

# Ein Kartentrick – was steckt dahinter?

## Hinweise für die Lehrperson

Bei dieser Unterrichtseinheit geht es darum, einen Kartentrick aus verschiedenen Gesichtspunkten zu beleuchten. Die Schüler erleben, erlernen und erweitern einen interessanten Kartentrick.

Den Lernenden steht ein Programm zur Simulation des Kartentricks zur Verfügung. Damit die Lernenden eigene Entdeckungen machen können, müssen sie den Trick beherrschen. Das Programm gibt ihnen die Möglichkeit, den Trick in kurzer Zeit zu erlernen.

Diese Unterrichtseinheit wurde durch folgende Publikation inspiriert: S. Simonson and T. A. Holm: Using a card trick to teach discrete mathematics. Erhältlich im Internet auf <http://math.berkeley.edu/~tsh/Papers/cardTrick.pdf>.

## Bezug zum Mathematikunterricht

Von den Schülern wird in dieser Unterrichtseinheit konsistentes Argumentieren und stichhaltiges Begründen verlangt. Zwei wichtige Aspekte, die im guten Mathematikunterricht nicht fehlen dürfen.

## Voraussetzungen

Das Thema erfordert kein spezielles Vorwissen. Kenntnisse in der Kombinatorik können bei dieser Unterrichtseinheit angewendet werden, sind jedoch nicht notwendig.

## Materialien/Infrastruktur

- Programm zur Simulation des Kartentricks. Damit das Programm gestartet werden kann müssen folgende Punkte beachtet werden:
  - Java Runtime Environment (ab Version 1.4) muss installiert sein. Weitere Informationen sowie benötigte Software unter <http://java.sun.com>.
  - Das Programm ist in einer .jar-Datei abgelegt. Ein Doppelklick auf die Datei CardGame.jar startet das Programm.
- Die Schüler sollen je einen Kartensatz (Jass- oder Bridgekarten) für eigene Versuche mitbringen.

## Ablauf

- |              |  |
|--------------|--|
| 10 Min.      | Vorführung des Tricks durch die Lehrperson                                     |
| 15 Min.      | Die Schüler halten ihre Vermutungen schriftlich fest (~3 Stk.)                 |
| 45 – 60 Min. | Die Schüler lesen die Anleitung und lernen den Kartentrick am Computer         |
| 15 Min.      | Die Schüler halten Begründung für bewahrheitete Vermutungen/ Wiederlegung fest |
| 45 Min.      | Die Schüler machen sich Gedanken über den Trick und notieren diese             |

## **Hinweise zum Ablauf**

Zu Beginn führt die Lehrperson zusammen mit einer zweiten Person den Trick einige Male vor.

Damit der Trick wirkt müssen diese zwei Personen den Trick beherrschen! Denn es geht auch hier darum, das Publikum zu täuschen: Beispielsweise indem der Assistent die Karten nach einem bestimmten Muster oder möglichst unauffällig auf den Tisch legt. (Wichtig ist nur die Einhaltung der Reihenfolge.)

### **• Erster Schritt – Vermutungen formulieren**

Hier geht es darum, dass die Schüler den Trick erleben und erste Gedanken dazu notieren. Die Schüler sollen z.B. merken, dass bei einem Zaubertrick nicht nur der eigentliche Trick eine wichtige Rolle spielt, sondern auch die Vortragsweise. Ausserdem bilden diese Gedanken und Vermutungen erste Ausgangspunkte für ihre spätere Entdeckungen.

#### **Mögliche Vermutungen/Entdeckungen**

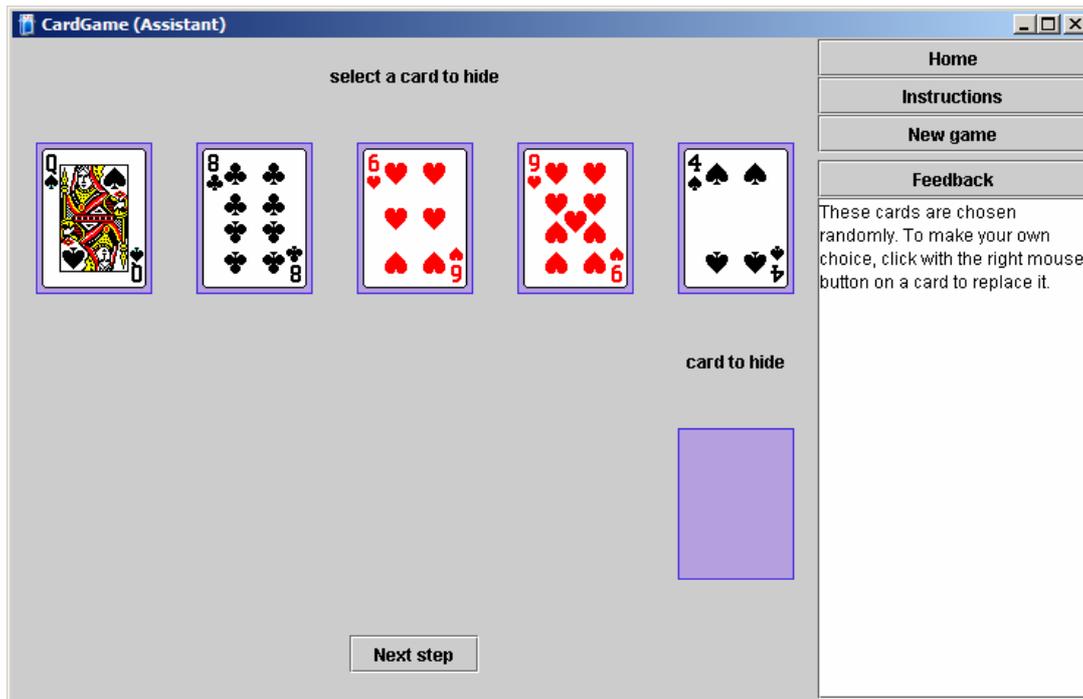
- Die Art, wie der Assistent die Karten auf den Tisch legt spielt eine Rolle.
- Die Wahl der Karte, die versteckt werden soll spielt eine Rolle.
- Es muss einen versteckten Kanal geben, mit dem der Assistent dem Zauberer die versteckte Karte mitteilt.
- Die Reihenfolge der dem Zauberer überlassenen Karten spielt eine Rolle.
- Der ganze Kartenstapel wurde im Voraus speziell sortiert.
- ...

### **• Zweiter Schritt – Anleitung und Simulation**

Zu diesem Zeitpunkt erhalten die Schüler die Anleitung zum Trick. Mit Hilfe des Programms können sie den Trick schneller lernen.

#### **Hinweise zum Programm**

Beim vorgestellten Kartentrick sind drei Parteien involviert: Der Zauberer, sein Assistent und das Publikum. Im Programm kann der Schüler die Rolle des Zauberers oder des Assistenten einnehmen. Nachfolgend ist der Bildschirm für die Assistenten-Rolle abgebildet. Die Karten werden zu Beginn eines Spiels zufällig ausgewählt. Jede Karte kann durch einen Klick mit der rechten Maustaste beliebig ersetzt werden. Unter „Instructions“ kann eine Anleitung des Tricks abgerufen werden.



### • **Dritter Schritt – Begründungen und Entdeckung**

Sobald die Schüler den Trick beherrschen, überdenken sie ihre Vermutungen/ Beobachtungen aus dem ersten Schritt.

#### **Mögliche Begründungen**

- *Vermutung:* Die Art, wie der Assistent die Karten auf den Tisch legt spielt eine Rolle.  
*Begründung:* Mit der Reihenfolge der Karten kann der Assistent die versteckte Karte codieren. Das Publikum kann aber auch damit getäuscht werden, indem die Karten beispielsweise in einem bestimmten Muster abgelegt werden.
- *Vermutung:* Die Wahl der Karte, die versteckt werden soll spielt eine Rolle.  
*Begründung:* Nicht jede Karte in der Auswahl kann durch die restlichen Karten codiert werden. Eine Einschränkung ist etwa, dass es mindestens noch eine Karte der gleichen Farbe geben muss.
- *Vermutung:* Es muss einen versteckten Kanal geben, mit dem der Assistent dem Zauberer die versteckte Karte mitteilt.  
*Begründung:* Es gibt keinen versteckten Kanal. Dieser ist auch nicht nötig, da alle nötigen Informationen in der Reihenfolge der Karten codiert werden können.
- *Vermutung:* Die Reihenfolge der dem Zauberer überlassenen Karten spielt eine Rolle.  
*Begründung:* Alleine damit kann der Assistent dem Zauberer mitteilen, welche Karte er versteckt hat.
- *Vermutung:* Der ganze Kartenstapel wurde im Voraus speziell sortiert.  
*Begründung:* Diese Aussage trifft nicht zu, da die fünf Karten zufällig ausgewählt werden können und aus diesen Karten immer eine Karte durch die restlichen vier Karten codiert werden kann.
- ...

## Entdeckungsphase

Anschliessend machen sich die Schüler eigene Überlegungen zum Trick. Dieser Teil ist bewusst offen gehalten; die Schüler sollen ihren Gedanken freien Lauf lassen und dabei möglichst viel entdecken.

### Mögliche Erkenntnisse:

- **Jede Farbe hat 13 Karten.** Wird eine von diesen Karten versteckt, so verbleiben 12. Da wir zwischen zwei Karten der selben Farbe wählen können müssen wir höchstens einen Abstand von 6 codieren, was wir genau mit drei Karten erreichen können.
- Das **Jasskartenspiel** besteht aus 36 Karten, also 9 Karten pro Farbe. Somit müssten Zahlen von eins bis vier codiert werden. Eine Möglichkeit wäre, analog zum bekannten Kartentrick vorzugehen: bei den verbleibenden zwei Karten, die zur Codierung beitragen eins statt drei addieren, falls diese absteigend geordnet sind.
- Eine mögliche **Codierung mit fünf statt vier Karten** könnte folgendermassen aussehen: Die Karte, die bei der vorgestellten Codierung an erster Stelle steht wird nun direkt nach der höchsten Karte in der Auswahl gelegt. Die höchste Karte dient also nur dazu anzugeben, wo sich die Karte mit der Farbe der versteckten Karte befindet. Die restlichen Karten werden analog zum vorgestellten Trick gelegt.
- Wenn das Spiel nur aus **drei Farben** besteht, müssen nur vier Karten zufällig ausgewählt werden. Denn dann ist wieder garantiert, dass mindestens zwei Karten die selbe Farbe haben. Werden die zwei gleichfarbigen Karten wieder für den selben Zweck verwendet (eine wird versteckt, die andere weist den Zauberer auf die Farbe hin), so verbleiben noch zwei Karten. Damit lassen sich lediglich zwei Zahlen codieren, die Anzahl Karten pro Farbe ist also auf fünf beschränkt. Das ganze Spiel würde so also 15 Karten enthalten.
- Wenn das Spiel aus **fünf Farben** besteht, so müssen sechs Karten zufällig ausgewählt werden, damit sicher zwei Karten die selbe Farbe haben. Eine Karte wird versteckt, es bleiben fünf Karten für die Codierung. Nimmt man von diesen fünf Karten eine zum Anzeigen der Farbe, so kann die Reihenfolge der vier verbleibenden Karten gewählt werden. Mit diesen Karten lassen sich also  $4! = 24$  Zahlen codieren. Theoretisch könnte damit jede Farbe 49 Karten haben, was nicht praktikabel ist, da sich nur schon die Codierung schwierig gestalten dürfte.
- ...

## Hinweise zur Bewertung der Leistungen der Schüler

Zu bewerten sind die Begründungen der Vermutungen der Schüler und ihre Überlegungen/ Entdeckungen. Die Schüler sollten drei Beobachtungen/Vermutungen formulieren und begründen. Zudem sollen sie drei Erkenntnisse festhalten, die sie aufgrund der Lenkungsanregung entdeckt haben.

Bewertung der einzelnen Erkenntnisse/Begründungen:

- Die Erkenntnisse/Begründungen sind plausibel.
- Falsche Aussagen der Schüler sollen nicht berichtigt werden. Die Lehrperson soll beschreiben, was am Gedankengang nicht logisch war.

- Für jede plausible Begründung kann ein Punkt vergeben werden, für jede plausible Erkenntnis zwei Punkte. Nicht korrekte Erkenntnisse ergeben einen Punkt, falls der Ansatz eine plausible Erkenntnis zulässt.
- Originelle Ideen/Erkenntnisse können mit Zusatzpunkten belohnt werden.