3 Kreise, die auf Kreisen kreisen

Gleichförmige Kreisbewegungen oder harmonische Schwingungen werden als elementare Bausteine benutzt, um komplexere Bewegungen zu erzeugen. Prototypen sind die Epizykelmechanismen des ptolemäischen Weltbildes. Die zugrundeliegende mathematische Methode ist äußerst fruchtbar, was sich in vielen Anwendungen zeigt.

Voraussetzungen

Analysis: Trigonometrische Funktionen, Parameterdarstellungen von Kurven. Das Kapitel 2 kann als Vorbereitung benutzt werden.

Ziel

Eine Bemerkung über die historische Entwicklung einer Methode. Beispiele zur Überlagerung von gleichförmigen Kreisbewegungen verschiedener Frequenzen, Behandlung von trigonometrischen Polynomen in der komplexen Darstellung, Epizykeldarstellung, Rollkurven, Spirographen und Fouriersynthese, Vorbereitung auf die Fourieranalyse.

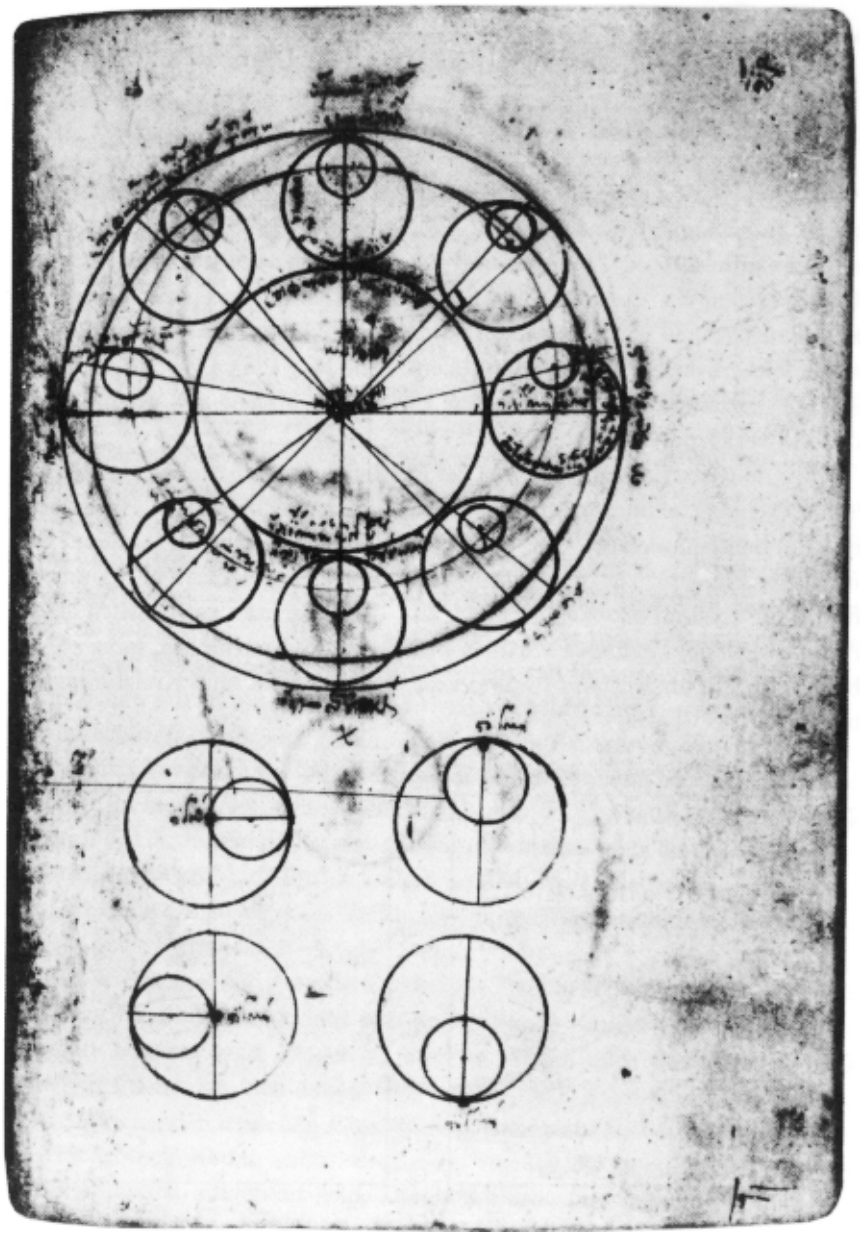

Abbildung 3.1: Ptolemäisches Weltbild

3.1 Das Weltmodell des Ptolemäus

Ptolemäus war einer der führenden Geografen und Astronomen der späten Antike. In seinem Weltmodell wird die Bewegung der Sonne, des Mondes, der damals bekannten Planeten und der Fixsterne vom Standpunkt eines Betrachters auf der Erde beschrieben. Das Modell ist geozentrisch. Deshalb hat es heute keinen guten Ruf mehr, zu Unrecht, wie wir bald sehen werden! Es handelt sich hier nicht darum, geozentrische Modelle zu verteidigen, sondern die mathematische Idee sichtbar zu machen, welche das ptolemäische Weltbild verkörpert.

Die einfachste Bewegung führen die Fixsterne aus. Sie drehen sich täglich einmal (genauer einmal pro Sterntag) mit einer gleichförmigen Kreisbewegung um den Himmelspol. Wer den Nachthimmel betrachtet, sieht die Positionen der Planeten vor dem Hintergrund des Fixsternenhimmels. Und wer oft und mit System beobachtet, stellt fest, dass Planeten gelegentlich eigenartige Schleifenbewegungen vor diesem Hintergrund ausführen, ganz so, als ob sie noch um unsichtbare Punkte kreisten, die selbst eine Kreisbewegung ausführen.

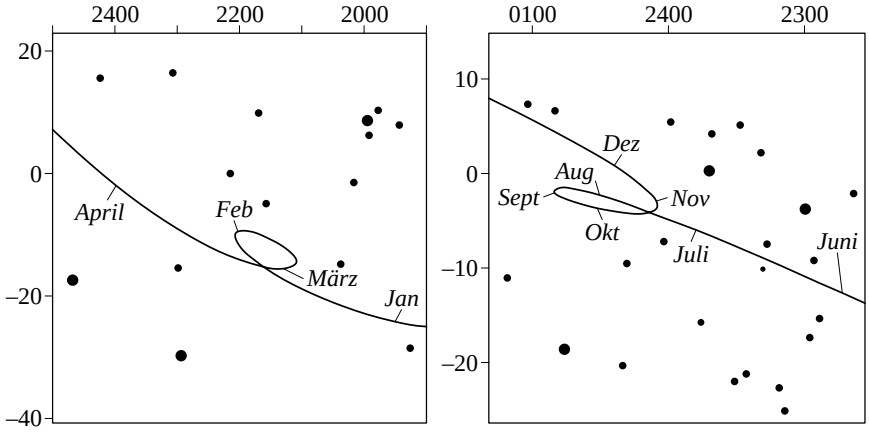

Abbildung 3.2: Planetenschleifen

Das Modell von Ptolemäus besteht aus Kreisen, die auf Kreisen kreisen: Deferenten, Epizykel, Epi-Epizykel und . . . Warum konnte dieses Weltmodell

bei der damaligen wissenschaftlichen Elite, den Astronomen und Astrologen während über tausend Jahren bestehen? Es gibt zwei wichtige Gründe:

1. Ptolemäus hat eine induktive Methode befolgt und mit Erfolg Beobachtungen geometrisch modelliert.

2. Die antike Spitzentechnik war in der Lage, derartige Modelle in mechanische Rechengeräte umzusetzen.

Bekannt ist ein Fundstück, das Fischer um 1900 vor der Insel Antikythera geborgen haben. Derek de Solla Price untersuchte das Fundstück 1972 mit Röntgentechnik. Es gelang ihm, die Funktion des Mechanismus zu entschlüsseln: Es war ein mechanischer Kalenderrechner, der unter anderem die Mondphasen zeigen konnte (Abbildung 3.3).

Eine tiefere Antwort auf die Frage, warum die Methode des Ptolemäus Erfolg hatte, liefert die sogenannte Fourieranalyse, die erst in der Rückschau als eine Weiterentwicklung der Epizykeltheorie erkennbar ist. Es wäre interessant zu wissen, wie Ptolemäus von den Daten zum Modell gelangte. Aus heutiger Sicht ist klar, dass geeignete Epizykelmechanismen mit einer hinreichenden Anzahl von Kreisbewegungen ganz allgemeine periodische Naturvorgänge zu *beschreiben* vermögen und zwar mit einer Genauigkeit, die im wesentlichen nur durch die Qualität der Beobachtungen begrenzt wird. Die Vorhersagekraft ergibt sich allein schon aus der Annahme, dass sich die beschriebenen Vorgänge periodisch wiederholen. Alles, was beobachtet wurde, wird sich ja immer von neuem wiederholen. Die Epizykeltheorie hat keinen weiteren Erklärungswert. Es gibt gar kein Bedürfnis nach einer kausalen Erklärung, denn das Modell funktioniert ja. Es bedarf also keiner Theorie, die sagt, weshalb das so ist. Dies ist für eine junge Wissenschaft ein gewaltiger Vorteil, auch heutzutage!

Erst zu Beginn der Neuzeit wurden die Beobachtungen so gut, dass die Weiterentwicklung des Modells sehr aufwendig geworden wäre und die Wissenschaft begann, neue Fragen zu stellen, Fragen nach dem Grund, nach einfachen Prinzipien, aus denen alles andere nach geometrischen oder mathematischen oder logischen Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden konnte. Die Naturbeschreibung sollte nach dem Vorbild der euklidischen Geometrie axiomatisch aufgebaut sein. Dieser Anforderung war das Modell von Ptolemäus nicht mehr gewachsen, wohl aber die Physik von Newton.

Die *Idee* der Methode von Ptolemäus hat jedoch in der Mathematik überlebt, unter anderem Namen freilich und mit Weiterentwicklungen. Ein wesentlicher neuer Gesichtspunkt wird erst im folgenden Kapitel ins Spiel

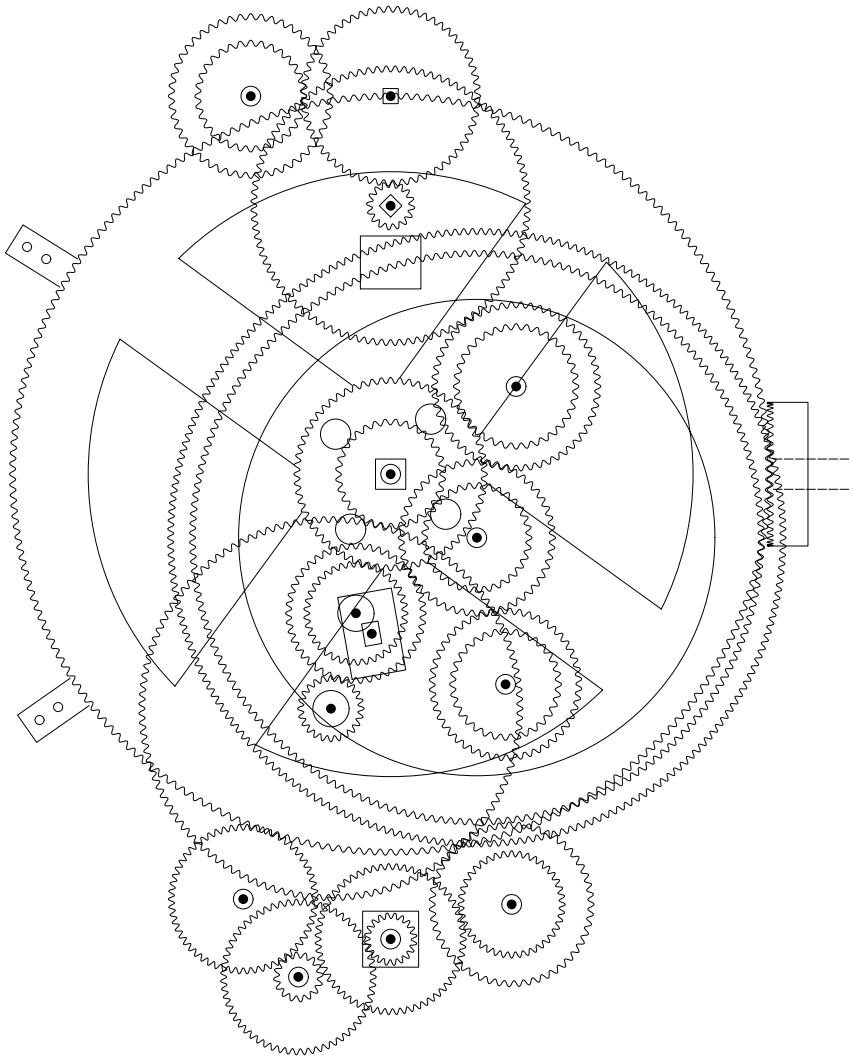

Abbildung 3.3: Der Antikythera-Mechanismus

kommen, wenn eine Verbindung zur Methode der kleinsten Quadrate hergestellt wird. Hier soll nur der geometrische Zusammenhang weiterverfolgt werden. Er lässt sich herstellen, indem die Zuordnung $t \mapsto \exp(it)$ als gleichförmige Bewegung auf dem Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene interpretiert wird. Jedem Epizykelmechanismus entspricht ein «trigonometrisches Polynom» der Art

$$P(t) = \sum_{k=0}^{N} C_k \exp(i\omega_k t)$$

mit komplexen Amplituden C_k und rationalen Kreisfrequenzen ω_k. Denn jeder Summand $C_k \exp(i\omega_k t)$ beschreibt eine Kreisbewegung, und jedes rationale Verhältnis von Kreisfrequenzen lässt sich – mindestens im Prinzip – durch Zahnradübersetzungen realisieren.

Eine entscheidende Frage lautet: Welche Kurven lassen sich durch «Epizykelmechanismen» in der (komplexen) Ebene darstellen? Dies ist eine sehr schwierige Frage. Die Antwort wird einfacher, wenn «darstellen» durch «annähern innerhalb einer vorgegebenen Toleranz und für eine beschränkte Zeit» ersetzt wird. Ein berühmter Satz von Weierstrass beantwortet die analoge Frage für Überlagerungen von harmonischen Schwingungen mit Kreisfrequenzen ω, 2ω, 3ω, … Untechnisch formuliert und im Spezialfall $\omega = 1$ lautet die Antwort so:

Approximationssatz von Weierstrass
Ist $f\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ eine beliebige 2π-periodische stetige Funktion und ist der Graf von f mit einer beliebig feinen «Strichdicke» $s > 0$ aufgezeichnet, so gibt es ein trigonometrisches Polynom

$$p\colon t \mapsto \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(kt + \varphi_k),$$

dessen Graf sich innerhalb der «Strichdicke» nicht von jenem von f unterscheidet.

Dieses Ergebnis ist höchst bemerkenswert, weil trigonometrische Polynome sehr spezielle Beispiele von stetigen periodischen Funktionen sind.

Der Zusammenhang mit der Methode von Ptolemäus kann über die komplexe Darstellung von harmonischen Schwingungen hergestellt werden. Die einzelnen Summanden $A_k \cos(kt+\varphi_k)$ lassen sich durch Epizykelmechanismen darstellen, beispielsweise gilt $\cos(t) = \frac{1}{2}\big(\exp(it) + \exp(-it)\big)$. Durch Überlagerung einzelner Mechanismen wird die Summe gebildet.

Mit andern Worten: Für alle praktischen Zwecke kann die Methode von Ptolemäus zur Beschreibung von (stetigen) periodischen Vorgängen $f\colon t \mapsto f(t)$ auf der Zahlgeraden R mit Erfolg angewendet werden, wenn der nötige Aufwand getrieben wird, genauer, wenn ein geeignetes trigonometrisches Polynom von genügend hohem Grad verwendet wird.

Der «Umweg» über die komplexe Exponentialfunktion ist an sich nicht nötig. Er bringt die Epizykelmechanismen ins Spiel, bietet begriffliche Vereinfachungen und später rechentechnische Vorteile. Es ist sonst nicht üblich, Ptolemäus in diesem Zusammenhang zu erwähnen. Die moderne Fachsprache kennt «Fouriersynthese» und «Fourieranalyse». Die «Synthese» behandelt den Aufbau von Bewegungen aus gleichförmigen Kreisbewegungen oder von Funktionen aus harmonischen Schwingungen und ihren Oberschwingungen. Der Approximationssatz von Weierstrass sagt, dass als Ergebnis solcher Überlagerungen «fast» alles zu erwarten ist. Durch «Analyse» wird eine gegebene (stetige) 2π-periodische Funktion in harmonische Bestandteile zerlegt. Ptolemäus hat mit rund 1500 Jahren Vorsprung eine Methode erahnt, die von Euler, Bernoulli und Fourier wiederentdeckt und kräftig ausgebaut wurde.

Stellt man Funktionen durch Lichtschwingungen dar, so genügt ein Prisma, um die «Analyse» oder die «Synthese» durchzuführen. Das Prisma zerlegt das Frequenzgemisch in einzelne reine Farbanteile («Regenbogenfarben», reine harmonische Schwingungen) und es ist in der Lage, reine Spektralfarben zu einem Gemisch zu vereinigen. Wir beschäftigen uns zunächst mit der Synthese von Kurven aus Kreisbewegungen.

3.2 Rollkurven, Spirographen

Manche Überlagerungen von Kreisbewegungen lassen sich mechanisch realisieren, so etwa bei dem als Spirograph™ bezeichneten Spielgerät. Beim Spirographen wird ein Zahnrad auf einem Zeichenblatt befestigt und ein zweites Zahnrad rollt auf dem ersten innen oder außen ab. Das zweite Zahnrad weist Öffnungen auf, in welchen ein Zeichenstift mitgeführt werden kann. Der Stift hinterlässt so auf dem Zeichenblatt eine Spur.

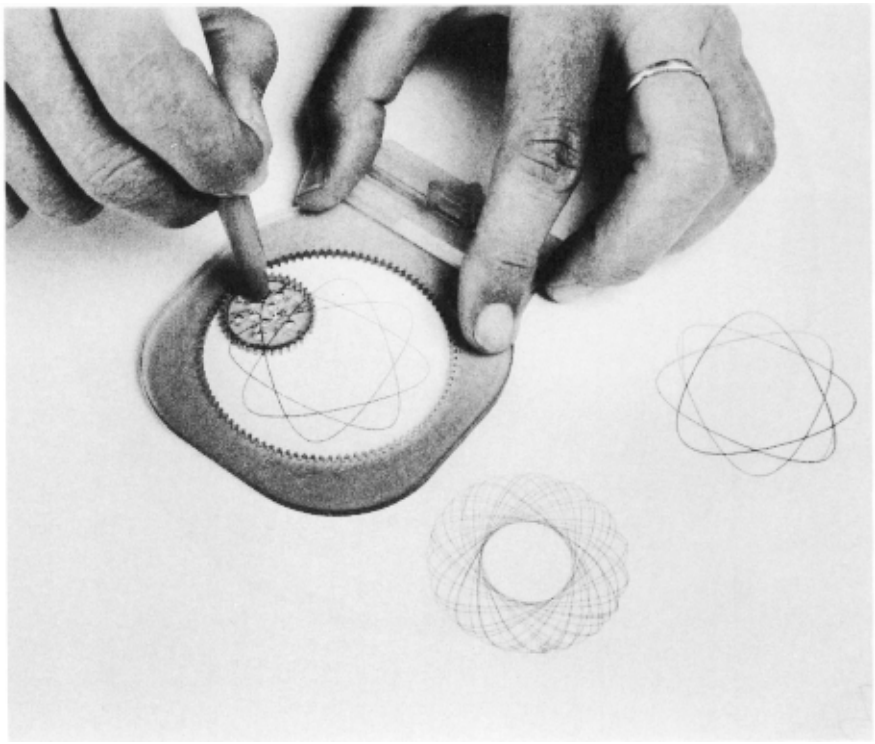

Abbildung 3.4: Spirograph™

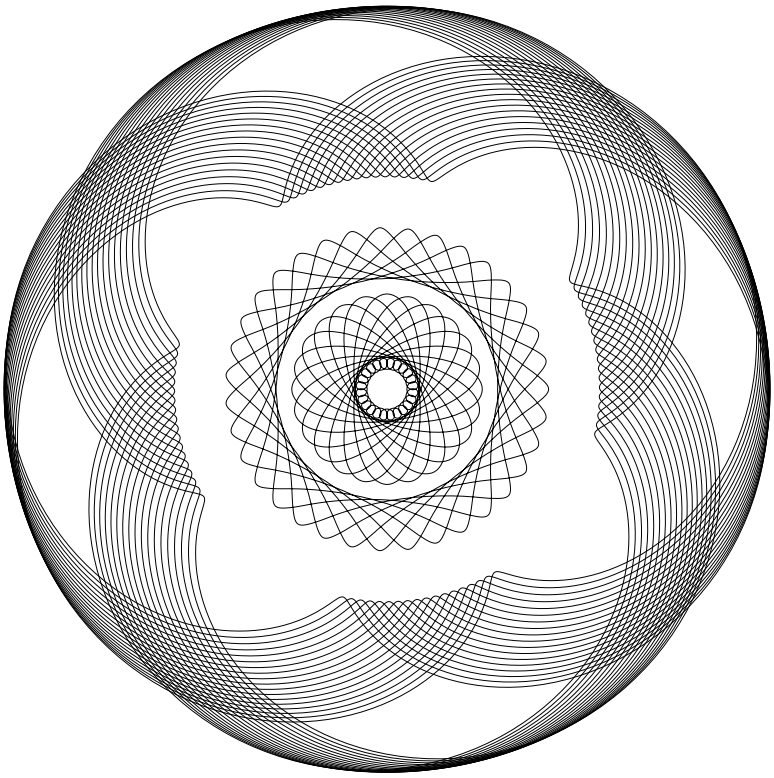

Abbildung 3.5: Spirographenbild

Mit einem Spirographen erzeugte Bewegungen lassen sich analytisch beschreiben. Betrachten wir zuerst einen Spezialfall, *Rollkurven* (Abbildung 3.6). Auf einem festen Kreis mit Zentrum O und Radius R rollt ein Kreis mit Radius r ab. Jeder Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises erzeugt als Spur seiner Bewegung eine Rollkurve.

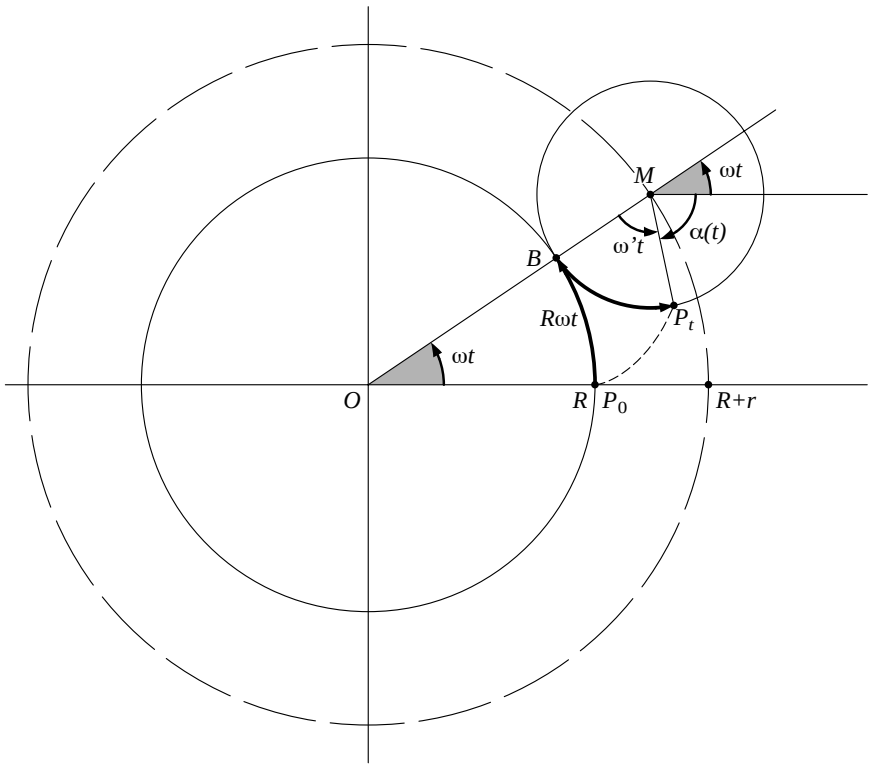

Abbildung 3.6: Erzeugen einer Rollkurve

Die Bewegung eines solchen Peripheriepunktes lässt sich zerlegen in die Bewegung des Kreiszentrums M und in eine Drehbewegung um dieses Zentrum. Das Zentrum M führt eine gleichförmige Kreisbewegung um O aus, also sind seine Koordinaten zur Zeit t (bei geeigneter Normierung) gegeben durch $M_t = (R + r)\big(\cos(\omega t)|\sin(\omega t)\big)$. Jede gleichförmige Drehbewegung eines Punktes P im Abstand r von M wird durch den Polarwinkel $\alpha(t)$ beschrieben, wobei ein Ansatz $\alpha(t) = \omega' t + \varphi$ verwendet werden kann. Durch den konstanten Winkel φ wird der Punkt ausgelesen, der die Rollkurve erzeugt. Die Wahl von $\varphi = \pi$ etwa, bei der wir nun bleiben wollen, führt auf

$P_0 = (R|0)$. Seine Position zur Zeit t werde mit P_t und der entsprechende Ortsvektor mit $\vec{p}(t)$ bezeichnet. Die Größen R, r, ω, ω' sind miteinander durch die Rollbedingung verknüpft. Sie sagt aus, dass die beiden Kreise ohne Schlupf aufeinander abrollen. Also sind die beiden Bogenlängen auf dem Kreis mit Radius R von P_0 nach B und auf jenem mit Radius r von B nach P_t gleich lang. Für alle t ist $R\omega t = r\omega' t$, also $\omega' = \frac{R}{r}\omega$. Weil für alle t die Beziehung $\omega t + \omega' t - \alpha(t) = \pi$ erfüllt ist, folgt $\alpha(t) = (1 + R/r)\omega t - \pi$.

Insgesamt lässt sich der Ortsvektor $\vec{p}(t)$ des Punktes P_t in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= (R+r)\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \cos\big(\alpha(t)\big) \\ \sin\big(\alpha(t)\big) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (R+r)\cos(\omega t) - r\cos\big((1+R/r)\omega t\big) \\ (R+r)\sin(\omega t) - r\sin\big((1+R/r)\omega t\big) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rollkurven, bei denen der Kreis mit Radius r auf der Innenseite des ruhenden Kreises mit Radius R abrollt, lassen sich genauso behandeln. Die Rechnung zeigt, dass sich der Unterschied zwischen innerer und äußerer Berührung algebraisch mit einem Vorzeichenwechsel bei r und folgerichtig auch bei $\omega' = \frac{R}{r}\omega$ beschreiben lässt.

Einige Beispiele von Rollkurven

Zur Vereinfachung seien $R = 1$ und $\omega = 1$ angenommen. Als einziger Parameter bleibt dann r. Trotz dieser Einschränkungen lässt sich von jeder Rollkurve bis auf Ähnlichkeit ein Exemplar erzeugen. Für die Abbildung 3.7 sind die Werte $r = \pm 2$, ± 1, $\pm 1/2$ gewählt. Die Marken auf den Kurven geben Werte des Kurvenparameters t an. Sie sollen die Bewegung andeuten. Das Beispiel mit $r = -\frac{1}{2}$ ist bemerkenswert. Es entspricht einem Mechanismus, der die Zuordnung $t \mapsto \cos(t)$ darstellt. In der Aufgabe 2 wird darüber weiter nachgedacht, wie sich auch die Sinusfunktion als Rollkurve erzeugen lässt.

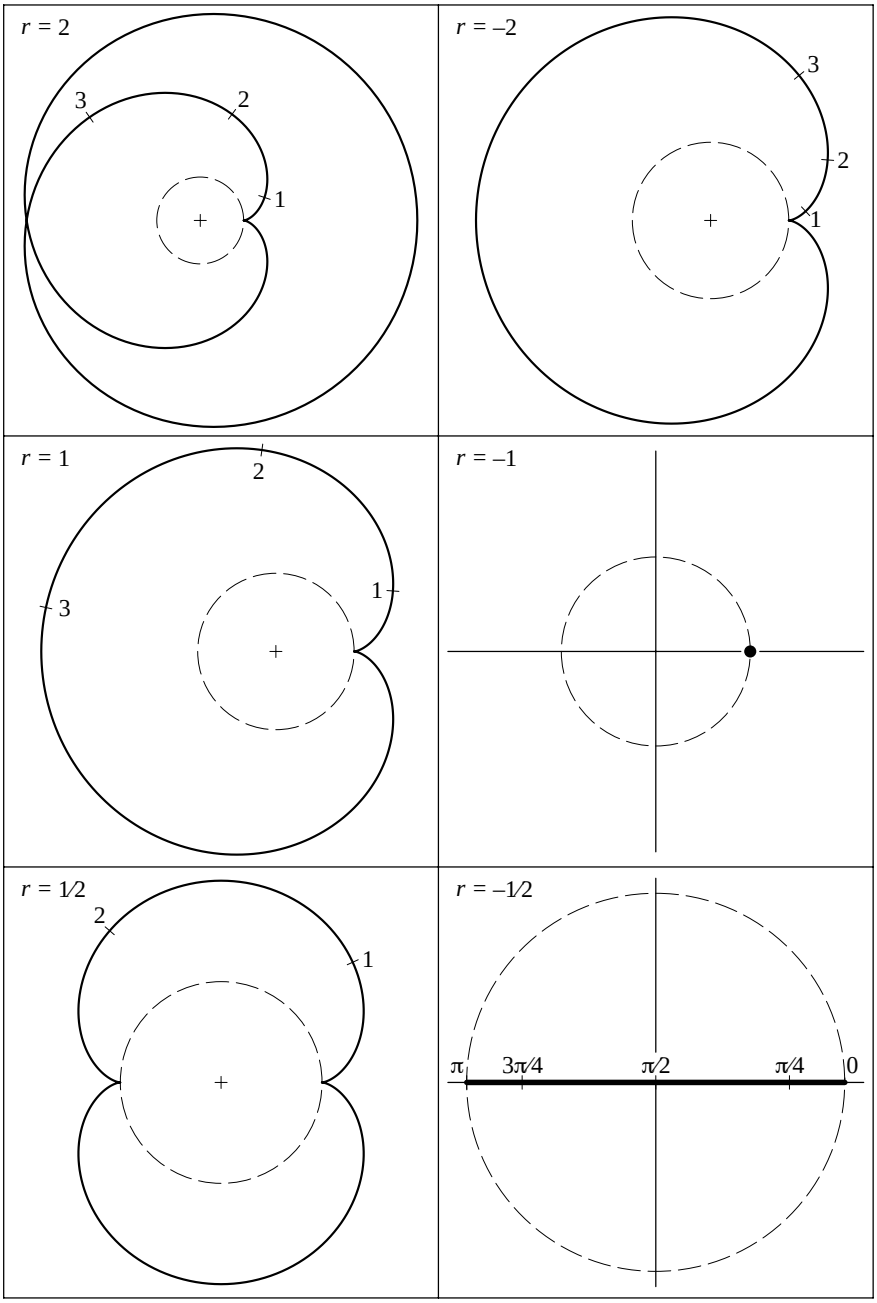

Abbildung 3.7: Beispiele für verschiedene Rollkurven, $r = \pm 2$, ± 1, $\pm 1/2$

Spirographenbilder

Allgemeiner ergeben sich nach dem gleichen Muster alle Kurven, welche sich mit dem Spirographen zeichnen lassen. Sie haben eine Darstellung der Art:

$$\vec{p}\colon t \mapsto (R+r)\begin{pmatrix}\cos(\omega t+\tau)\\ \sin(\omega t+\tau)\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}\cos\big((1+R/r)\omega t+\theta\big)\\ \sin\big((1+R/r)\omega t+\theta\big)\end{pmatrix}$$

Dabei ist im allgemeinen $|s| < r$. Die Geschwindigkeit des Zeichenvorganges wird mit ω gesteuert und die Phasenwinkel τ, θ bestimmen die Position des Punktes zur Zeit 0.

Wenn das Verhältnis R/r rational ist, so beschreibt diese Parameterdarstellung eine geschlossene Kurve, sonst ist sie offen. Beim Spirographen wird das Verhältnis R/r durch die Anzahlen der Zähne auf den beiden verwendeten Zahnrädern bestimmt und ist deshalb rational. Spirographen erzeugen also immer geschlossene Kurven.

Weitere Verallgemeinerungen von Rollkurven führen auf beliebige Überlagerungen gleichförmiger Kreisbewegungen mit rationalen Frequenzverhältnissen.

3.3 Überlagerungen mehrerer Kreisbewegungen

Alle parametrisierten Kurven der Form

$$\vec{s}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(t+\tau)+b\cos(\omega t+\theta)\\ a\sin(t+\tau)+b\sin(\omega t+\theta)\end{pmatrix}$$

mit beliebigen Konstanten a, b, τ, θ, ω beschreiben Überlagerungen von zwei Kreisbewegungen. Übersichtlicher und formal einfacher wird die Darstellung mit komplexen Amplituden $A = a\exp(i\tau)$ und $B = b\exp(i\theta)$:

$$\vec{s}\colon t \mapsto A\exp(it) + B\exp(i\omega t).$$

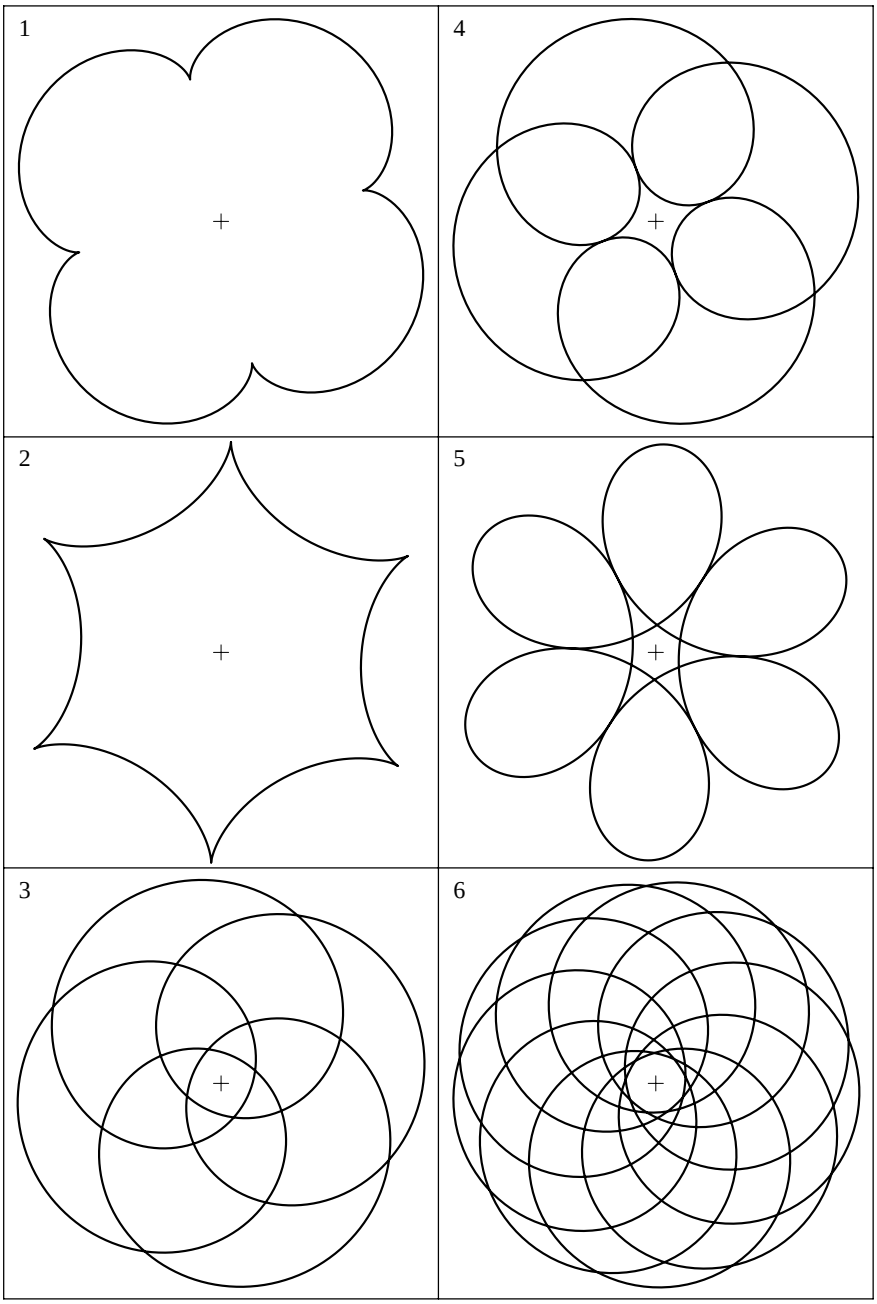

Abbildung 3.8: Überlagerung zweier gleichförmiger Kreisbewegungen

Die Abbildung 3.8 zeigt sechs Beispiele von Überlagerungen zweier gleichförmiger Kreisbewegungen. Die Tabelle 3.1 enthält die verwendeten Werte.

Bild	a	τ	b	ω	θ
1	1.0	0	0.2	5	−4
2	1.0	2	−0.2	−5	−4
3	3.0	2	4.0	5	−4
4	1.0	2	0.8	5	−4
5	1.0	2	−0.8	−5	−4
6	3.0	2	4.0	10	−4

Tabelle 3.1: Parameterwerte zur Abbildung 3.8

Die Überlagerung von n gleichförmigen Kreisbewegungen

$$\vec{s}\colon t \mapsto \sum_{k=1}^{n} A_k \exp(i\omega_k t)$$

stellt eine naheliegende Verallgemeinerung der oben betrachteten Situation dar. Falls alle Kreisfrequenzen ω_k rationale Vielfache einer Frequenz ω sind, so entspricht diese Bewegung einem n-teiligen Epizykelmechanismus.

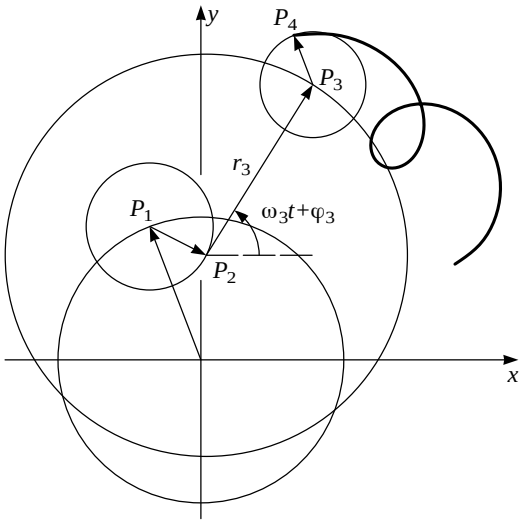

Abbildung 3.9: Prinzipskizze, komplexe Darstellung eines trigonometrischen Polynoms durch Überlagerung von $n = 4$ gleichförmigen Kreisbewegungen

Die Abbildung 3.10 zeigt Kurven, welche durch die Überlagerung von *drei* Kreisbewegungen erzeugt werden. Trotz großer formaler Ähnlichkeit der Parameterdarstellungen

$$\vec{a}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(7t) \\ \sin(7t) \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sin(17t) \\ \cos(17t) \end{pmatrix}$$

sind die Gestalten der Bilder ganz verschieden.

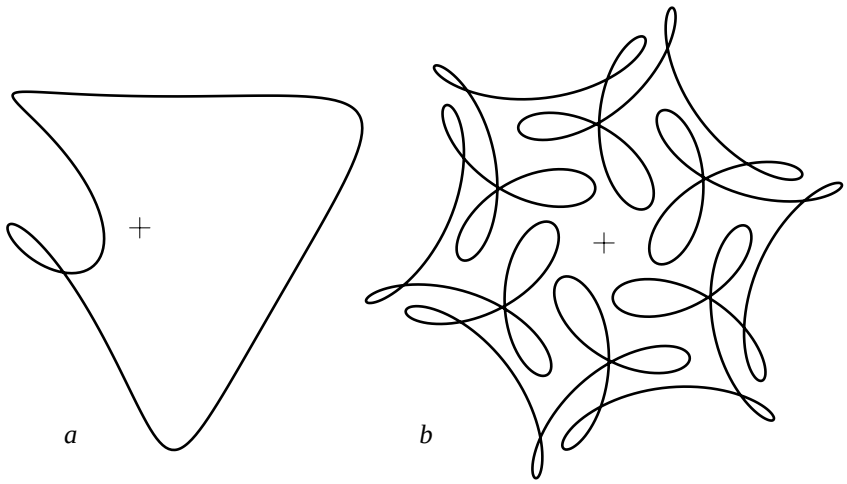

Abbildung 3.10: Überlagerung von drei Kreisbewegungen

In manchen Anwendungen treten periodische Funktionen auf. Dann sind die Kreisfrequenzen ω_k rationale oder gar ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz. Insbesondere gilt dies für Realisierungen mit Zahnradmechanismen oder für die Näherungsfunktionen, die im Satz von Weierstrass auftreten.

3.4 Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen

Hier soll durch Rechnung untersucht werden, was bei der Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen geschieht.

Die Beziehung

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big) \tag{3.1}$$

folgt aus den Additionstheoremen (Kapitel 7, Formel 7.3). Mit $x = \frac{1}{2}(\Omega+\omega)t$ und $y = \frac{1}{2}(\Omega-\omega)t$ ergibt sich

$$\cos(\Omega t) + \cos(\omega t) = 2\cos\big(\frac{1}{2}(\Omega+\omega)t\big)\cos\big(\frac{1}{2}(\Omega-\omega)t\big). \tag{3.2}$$

Die Formel 3.2 zeigt, was sich ereignen kann, wenn zwei harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen Ω und ω ($\Omega > \omega$) überlagert werden.

Die Summe zweier harmonischer Schwingungen besitzt also eine Faktorzerlegung mit einer «schnellen» Schwingung der Kreisfrequenz $\frac{1}{2}(\Omega+\omega)$ und einer «langsamen» Schwingung der Kreisfrequenz $\frac{1}{2}(\Omega-\omega)$. Die langsame Schwingung kann als variable Amplitude für die schnelle Schwingung verstanden werden. Damit lassen sich die früheren Experimente mit dem Grafikrechner verstehen.

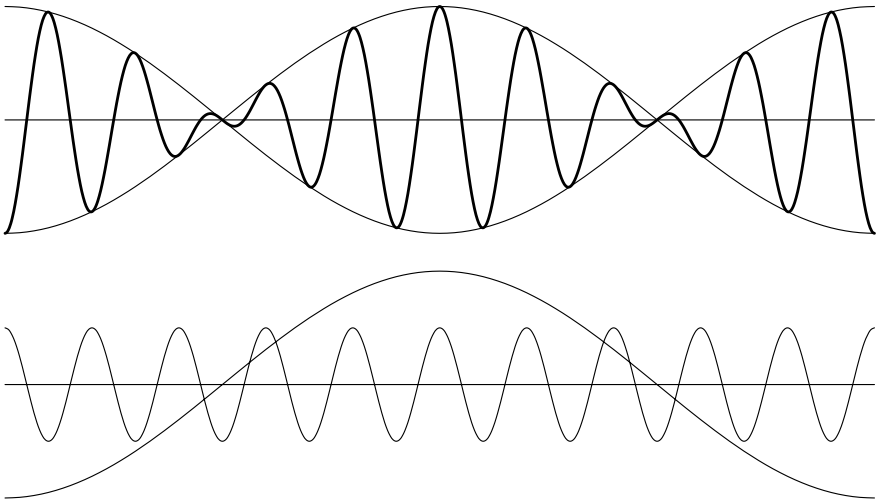

Abbildung 3.11: Die Überlagerung $t \mapsto \cos(9t) + \cos(11t)$ und ihre Faktoren $t \mapsto 2\cos(t)$, $t \mapsto \cos(10t)$

Im Grenzfall $\omega = \Omega$ wird die «variable Amplitude» konstant, die Überlagerung ergibt eine rein harmonische Schwingung. Beim Stimmen von Saiteninstrumenten macht sich die Überlagerung von Tönen ungleicher Frequenzen durch ein langsames periodisches An- und Abschwellen des «höheren» Tones (Schwebung) bemerkbar.

3.5 Aufgaben

Die Aufgabe 1 zeigt ein Beispiel für die Überlagerung von harmonischen Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen. Durch algebraische Umformungen wird ein Zusammenhang zwischen Polynomfunktionen und trigonometrischen Polynomen sichtbar gemacht.

Die Aufgaben 2 und 4 behandeln spezielle Epizykelmechanismen, welche harmonische Schwingungen auf $\mathbf{R}$ beschreiben oder Lissajousfiguren in der Ebene erzeugen.

1. Zeichnen Sie mit dem Grafikrechner den Grafen der Funktion

$$f\colon\ t \mapsto 0.75\sin(t) - 0.25\sin(3t).$$

   Stellen Sie $\sin(3t) = \sin(t+2t)$ mit Hilfe der Additionstheoreme als Term in der Variablen $\sin(t)$ dar. Welcher allgemeingültige Sachverhalt wird damit illustriert?

2. Beschreiben Sie je einen Epizykelmechanismus, der die folgenden Parameterdarstellungen realisiert:

   a) $\vec{f}\colon\ t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{g}\colon\ t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

   c) $\vec{h}\colon\ t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Warum lassen sich beliebige Überlagerungen von endlich vielen harmonischen Schwingungen mit einer gemeinsamen Periodenlänge durch Epizykelmechanismen erzeugen?

4. Lissajousfiguren sind Kurven mit einer Parameterdarstellung der Art

$$\vec{L}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(\Omega t) \\ b\cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

   a) Lassen Sie verschiedene Lissajousfiguren vom Computer aufzeichnen und variieren Sie die Koeffizienten a, b, Ω, ω, φ systematisch.

   b) Warum sind Lissajousfiguren genau dann geschlossen, wenn Ω/ω rational ist?

   c) Warum lassen sich alle geschlossenen Lissajousfiguren durch Epizykelmechanismen erzeugen?

   d) Beschreiben Sie eine Lissajousfigur in der komplexen Schreibweise.

5. Wie lauten die Parameterdarstellungen für Rollkurven in der komplexen Darstellung?