapitel handeln. Hier werden gleichförmige Kreisbewegungen und harmonische Schwingungen mathematisch beschrieben.

Wir betrachten (Abbildung 2.1) eine Ebene mit einem Polarkoordinatensystem und einem kartesischen Koordinatensystem, die in der üblichen Art kombiniert sind. Eine gleichförmige Bewegung eines Punktes auf dem Kreis mit Zentrum  $(0|0)$  und Radius  $r$  lässt sich bequem in Polarkoordinaten beschreiben.

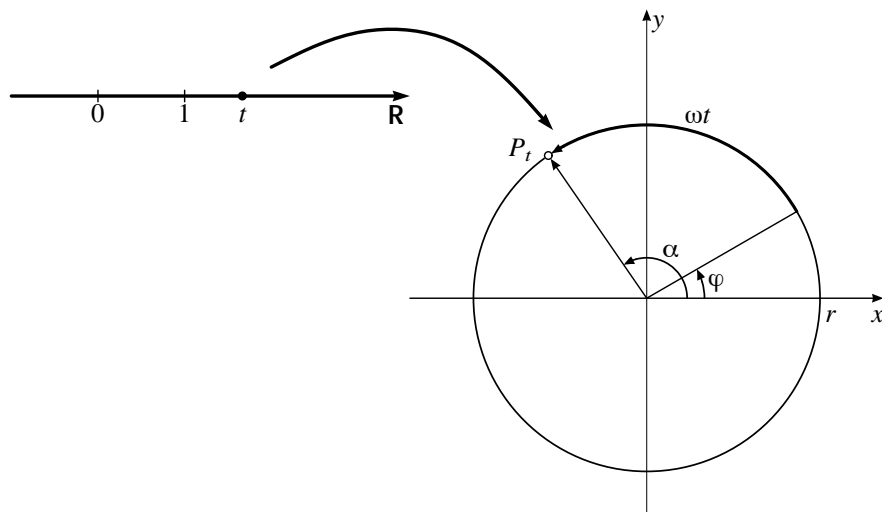


Abbildung 2.1: «Gleichförmige» Kreisbewegung

Der Polarwinkel  $\alpha$  des Punktes verändert sich gleichförmig mit der Zeit  $t$ , also ist  $\alpha = \omega t + \varphi$ . Die Konstante  $\omega$  bedeutet die *Winkelgeschwindigkeit* der Kreisbewegung. Der *Phasenwinkel*  $\varphi$  beschreibt den Polarwinkel zur Zeit 0. Weil sich die Lage des Punktes mit der Zeit  $t$  verändert, soll  $P_t$  die Position von  $P$  zur Zeit  $t$  bezeichnen. Für die kartesischen Koordinaten des Punktes  $P_t$  ergibt sich  $P_t(r \cos(\omega t + \varphi) | r \sin(\omega t + \varphi))$ . Jede gleichförmige

Kreisbewegung mit Zentrum  $O$  lässt sich also durch die folgende Parameterdarstellung beschreiben:

$$\begin{aligned} \vec{x}: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto r \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei stellt man sich den Definitionsbereich  $\mathbf{R}$  als *Zeitachse* vor. Die *Positionsfunktion*  $\vec{x}: t \mapsto \vec{x}(t)$  ordnet jedem Zeitpunkt  $t$  den Ortsvektor  $\vec{x}(t)$  zum bewegten Punkt  $P_t$  zu. Es wird günstig sein, eine Notation zu verwenden, in der alle Größen, die diese Bewegung beeinflussen, explizit auftreten.

Besonders einfach wird die gleichförmige Bewegung auf dem Einheitskreis beschrieben, wenn sie mit dem Polarwinkel  $t$  im Bogenmaß parametrisiert ist. Dann gilt

$$\vec{x}_0: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Allgemein zeigt der entsprechende Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}_0(t)$  stets in die Richtung der Bahntangente. Bei einer Bewegung auf dem Einheitskreis steht also  $\vec{v}_0(t)$  auf dem Ortsvektor  $\vec{x}_0(t)$  senkrecht. Daher ist  $\vec{v}_0(t)$  parallel zu  $\pm \vec{x}_0(t + \frac{\pi}{2})$ . Immer, wenn der Kurvenparameter  $t$  gleich der Bogenlänge ist, bewegt sich der zugehörige Punkt mit Einheitsgeschwindigkeit. Aus der Bewegungsrichtung zur Zeit 0 folgt schließlich

$$\vec{v}_0(t) = \vec{x}_0(t + \frac{\pi}{2})$$

Diese Beschreibung des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}_0$  als Funktion der Zeit hat formal ebenfalls die Gestalt einer Kreisbewegung mit Einheitsgeschwindigkeit auf einem Einheitskreis, die allerdings nicht im Ortsraum, sondern im Geschwindigkeitsraum abläuft. Folglich entsteht der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}_0$  aus dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}_0$  ebenfalls durch Drehen um  $\pi/2$ .

$$\vec{a}_0(t) = \vec{v}_0(t + \frac{\pi}{2}) = \vec{x}_0(t + \pi)$$

Zum gleichen Schluss führt formales Differenzieren der Positionsfunktion nach der Zeit.

Jede gleichförmige Kreisbewegung lässt sich mit Hilfe von  $\vec{x}_0: t \mapsto \vec{x}_0(t)$  darstellen:

$$\vec{x}: t \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} = r \cdot \vec{x}_0(\omega t + \varphi)$$

Für die zugehörige Geschwindigkeits- und die Beschleunigungsfunktion ergibt sich durch Ableiten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{x} &= \vec{v}: t \mapsto \omega r \cdot \vec{x}_0(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad \text{und} \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} &= \vec{a}: t \mapsto \omega^2 r \cdot \vec{x}_0(\omega t + \varphi + \pi).\end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$  geht nun aus dem Ortsvektor  $\vec{x}(t)$  durch eine Drehung um  $90^\circ$  im positiven Drehsinn (Phasensprung um  $\pi/2$ ) sowie durch Streckung um den Faktor  $\omega$  hervor. Wenn ein Punkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Ursprung kreist, so bedeutet *Ableiten* der Positionsfunktion dasselbe wie *Drehen um  $\pi/2$  und Strecken mit  $\omega$* .

$$\vec{x}'(t) = \omega r \cdot \vec{x}_0(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung tritt also eine Beschleunigung auf, die stets dem Vektor  $\vec{x}$  entgegengesetzt und zu seiner Länge proportional ist.

$$\vec{x}'' = -\omega^2 \vec{x}$$

In der Sprache der Physik ausgedrückt: Die Zentripetalkraft hält den Körper auf seiner Bahn und ihre Stärke ist dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit und dem Kreisradius  $r = \|\vec{x}\|$  proportional.

## 2.2 Harmonische Schwingungen

Ein physikalisches System im stabilen Gleichgewicht gibt sich dem Beobachter selten zu erkennen, da es keine Energie abzugeben vermag. Viele physikalische Experimente stören ein stabiles Gleichgewicht, worauf sich irgendwelche Schwingungen ergeben, die als Antwort auf das Experiment interpretiert werden müssen. Die einfachsten Schwingungsformen sind harmonische Schwingungen. Sie sind gute Modelle dafür, wie sich ein (konservatives) System in einem stabilen Gleichgewichtszustand zu erkennen gibt, nachdem es «schwach gestört» wurde.

Jede harmonische Schwingung auf der  $x$ -Achse lässt sich beschreiben durch eine Funktion der Art  $x: t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$  mit  $A > 0$ .

Die maximale Auslenkung ist  $A$ , die *Amplitude* der Schwingung. Der Faktor  $\omega$  ist proportional zur Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit. Für  $\omega = 2\pi$  beträgt die *Periodendauer*  $\tau$  gerade eine Zeiteinheit. Die Größe  $\omega$  heißt deshalb auch *Kreisfrequenz*. Mit dem *Phasenwinkel*  $\varphi$  wird die Anfangslage der Schwingung zur Zeit 0 eingestellt.

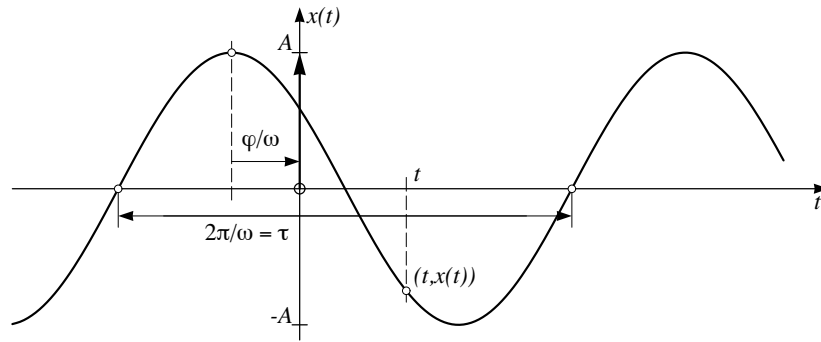


Abbildung 2.2: Graf der harmonischen Schwingung

Jede harmonische Schwingung  $x: t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$  erfüllt die Beziehung

$$x'' = -\omega^2 x.$$

Sie heißt Differentialgleichung der harmonischen Schwingung und sagt aus, dass die Beschleunigung  $x''$  (und damit die herrschende Kraft) proportional und umgekehrt gerichtet zur Auslenkung  $x$  aus der Gleichgewichtslage wirkt.

Eine verwandte Gleichung ist uns schon in 2.1 begegnet, allerdings in vektorieller Form. Der enge Zusammenhang (Abbildung 2.3) lässt sich so erklären: Wird eine gleichförmige Kreisbewegung durch die Projektion  $\pi_1$  auf die  $x$ -Achse abgebildet, so ergibt sich als Bild eine harmonische Schwingung.

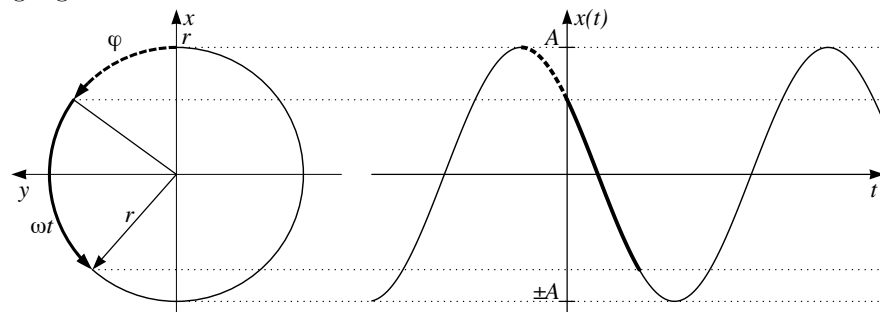


Abbildung 2.3: Harmonische Schwingung und zugehörige Kreisbewegung

$$\vec{x}: t \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi_1} r \cos(\omega t + \varphi)$$

Der Radius  $r$  des Kreises entspricht dabei der Amplitude  $A$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Kreisfrequenz der Schwingung.

## 2.3 Verschiedene Darstellungsarten für harmonische Schwingungen

Gleichförmige Kreisbewegungen sind begrifflich einfacher als die harmonischen Schwingungen, die den Aspekt der Gleichförmigkeit nicht sofort erkennen lassen. Dennoch besteht zwischen beiden ein so enger Zusammenhang, dass jede harmonische Schwingung auf eine Kreisbewegung zurückgeführt werden kann. Zeigerdiagramm und komplexe Darstellung einer harmonischen Schwingung wurden genau zu diesem Zwecke erfunden.

Die Polardarstellung und die rechtwinklige Darstellung einer harmonischen Schwingung lassen sich mit trigonometrischen Umformungen in einander überführen. Obwohl beide Darstellungen nur skalarwertige Funktionen betreffen, ist die Kodierung der Schwingung durch einen Punkt eines zweidimensionalen Raumes nützlich.

### Polardarstellung und rechtwinklige Darstellung

Die Darstellung  $x: t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$  einer harmonischen Schwingung lässt sich durch algebraische Umformung mit dem Additionstheorem des Kosinus in eine andere, aber gleichwertige Form überführen:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ &= A \cos(\varphi) \cos(\omega t) - A \sin(\varphi) \sin(\omega t) \\ &= a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t),\end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung  $a = A \cos(\varphi)$  und  $b = A \sin(\varphi)$  gesetzt werden. Dabei gilt  $a^2 + b^2 = A^2$  und das Koordinatenpaar  $(a|b) = (A \cos(\varphi)|A \sin(\varphi))$  beschreibt einen Punkt  $P_0$  mit Polardarstellung  $(A \angle \varphi)$  (Abbildung 2.4).

Bei gegebener Kreisfrequenz  $\omega$  bestimmt der Punkt  $P_0$  die harmonische Schwingung eindeutig. So entspricht beispielsweise  $P_0(0|-1)$  der Schwingung  $x: t \mapsto \sin(\omega t)$ . Die zugehörige Polardarstellung  $P_0(1 \angle -\pi/2)$  beschreibt dieselbe Schwingung in der Form  $x: t \mapsto \cos(\omega t - \pi/2)$ . Da sich die Umrechnung zwischen den beiden gleichwertigen Darstellungsarten vorwärts und rückwärts durchführen lässt, gilt:

1. Jede harmonische Schwingung lässt sich additiv zerlegen in eine Sinusschwingung und eine Kosinusschwingung mit je derselben Frequenz  $\omega$  und demselben Phasenwinkel  $\varphi = 0$ .

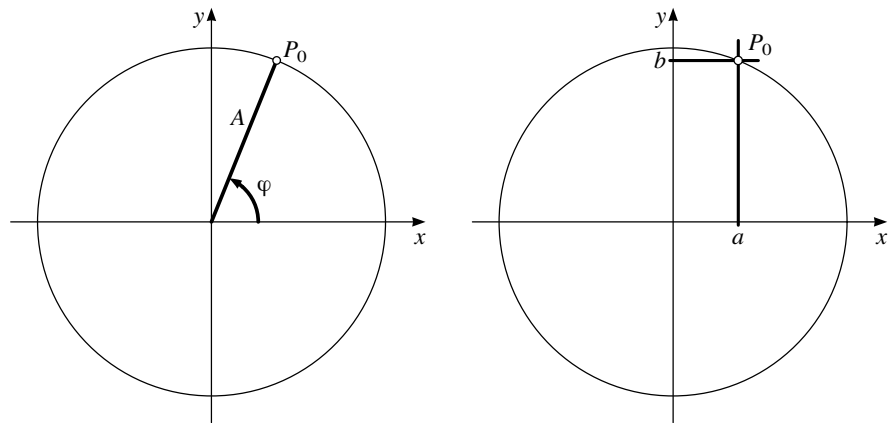


Abbildung 2.4: Polardarstellung und rechtwinklige Darstellung einer harmonischen Schwingung

- Umgekehrt liefert die Summe (physikalisch ausgedrückt die Überlagerung) von gleichfrequenten Sinus- oder Kosinusschwingungen stets eine harmonische Schwingung.

In manchen physikalischen Anwendungen ist  $A^2 = a^2 + b^2$  proportional zur *Energie* der Schwingung. Deshalb wird die Polardarstellung in gewissen Fällen der rechtwinkligen vorgezogen. Die geometrische Interpretation dieser Beziehung ist der Satz von Pythagoras. Sie unterstellt, dass die Sinus-Komponente und die Kosinus-Komponente einer Schwingung zueinander «senkrecht» stehen. Die physikalische Interpretation sagt, dass die Gesamtenergie einer Schwingung aus der Summe der Energien der Kosinus- und der Sinus-Komponenten besteht.

### Zeigerdiagramm

In der Elektrotechnik wird die Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen oft mit dem Zeigerdiagramm beschrieben. Es schließt an die Kodierung einer Schwingung durch einen Punkt der Ebene an und ersetzt den Punkt durch einen Ortsvektor. Genauer: Eine Schwingung der Art

$$x: t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$$

lässt sich wie folgt durch das *Zeigerdiagramm* beschreiben: Der *Zeiger* ist der Ortsvektor  $\vec{x}(t) = \overline{OP}_t$  zum Punkt  $P_t(A \cos(\omega t + \varphi) | A \sin(\omega t + \varphi))$ . Der

Zeiger  $\vec{x}(t)$  kreist also mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gleichförmig um den Nullpunkt. Er startet zur Zeit 0 im Punkt  $P_0(A \cos(\varphi) | A \sin(\varphi))$ . Seine Normalprojektion auf die  $x$ -Achse entspricht der ursprünglichen Schwingung. Der Punkt  $P_0$  stimmt überein mit dem Punkt  $(a|b)$ , der bei der rechtwinkligen Darstellung eingeführt wurde (Abbildung 2.4). Als Beispiel soll wieder eine Sinusschwingung dienen:  $x: t \mapsto \sin(t) \quad [= \cos(t - \pi/2)]$ . Ihre rechtwinklige Kodierung ist  $(0|-1)$ , die polare  $(1\angle -\pi/2)$  und der Zeiger startet zur Zeit 0 in  $P_0(0|-1)$ . Aus der Sicht eines mit Kreisfrequenz  $\omega$  rotierenden Koordinatensystems stehen die Zeiger still, sie werden zu Ortsvektoren, deren Länge die Amplitude der Schwingung und deren Polarwinkel die Phasenverschiebung angeben.

Das Zeigerdiagramm wird angewendet, um die Überlagerung *gleichfrequenter* Schwingungen zu beschreiben. Dabei sind nur die Amplituden und die Phasenwinkel von Interesse. Die Rotation der Zeiger wird deshalb nicht dargestellt. Folglich genügt es, die Zeiger zu einem festen Zeitpunkt darzustellen.

## Komplexe Darstellung, Eulerrelation

Die komplexe Notation bringt bei der Beschreibung von harmonischen Schwingungen begriffliche und rechnerische Vereinfachungen. Wer die Eulerrelation noch nicht kennt, kann diesen Abschnitt zunächst überlesen. Es wird angedeutet, wie die Eulerrelation motiviert und begründet werden kann. Einige der *Aufgaben* lassen sich zum Vertiefen von Vorkenntnissen nutzen. Die eigentliche Behandlung und die didaktische Aufarbeitung ist nicht Gegenstand dieser kurzen Bemerkungen.

Die Eulerrelation  $\exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)$  wird üblicherweise mit Hilfe von Taylorreihen bewiesen. Das ist wohl der beste Weg. Hier wird EULERS Formel mit Hilfe der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen motiviert. Anschließend werden zwei Wege skizziert, um sie analytisch zu begründen. So oder so ist eine einsichtige Herleitung mit einem gewissen begrifflichen Aufwand verbunden, der hier angesprochen, aber nicht geleistet wird.

Die komplexe Notation ist begrifflich einfach. An Stelle einer harmonischen Schwingung auf der reellen Achse wird in der komplexen Ebene eine gleichförmige Kreisbewegung betrachtet.

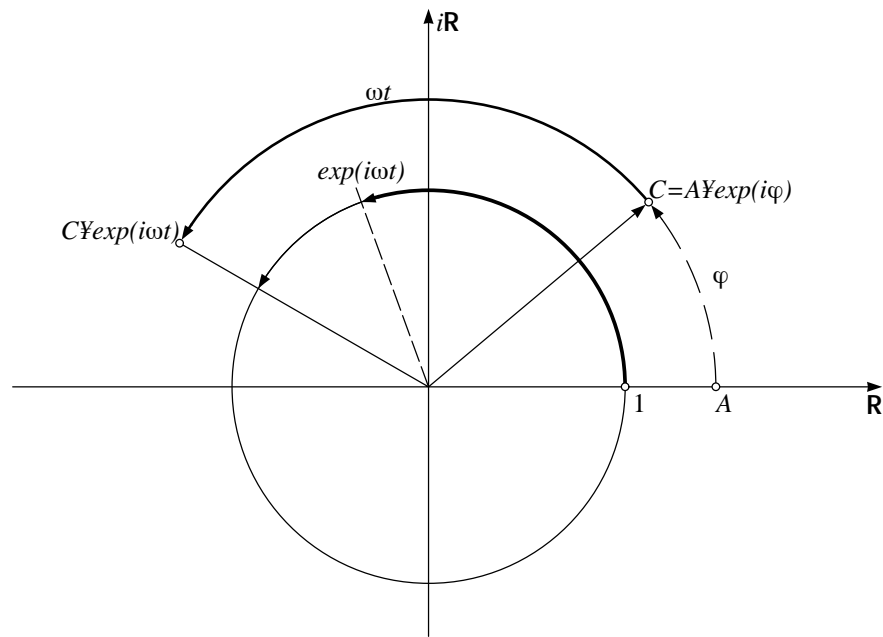


Abbildung 2.5: Komplexe Notation einer Schwingung, geometrisch gesehen

Eine komplexe Zahl der Art  $z = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$  bezeichnet einen Punkt auf dem Einheitskreis in  $\mathbf{C}$  mit Polarkoordinaten  $(1 \angle \alpha)$ . Ist  $w = (1 \angle \beta)$  eine zweite komplexe Zahl der Länge 1, so wird das Produkt  $z \cdot w$  berechnet durch

$$(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta).$$

Das heißt: Werden zwei komplexe Zahlen vom Betrage 1 multipliziert, so addieren sich die Polarwinkel. In der Polarform gilt

$$(1 \angle \alpha)(1 \angle \beta) = (1 \angle (\alpha + \beta)).$$

Die komplexwertige Funktion

$$\begin{aligned} E: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\mapsto \cos(t) + i \sin(t) \end{aligned}$$

bildet also die Zahlengerade  $\mathbf{R}$  auf den Einheitskreis in  $\mathbf{C}$  ab und erfüllt die Funktionalgleichung  $E(s) \cdot E(t) = E(s + t)$ . Diese Eigenschaft zeichnet die Exponentialfunktionen aus. Wird die Funktion  $E$  formal abgeleitet, so zeigt

sich, dass  $E': t \mapsto -\sin(t) + i \cos(t) = i \cdot E(t)$  gilt. Die formale Ähnlichkeit mit  $(\exp(ct))' = c \exp(ct)$  legt die Verwendung der Notation  $\exp(it)$  für  $E(t)$  nahe. Nun erklärt die Notation an sich noch nichts. Aber beide der folgenden Verallgemeinerungen der im Reellen bekannten Definitionen führen zum Ziel und zu gleichwertigen Erklärungen der Notation.

$$\begin{aligned}\exp(it) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n \\ \exp(it) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (it)^n\end{aligned}$$

Die komplexe Darstellung einer harmonischen Schwingung

$$x: t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$$

ist vorteilhaft. Die Funktion  $x: t \mapsto x(t)$  ist der Realteil der Zuordnung  $X: t \mapsto A \exp(i(\omega t + \varphi))$ . Diese komplexe Funktion lässt sich wie folgt zerlegen:

$$A \exp(i(\omega t + \varphi)) = A \exp(i\varphi) \cdot \exp(i\omega t) = C \exp(i\omega t)$$

Dabei ist die Konstante  $C$  die *komplexe Amplitude*, welche den Ort der gleichförmigen Kreisbewegung zur Zeit  $t = 0$  in der komplexen Ebene  $\mathbf{C}$  angibt. Der Faktor  $\exp(i\omega t)$  verursacht die gleichmäßige Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Die komplexe Schreibweise führt zu bequemen Formeln für das «Additionstheorem»  $\exp(i(t + s)) = \exp(it) \exp(is)$  und die Ableitungsregeln. Die zugrundeliegende geometrische Vorstellung ist die gleichförmige Kreisbewegung (Zeigerdarstellung!) in der (komplexen) Ebene. Im Reellen ist davon nur der Realteil sichtbar, der für sich alleine betrachtet ein komplizierteres Verhalten zeigt.

## 2.4 Überlagerung von Schwingungen

Was ereignet sich beim Überlagern verschiedener Schwingungen? Lassen wir die Grafen einiger Beispiele vom Computer aufzeichnen:

$$\begin{aligned} y_1: t &\mapsto 3 \cos(t) + \cos(t - 2) & y_2: t &\mapsto 3 \cos(4t) - 2 \sin(4t) \\ y_3: t &\mapsto \cos(8t) + \sin(7t) & y_4: t &\mapsto \cos(8t) + \sin(\sqrt{5}t) \end{aligned}$$

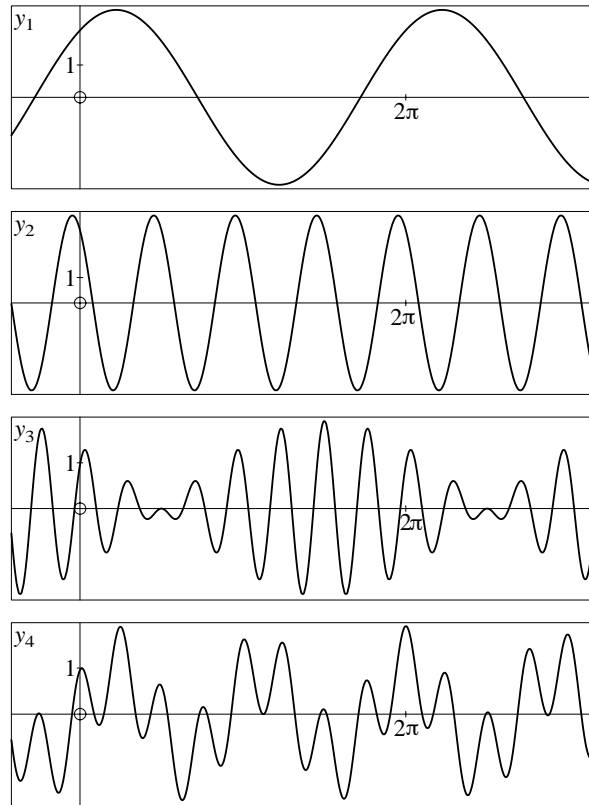


Abbildung 2.6: Grafen der Beispiele  $y_1, \dots, y_4$

Die Beispiele der Abbildung 2.6 zeigen komplizierte Ergebnisse, wenn Schwingungen verschiedener Frequenzen gemischt werden und einfache Antworten beim Überlagern von Schwingungen gleicher Frequenz. Das lässt sich durch Nachrechnen einsehen. Wir behandeln nachfolgend nur noch die Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen in den verschiedenen Darstellungsarten.

## Überlagerung:

### Polardarstellung und rechtwinklige Darstellung

Die Überlagerung der beiden Schwingungen

$$g: t \mapsto A \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{und} \quad h: t \mapsto B \cos(\omega t + \beta)$$

lässt sich durch Verwendung der rechtwinkligen Darstellung verstehen:

$$\begin{aligned} & A \cos(\omega t + \alpha) + B \cos(\omega t + \beta) \\ &= A \cos(\alpha) \cos(\omega t) - A \sin(\alpha) \sin(\omega t) \\ &\quad + B \cos(\beta) \cos(\omega t) - B \sin(\beta) \sin(\omega t) \\ &= (A \cos(\alpha) + B \cos(\beta)) \cos(\omega t) - (A \sin(\alpha) + B \sin(\beta)) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Da hier eine Überlagerung einer Kosinusschwingung mit einer Sinusschwingung

$$(A \cos(\alpha) + B \cos(\beta)) \cos(\omega t) \quad \text{bzw.} \quad - (A \sin(\alpha) + B \sin(\beta)) \sin(\omega t)$$

derselben Frequenz vorliegt, ist das Ergebnis eine harmonische Schwingung der Art  $C \cos(\omega t + \gamma)$ . Für die Amplitude  $C$  gilt

$$C^2 = (A \cos(\alpha) + B \cos(\beta))^2 + (A \sin(\alpha) + B \sin(\beta))^2$$

und die Phase  $\gamma$  wird im Intervall  $-\pi < \gamma \leq \pi$  durch

$$C \cos(\gamma) = A \cos(\alpha) + B \cos(\beta) \quad \text{und} \quad C \sin(\gamma) = A \sin(\alpha) + B \sin(\beta)$$

eindeutig bestimmt.

### Überlagerung: Zeigerdiagramm

Zum gleichen Ergebnis, aber zu einer einfacheren geometrischen Einsicht führt das Zeigerdiagramm (Abbildung 2.7). Die Zeiger der beiden Schwingungen rotieren mit derselben Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Betrachtet man zunächst einen festen Zeitpunkt, etwa  $t = 0$ , so lässt sich die Überlagerung als eine Vektoraddition für die Zeiger lesen. Weil sich aber beide Zeiger mit derselben Winkelgeschwindigkeit drehen, tut dies auch ihr Summenzeiger. Durch Überlagern entstehen aus gleichfrequenten harmonischen Schwingungen stets harmonische Schwingungen derselben Frequenz. Amplitude und Phase der Überlagerung erhält man aus der Addition der Zeiger der einzelnen Komponenten im Zeitpunkt 0.

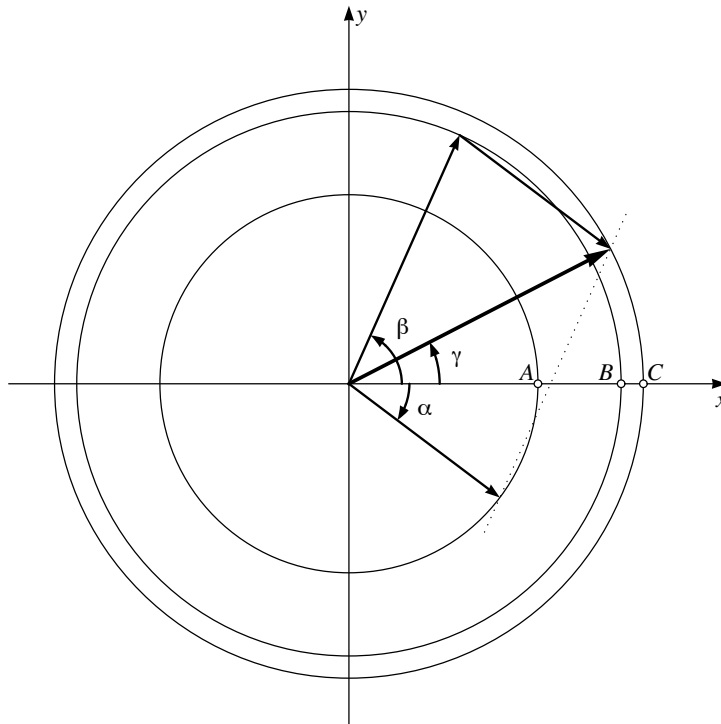


Abbildung 2.7: Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen im Zeigerdiagramm

### Überlagerung: Komplexe Darstellung

Besonders einfach wird die Rechnung in der komplexen Darstellung

$$C_\alpha \exp(i\omega t) + C_\beta \exp(i\omega t) = (C_\alpha + C_\beta) \exp(i\omega t).$$

Beim Überlagern gleichfrequenter Schwingungen addieren sich in der komplexen Darstellung die komplexen Amplituden. Wer die komplexen Amplituden mit Real- und Imaginärteil darstellt, ist wieder bei der rechtwinkligen Darstellung angelangt. Die formale Einfachheit kann beim numerischen Rechnen nur ausgenutzt werden, wenn der Rechner komplexe Zahlen als Datentyp kennt und die algebraischen Operationen unabhängig vom verwendeten Anzeigeformat ausführt.

## 2.5 Aufgaben

Die Aufgaben 1, 2 und 3 enthalten Übungsmaterial zur Überlagerung harmonischer Schwingungen, das mit den verschiedenen Methoden oder Darstellungsformen aus diesem Kapitel zu bearbeiten ist. In jedem Fall soll auch das Zeigerdiagramm oder die komplexe Darstellung bei der Lösung verwendet werden. Die dritte Aufgabe ist eine praktische Anwendung zur Aufgabe 2.

Die Aufgaben 4 bis 8 setzen Vorkenntnisse über Differentialgleichungen (einige zudem über ihre geometrische Darstellung als Vektorfelder) oder komplexe Zahlen voraus. Diese Aufgaben geben Gelegenheit, das Thema noch auf eine andere Weise zu betrachten und mit einem bisher nicht erwähnten Hilfsmittel zu bearbeiten: Für Lösungen von homogenen linearen Differentialgleichungen gilt das Superpositionsprinzip. Es lässt sich auf die Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen oder Kreisbewegungen anwenden.

1. Welches sind Amplitude, Kreisfrequenz und Phase bei den folgenden Schwingungen?
  - a)  $x_1: t \mapsto 3 \cos(4(t - 2))$
  - b)  $x_2: t \mapsto 3 \sin(4t - 2)$
  - c)  $x_3: t \mapsto x_1(t) + x_2(t)$
2. Es seien  $u_1: t \mapsto \cos(t)$ ,  $u_2: t \mapsto \cos(t + \frac{2\pi}{3})$ ,  $u_3: t \mapsto \cos(t + \frac{4\pi}{3})$ .
  - a) Stellen Sie die Überlagerungen  $u_1 + u_2$  und  $u_1 + u_2 + u_3$  mit dem Zeigerdiagramm grafisch dar.
  - b) Wie groß ist das Verhältnis der Amplituden von  $u_1$  und  $u_1 + u_2$ ?
  - c) Berechnen Sie die Überlagerungen  $u_1 + u_2$  und  $u_1 + u_2 + u_3$  in komplexer Schreibweise.
3. Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf von drei Wechselspannungen  $V_0$ ,  $V_+$ ,  $V_-$  mit den Phasenwinkeln  $0$ ,  $\pm 2\pi/3$ , einem Spitzenwert von 230 Volt und 50 Schwingungen pro Sekunde durch Formeln.
  - a) Welche Spitzenwerte erreicht die Differenzspannung  $V_+ - V_-$ ?
  - b) Wie groß ist die Phase von  $V_+ - V_-$ ?
  - c) Welche Spannung wird durch die Überlagerung  $V_0 + V_+ + V_-$  beschrieben?

4. Lösen Sie die Differentialgleichung  $x'' = -x$  mit Hilfe eines Solvers, der das zugehörige Vektorfeld darstellt und Lösungen des Anfangswertproblems numerisch annähert und grafisch darstellt. Hinweis: Die Gleichung zweiten Grades wird in ein System von Gleichungen ersten Grades umgewandelt mit  $x' = y$  und  $y' = -x$ .
- Welche Bahnkurven ergeben sich? Wie hängt die Antwort von den Anfangsdaten ab?
  - Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Lösungskurve zum Startwert  $(4|3)$  und lassen Sie die zugehörige Bahn vom Grafikrechner aufzeichnen.
5. Die Parameterdarstellung  $\vec{x}: t \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$  erfüllt die Differentialgleichung  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ . Diese Differentialgleichung beschreibt die momentane Veränderung der Positionsfunktion. Der Vektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'$  beschreibt also die Momentangeschwindigkeit an der Stelle  $(x|y)$ .
- Stellen Sie das Vektorfeld dar, das an der Stelle  $(x|y)$  den Wert  $\omega \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  annimmt.
  - Tragen Sie einige Bahnkurven ein, welche Lösungen der Differentialgleichung sind. Warum ist jede Bahn  $\vec{x}: t \mapsto \vec{x}(t)$  durch die Vorgabe eines Startpunktes  $(x_0|y_0)$  bereits eindeutig festgelegt?
  - Es seien  $\vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2$  zwei Lösungen der Differentialgleichung, also zwei Kreisbewegungen mit der Kreisfrequenz  $\omega$ . Zeigen Sie, dass dann alle Linearkombinationen  $r_1\vec{x}_1 + r_2\vec{x}_2$  die Einsetzprobe mit der Differentialgleichung bestehen. Warum stellt jede Linearkombination von gleichförmigen Kreisbewegungen wieder eine gleichförmige Kreisbewegung dar? (Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenem Anfangswert  $\vec{x}(0)$  ausnützen.)
6. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

von den Funktionen  $x: t \mapsto \cos(t)$  und  $y: t \mapsto \sin(t)$  gelöst wird. Stellen Sie das zugehörige Vektorfeld und die Bahnkurven in einer Handskizze dar.

7. Die Differentialgleichung  $\vec{x}'' = -\omega^2 \vec{x}$  beschreibt ein Kraftfeld für einen Punkt mit Einheitsmasse. Setzt man den Punkt an der Stelle  $(x_0|y_0)$  in diesem Kraftfeld mit der Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  aus, so ist seine Bewegung für alle Zeiten vollständig festgelegt.
- Welche Bewegung führt der Punkt aus, wenn  $(x_0|y_0) = (1|0)$  und  $\vec{v}_0 = \vec{0}$  ist?
  - Welche Bewegung führt der Punkt aus, wenn  $(x_0|y_0) = (0|0)$  und  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist?
  - Mit welcher Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  muss der Punkt in  $(1|0)$  starten, damit er auf einer Kreisbahn läuft?
  - Welche Bewegung entwickelt sich im Kraftfeld aus den allgemeinen Anfangsdaten  $(x_0|y_0)$  und  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ?
8. Lösen Sie die Differentialgleichung  $f'(t) = i \cdot f(t)$  für eine komplexwertige Funktion  $f$
- mit einem Potenzreihenansatz für  $f$ .
  - mit der numerischen Integrationsmethode von EULER.  
Welche Näherung ergibt die formal algebraische Berechnung, wenn  $n$  Eulerschritte mit  $\Delta t = \frac{1}{n}t$  ausgeführt werden?