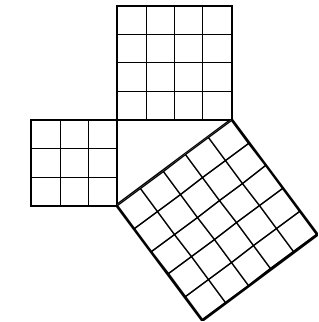
**Εὐκλείδης**

**Στοιχεῖα**

****

**Einige Einblicke auf der Grundlage**

**der kommentierten Auswahl von Lucius Hartmann**

**Zusammenstellung: Theo Wirth**

Inhalt

Biographie und Werke Euklids 3

"Stoicheia" (Elemente): Vorbemerkungen, Auswahl, Begründung 4

Texte und Kommentar: Geometrie (1. Buch) 4 – 10

Wörter : Geometrie (1. Buch) 11 – 13

Skizzen : Geometrie (1. Buch) 14

Biographie und Werke Euklids

Biographie

• Kleiner Pauly s.v. "Eukleides", Auszug: "E. wurde durch sein Werk Στοιχεῖα zum Mathematik­lehrer aller Völker und Generationen bis heute. Schon aus dem 5. Jh. sind lateinische Übersetzun­gen und Bearbeitungen bekannt, im 12. Jh. wurde E. aus dem Arabischen ins Lateinische übertra­gen.  
Sicheres über sein Leben erfährt man nur von Proklos (In Eucl. El. I p. 68, 6 - 20 Friedlein)." Proklos lebte im 5. Jhdt. n. Chr. (Text s. unten; hier eine Zusammenfassung):

• jünger als Plat. und dessen direkte Schüler, älter als Archimedes (287-212) -> E. um 300 v.Chr.

• Ausbildung (philosophisch und mathematisch) in Athen

• Wirken und Lehre in Alexandria.

Überlieferte Werke

• Στοιχεῖα (Elemente, 13 Bücher); στοιχεῖα: elementare Sätze: Definitionen, Postulate, Axiome;   
 aus ihnen werden deduktiv weitere Sätze abgeleitet, in Form von Aufgaben/Konstruktionen   
 (problhvmata) und Lehrsätzen (qewrhvmata).  
 1 – 4: ebene Trigonometrie bis zur Konstruktion des regul. 15-Ecks in gegebenem Kreis  
 5 – 6: Proportionen  
 7 – 10: Arithmetik  
 11 – 13: räumliche Geometrie bis zur Konstruktion der regulären Polyeder (der plato-  
 nischen Körper, Ziel des Werkes)

• "Data" (planimetrische Probleme)

• "Phaenomena" (Sphärik)

• "Optica" (Perspektive)

• "Sectio canonis" (math. Musiktheorie).

***Antike Angabe zu Biographie und Werk:***

Proklos, Eucl. El. p. 68, 6 – p. 69, 7 Friedlein (Auszug)

Οὐ πόλυ δὲ ᾿τούτων ‹μαθητῶν τοῦ Πλάτωνος› νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμε­νος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών. Γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· (...) καί φασιν ὅτι Πτο­λεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν, εἴ τίς ἐστιν περὶ γεωμετρίαν ὁδὸς συντομωτέρα τῆς στοι­χειώσεως· ὁ δὲ ἀπεκρίνατο, μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν. Νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους. Οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥς πού φησιν Ἐρατοσθένης. Καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστή­σατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν. Πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καί ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά. (...) Διαφερόντως δ' ἄν τις αὐτὸν ἀγασθείη κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχείωσιν τῆς τάξεως ἕνεκα καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ στοιχεῖα πεποιημένων θεω­ρημάτων τε καὶ προβλημάτων.

Στοιχεῖα ("Elemente")

Vorbemerkungen

• Aufbau: Definitionen, Postulate, Axiome, Problemata, Theoremata, Porismata (Folgerungen), Lemmata (Hilfssätze)

• sehr starke geometrische Orientierung

• fehlende Algebra (von den Arabern erfunden)

• Exaktheit des Aufbaus

• bis heute gültige Terminologie.

Auswahl der Texte (alle aus dem 1. Buch)

• Die Definitionen, Postulate und Axiome

• Beweisschema anhand eines Problema; ein weiteres Problema, ein Theorema

• Satz von Pythagoras (Theorema).

Begründung der Euklid-Lektüre

• axiomatischer Aufbau der Mathematik

• exakte Wissenschaft (teilweise bis heute gültig!)

• Wirkung bis ins Mittelalter und in die Neuzeit

• Terminologie (u.a. auch) ins Deutsche übernommen

• Lektüre bekannter Sätze im Original

• logische Struktur der griech. Sprache (v.a. Konnektoren); Griechisch als Wissenschafts-  
sprache.

Geometrie (Στοιχεῖα, 1. Buch)

Definitionen: OPOI Kommentar:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α' | Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. | | | | *Punkt* |
| β' | Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές. | | | | *Linie* |
| γ' | Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα. | | | | *Begrenzung der Linie*: keine neue Definition, sondern Verknüpfung zwischen α'. und β'. |
| δ' | Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. | | | | *Gerade, Strecke*; sprachlich schwierig und auch umstritten: ἐξ ἴσου bedeutet ”in gleicher Wei­se”. Sinn der Definition: Eine Gerade ist in al­len Punkten gleich, kein Punkt ist durch Asym­metrie hervorgehoben. Moderne Definition: Eine Gerade ist die kürze­ste Verbindung zwischen 2 Punkten. |
| ε' | Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. | | | | *Fläche* |
| ς' | Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί. | | | | *Begrenzung der Fläche*: keine neue Definition, sondern Verknüpfung zwischen ε'. und β'. |
| ζ' | Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. | | | | *Ebene*; vgl. δ'. |
| η' | Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας (τῶν γραμμῶν) κλίσις. | | | | *Winkel zwischen beliebigen Kurven; s. θ'* |
| θ' | Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, "εὐθύγραμμος" καλεῖται ἡ γωνία. | | | | *Winkel*; Winkel werden heute nur noch mit Ge­raden (bei Kurven mit Tangenten) definiert. |
| ι' | Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα "κάθετος" καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. | | | | *Rechter Winkel*: Die Existenz von rechten Winkel in Problema I, 11 bewiesen. |
| ια' | Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς. | | | | *Stumpfer Winkel* |
| ιβ' | Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς. | | | | *Spitzer Winkel* |
| ιγ' | Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας. | | | | *Begrenzung*: πέρας = ὅρος |
| ιδ' | Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπὸ τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον. | | | | *Figur*: Geraden u.Winkel sind ausgeschlossen. |
| ιε' | Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περι­εχόμενον ἣ καλεῖται "περιφέρεια", πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι (πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. | | | | *Kreis*: als Punktmenge definiert:  k = {P | MP = r} |
| ις' | "Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου" τὸ σημεῖον καλεῖται. | | | | *Mittelpunkt* |
| ιζ' | Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον. | | | | *Durchmesser* |
| ιη' | Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. Κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν. | | | | *Halbkreis* |
| ιθ' | Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχό­μενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα. | | | | *Vielecke* |
| κ' | Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς. | | | | *Dreiecke* |
| κα' | Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας. | | | | *Winkel in Dreiecken* |
| κβ' | Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετρά­πλευρα "τραπέζια" καλείσθω. | | | | *Vierecke*; Begriff ”Parallelogramm”, der später immer wieder gebraucht wird, fällt hier nicht, da die Eigenschaft ”parallel” noch nicht defi­niert wurde. |
| κγ' | Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τᾠ αὐτᾠ ἐπι­πέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκά­τερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις. | | | | *Parallelen* |
| Postulate: AITHMATA | | |  | |  |
| Ἠιτήσθω | |  | | |  |
| α' | ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμ­μὴν ἀγαγεῖν. | | | | hier nur die Existenz, die Eindeutigkeit folgt aus Axiom 9. |
| β' | Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν. | | | | Verlängerung einer Strecke |
| γ' | Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γρά­φεσθαι. | | | | Existenz eines Kreises |
| δ' | Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. | | | | Rechte Winkel als Invariante |
| ε' | Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. | | | | sog. ”Parallelenaxiom”, viele vergebliche Ver­suche, dieses Postulat als Theorem zu beweisen (Ptolemaios, Proklos; bis in die Neuzeit). |
| Axiome: KOINAI ENNOIAI | | | |  |  |
| α' | Τὰ τᾠ αὐτᾠ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. | | | | Transitivität der Gleichheit (a = c und b = c ﬁ a = b) |
| β' | Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα. | | | | a = c, b = d ﬁ a + b = c + d |
| γ' | Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα. | | | | a = c, b = d ﬁ a - b = c - d |
| [δ' | Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.] | | | | a ≠ c, b = d ﬁ a + b ≠ c + d |
| [ε' | Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.] | | | | a = b ﬁ 2 · a = 2 · b |
| [ς' | Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.] | | | | a = b ﬁ 0.5 · a = 0.5 · b |
| ζ' | Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. | | | | Kongruentes ist gleich (flächen-) |
| η' | Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστίν. | | | | Ganzes > Teil |
| θ' | Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν. | | | | Keine Fläche zwischen zwei Geraden. Dies trifft nur für die Euklidische Geometrie (die ”normale” Geometrie) zu, in der sphärischen Geometrie (= Geometrie auf der Kugel) um­schliessen zwei Geraden, die nicht gleich sind, immer eine Fläche (nämlich die Fläche zwi­schen zwei Grosskreisen). |

|  |  |
| --- | --- |
|  | allgemeines Beweisschema (das Fettgedruckte ist immer vorhanden) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Πρόβλημα Ι, α'. | Konstruktion eines gleichseitigen Dreieckes |
|  | Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. | i) πρότασις: allgemeine Be­hauptung |
|  | Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ. | ii) ἔκθεσις: Bezeichnung der gegebenen und der gesuch­ten Teile |
|  | Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. | iii) διορισμός: Behauptung mit den bezeichneten Teilen formuliert (Problema: δεῖ; Theorema: λέγω, ὅτι) |
| 5 | Κέντρῳ μὲν τᾠ Α διαστήματι δὲ τᾠ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τᾠ Β διαστήματι δὲ τᾠ ΒΑ κύκλος γεγράφ­θω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃν τέμνουσιν ἀλλή­λους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ. | iv) κατασκευή: Konstruktion des Gesuchten oder von Hilfslinien oder -punkten |
| 10 | Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκ­λου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκα­τέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τᾠ αὐτᾠ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. | v) ἀπόδειξις: Beweis |
| 15 | Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. | vi) συμπέρασμα: Folgerung |
|  | Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευ­ρον συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. | i) |

|  |  |
| --- | --- |
| Πρόβλημα Ι, β'.  (...) | (Eine gegebene Strecke in einen gegebenen Punkt verschieben) |

|  |  |
| --- | --- |
| Πρόβλημα Ι, γ'. | Eine kleinere Strecke von einer grösseren abziehen |

|  |  |
| --- | --- |
| 5  10 | Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.  Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ·  δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.  Κείσθω πρὸς τᾠ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τᾠ Α διαστήματι δὲ τᾠ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.  Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστιν ἴση.  Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Θεώρημα δ'.** | sws,  indirekter Beweis |

|  |  |
| --- | --- |
| 5  10  15 | Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ - ἑκατέραν ἑκατέρᾳ - καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει καὶ τὸ τρίγωνον τᾠ τριγώνῳ ἴσον ἔσται καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσον­ται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.  Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην.  Λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τᾠ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσον­ται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνου­σιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. |

|  |  |
| --- | --- |
| 20  25  30  35 | Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ ση­μεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρ­μοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γω­νίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ ση­μεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. Εἰ(!!) γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτᾠ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.  Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δύο πλευ­ραῖς ἴσας ἔχῃ - ἑκατέραν ἑκατέρᾳ - καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει καὶ τὸ τρίγωνον τᾠ τριγώνῳ ἴσον ἔσται καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτεί­νουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. |

Satz von Pythagoras Θεώρημα μζ'.

Proklos p. 426, 6 – 9 Friedlein:

”Wenn wir auf diejenigen hören, die das Alte erforschen wollen, kön­nen wir solche finden, die dieses Theorem auf Pythagoras zurückfüh­ren und die sagen, dass er bei der Entdeckung einen Stier geopfert habe.”

Pythagoras soll also einen Stier geopfert haben für die Entdeckung (und den Beweis?) dieses Satzes.

Proklos spricht im folgenden seine Bewunderung auch für Euklid aus.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5 | Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις  τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον  ἴσον ἐστὶ  τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.  Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν·  λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ,ΑΓ τετραγώνοις. | Voraussetzung für den Be­weis: Scherung (in Theorema μα').  Satz stammt sicher von Py­thagoras, dieser wird ihn je­doch vom Orient her über­nommen haben; zusammen mit dem Satz kommt natür­lich auch die Existenz des Ir­rationalen (insbes. von √2) in den Bereich der Griechen. |

|  |  |
| --- | --- |
| 10  15  20  25  30  35 | Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τᾠ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τᾠ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστιν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρί­γωνον τᾠ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ [ἐστὶ] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμ­μον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. [Τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τᾠ ΗΒ τετραγώνῳ. Ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τᾠ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετρα­γώνοις ἴσον ἐστίν. Καί ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.  Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετρα­γώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. |

Wörter

Wörter in Anführungszeichen (” ”) sind Lehnübersetzungen.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Lern- | Wörter | Nichtlern- | Wörter |

Proklos

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| τὸ στοιχεῖον | Buchstabe; Element | συνάγω | verfassen |
|  |  | συντάσσω | ordnen |
|  |  | τελεόω | vollenden |
| μαλακός | weich, sanft; nachlässig |  |  |
| τοῖς ἔμπροσθεν | Dat. auctoris!! | ἀνέλεγκτος | unwiderlegbar |
| ἡ ἀπόδειξις | Beweis | ἐπιβαλών | darauf |
|  |  | σύντομος | kurz |
|  |  | ἡ ἀτραπός | Weg |
|  |  | ἡ προαίρεσις | wissenschaftliche Rich­tung, Gesinnung |
|  |  | τέλος προίστημι | als Ziel festlegen |
| τὸ σχῆμα, ατος | Haltung; Gestalt, math. Figur |  |  |
| συν-ίστημι ἡ σύ-στασις | konstruieren Konstruktion | διαφερόντως | besonders |
|  |  | ἡ ἐκλογή | Auswahl |
| τὸ θεώρημα | Satz (math. Aussage) |  |  |
| τὸ πρόβλημα | Aufgabe, Konstruktion |  |  |

Geometrie

Definitionen

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| α' | τὸ σημεῖον | Zeichen; math. Punkt |  |  |
|  | οὐθέν | = οὐδέν |  |  |
| β' | ἡ γραμμή | Linie |  |  |
|  | τὸ πλάτος | Breite | ἀ-πλατής, ές | ohne Breite |
|  | τὸ μῆκος | Ausdehnung, Länge; Breite |  |  |
| γ' | τὸ πέρας | Ende |  |  |
| δ' | ἡ εὐθεῖα (γραμμή) | ”Gerade” | ἐξ ἴσου τινί | in gleicher Weise in bezug auf etw. |
| ε' | ἡ ἐπιφάνεια | Erscheinung; Aussenseite; math. Fläche |  |  |
| ζ' | ἐπίπεδος, ον | eben |  |  |
|  | ἡ ἐπίπεδος (ἐπιφά­νεια) | Ebene |  |  |
| η' | ἡ γωνία | ”Winkel” |  |  |
|  | ἅπτομαί τινος | sich berühren -> sich schneiden |  |  |
|  | ἐπ' εὐθείας | in der Verlängerung |  |  |
| θ' |  |  | εὐθύγραμμος, ον | ”geradlinig” |
| ι' | ἐφεξῆς | aufeinander folgend |  |  |
|  | ὀρθὴ γωνία | ”rechter Winkel” |  |  |
|  | ἡ κάθετος < καθίημι | Lot, Senkblei; math. ”Kathete”: (heruntergelas­sen ->) senkrecht zu |  |  |
| ια' |  |  | ἀμβλύς, εῖα, ύ | ”stumpf”; stumpf, schwach, stumpfsinnig |
| ιβ' | ὀξύς, εῖα, ύ | ”spitz”; scharf,  heftig, scharfsinnig |  |  |
| ιδ' | τὸ σχῆμα, ατος | Haltung; Gestalt,math.Figur |  |  |
| ιε' | ὁ κύκλος | Kreis |  |  |
|  | ἡ περιφέρεια | ”Peripherie”, Umfang | ἐντός beim Gen. | innerhalb |
| ις' | τὸ κέντρον | Stachel; math. Mittelpunkt, ”Zentrum” |  |  |
| ιζ' |  |  | ἡ διάμετρος | ”Durchmesser” |
|  | εὐθεῖαν ἄγω | eine Gerade ”ziehen” | δίχα | entzwei |
| ιθ' | ἡ πλευρά τρί-πλευρος, ον | Seite, Flanke ”dreiseitig” |  |  |
| κ' | ἰσό-πλευρος, ον | ”gleichseitig” |  |  |
|  | τὸ τρί-γωνον | "Dreieck" |  |  |
|  | τὸ σκέλος ἰσο-σκελής, ες | Schenkel; Bein ”gleichschenklig” | σκαληνός, ον | schief |
| κα' | ὀρθο-γώνιος, ον | ”rechtwinklig” | ἀμβλυγώνιος, ον | ”stumpfwinklig” |
|  |  |  | ὀξυ-γώνιος, ον | ”spitzwinklig” |
| κβ' | τὸ τετρά-γωνον | Quadrat | τὸ ἑτερό-μηκες | Rechteck |
|  | ὁ ῥόμβος | ”Rhombus” |  |  |
|  | τὸ ῥομβο-ειδές | Parallelogramm | ἀπεναντίον | gegenüberliegend |
|  | -σθω | s. unten ”Postulate”, Anfang |  |  |
| κγ' | παράλληλος, ον | ”parallel” |  |  |
|  | ἐκβάλλω | verlängern |  |  |

Postulate

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | αἰτέω | bitten, fordern |  |  |
| oft | -τω, -σθω -ντων, -σθων -τωσαν | Imperat. 3.Sg. A, MP Imperat. 3.Pl. A, MP Imperat. 3.Pl. A (spät) |  |  |
| β' | περαίνω (τὸ πέρας) | beenden, math. begrenzen | κατὰ τὸ συνεχές | unaufhörlich |
| γ' | τὸ διάστημα | Abstand, Radius |  |  |

Axiome

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ε' | διπλάσιος, ον | doppelt |  |  |
| ζ' |  |  | τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα | kongruierend |
| θ' |  |  | τὸ χωρίον | Fläche |

*Beweisschema*

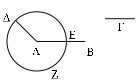
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Problemata | |  |  |  |
| α' | δοθείς, θεῖσα, θέν | ”gegeben” |  |  |
|  | τέμνω κατά τι | in etw. ”schneiden” | ἐπιζεύγνυμι | verbinden; math. eine Verbindungslinie ziehen |
| Theoremata | |  |  |  |
| δ' | ὑποτείνω (ὑπό) τι | einem Winkel gegenüber­liegen (vgl. ”Hypotenuse”) |  |  |
|  | ὑπό ΑΒΓ | Winkel ΑΒΓ |  |  |
|  | ἐφαρμόττω/ζω | trans.: anpassen;   math. auf etw. legen  intr.: auf etw. fallen, math. kongruieren |  |  |

Satz von Pythagoras

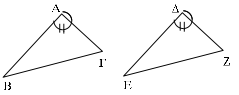
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| μζ' |  |  | τὸ ἀπὸ πλευρᾶς τετράγωνον | das von einer Seite aufgespannte Quadrat, das Quadrat über einer Seite |
|  |  |  | ἀναγράφω | konstruieren |
|  |  |  | ἐπιζεύγνυμι | verbinden; math. eine Verbindungslinie ziehen |

Skizzen

Problema I, α'  


Problema I, γ'  


Theorema I, δ'



Theorema I, μζ'  
