Gruppenunterricht zum Thema

Routing-Algorithmen

Fach:	Informatik oder Elektrotechnik
Schultyp:	HTL, Weiterbildungskurse in Informatik/Kommunikationsnetze
Schulstufe:	Grundkurs Kommunikationsnetze
Vorkenntnisse:	Algorithmisches Denken
Bearbeitungsdauer:	1 Doppellektion
Autoren:	**Urs Röthlisberger** **Armin Wittmann**
Betreuer:	Dr. Werner Hartmann
Fassung vom:	24. September 1994
Schulerprobung:	2x

Einführung

Reist eine Person im Alltag von A nach B, so wird sie sich automatisch überlegen, mit welchen Transportmitteln (Auto, Bus, Bahn, Tram, Flugzeug etc.) sie diese Strecke zurücklegen will. Dabei überlegt sie sich immer, wie sie optimal bezüglich Kosten, Zeit, Gefahr etc. dorthin gelangt.
Dieses Verhalten ist in der Computerwelt nicht anders. In der heutigen vernetzten digitalen Welt müssen Datenpakete, Files und Meldungen in einem komplizierten Geflecht von verschiedenen Datenkanälen (Telefon-, Koaxial- und Glasfaserleitungen sowie Funk- und Richtstrahlstrecken) ihren Weg finden. Diese Wegbereitung und die Optimierung für die Auswahl des Weges ist zumeist die Aufgabe der Netzwerkbetreiber. Sie garantieren für eine zuverlässige, kostengünstige und zeitlich vertretbare Uebermittlung der Datenpakete. Wie diese Wege ausgewählt werden, ist das Thema der nächsten zwei Stunden.

Sie erarbeiten eines der vier hier vorgestellten Verfahren. Die anderen drei werden Ihnen von den Kolleginnen und Kollegen gezeigt. Ihre Lehrerin oder Ihr Lehrer weist Ihnen ein Verfahren zu.

Nach zwei Stunden haben Sie das Prinzip der vier Verfahren verstanden und sind in der Lage, diese an verschiedenen Beispielen anzuwenden.

Arbeitsanleitung

Die vier Routing-Algorithmen werden von je einer Gruppe erarbeitet. Es geht nun wie folgt weiter:

1. Wissenserwerb

Sie bearbeiten die Arbeitsanleitung Ihrer Gruppe einzeln.
Lesen Sie in Ruhe die Arbeitsblätter durch. Versuchen Sie herauszufinden, nach welchen Regeln die Pfade gesucht und gefunden werden. Wenn Sie die Regeln herausgefunden haben, lösen Sie die Kontrollaufgaben im Abschnitt "Kontrollaufgaben für das Selbststudium".

(Zeit: 20')

2. Expertenrunde

Sie besprechen in Ihrer Gruppe, wie Sie das Wissen weitergeben wollen. Dazu lesen Sie zuerst das Blatt "Mini-Didaktik".

(Zeit: 20')

3. Unterrichtsrunde

Jetzt sind Sie der Experte. Sie unterrichten in der neuen Gruppe die Mitschülerinnen und Mitschüler und bringen Ihnen Ihren Routing-Algorithmus bei.

(Zeit: je 6' Unterricht + 4' Zeit für Fragen der Mitschüler)

Die schnellste Zugverbindung

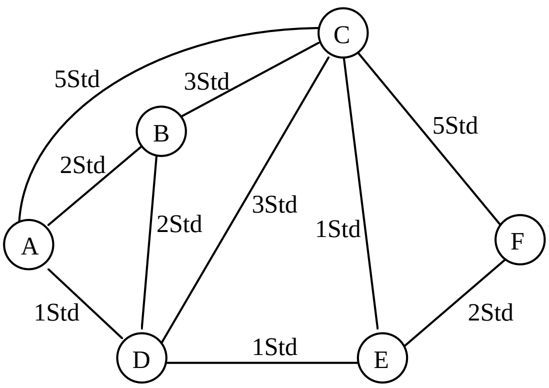
Sie müssen eine Zugreise vorbereiten. Die Fahrt ins Blaue startet Morgen ab Ortschaft A. Unmittelbar vor der Abfahrt, entscheidet ein Los wohin die Fahrt gehen soll. Wir wissen allerdings im voraus, dass nur die Ortschaften B, C, D, E und F in Frage kommen. Sie sollen dann gleich die schnellste Zugsverbindung wählen und mit der Reisegesellschaft in den entsprechenden Zug steigen. Sie müssen also heute noch die besten Verbindungen (Fahrstrecken) für jedes mögliche Ziel ausarbeiten, da die SBB nur die Fahrzeiten für direkt verbundene Ortschaften zur Verfügung stellt.

Anleitung für ein methodisches Vorgehen nach Dijkstra [1]

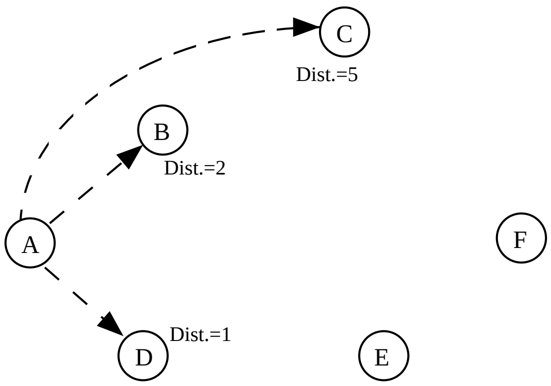
1. Solange wir noch nichts über die Reisezeit zu einem Ort wissen, nehmen wir an, es gehe unendlich lange.
2. Mit jedem Schritt erschliessen wir jeweils einen weiteren angrenzenden Ort: denjenigen der dann am nächsten beim Startort ist.
3. Die Pfade und Distanzen der erschlossenen Orte müssen nun unter Berücksichtigung des neu erschlossenen Ortes möglicherweise angepasst werden.

Beispiel

Die Ausgangslage sieht wie folgt aus.

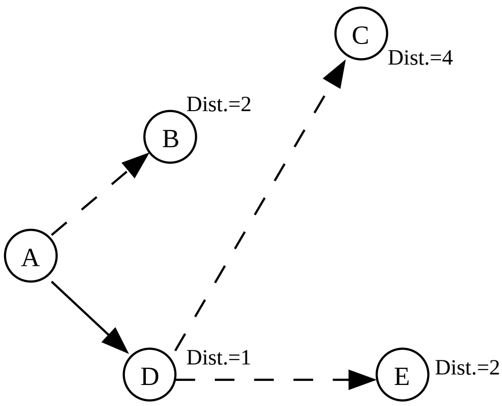


1. Schritt

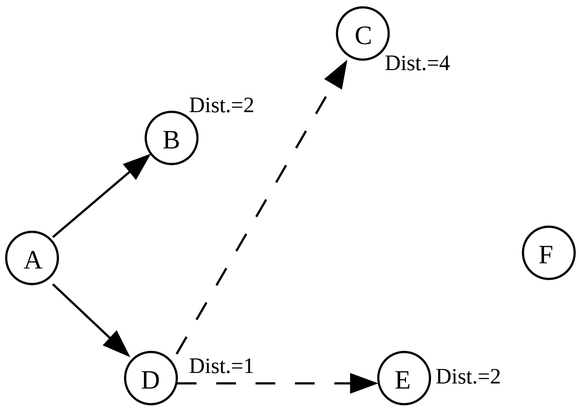


Übrigens: ist ein Ort erschlossen, so ist sein Zuführungspfeil ausgezogen.

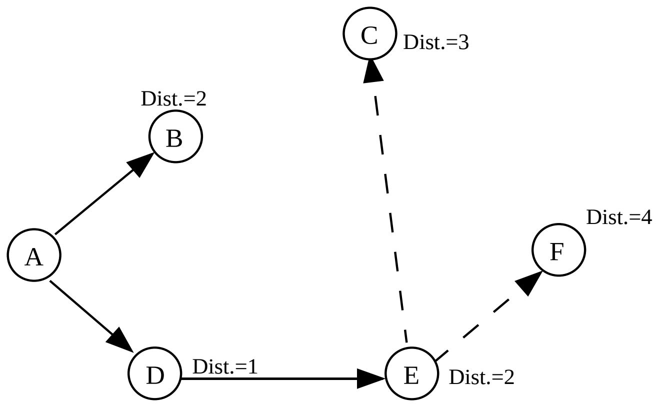
2. Schritt



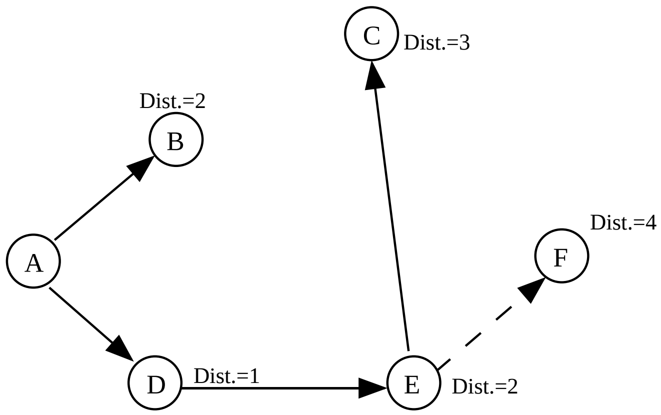
3. Schritt



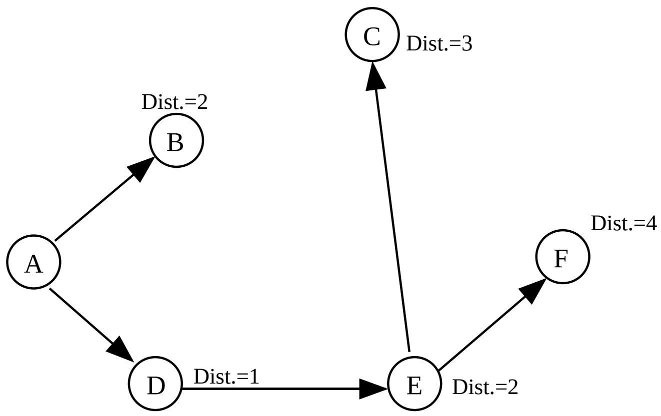
4. Schritt



5. Schritt



6. Schritt



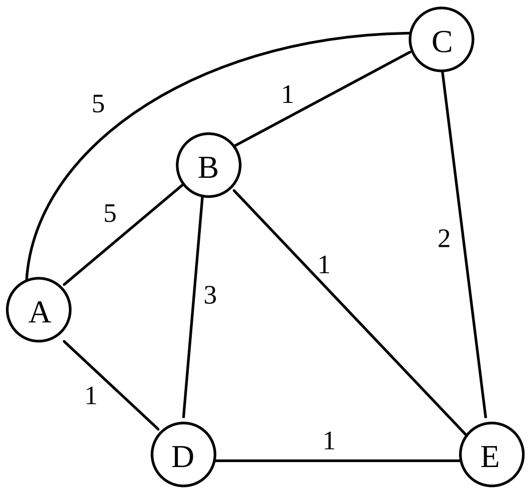
Kontrollaufgaben für das Selbststudium

Finden Sie heraus nach welchen Regeln der Algorithmus die Pfade sucht und zusammenstellt. Dann lösen Sie die nachfolgenden Kontrollaufgaben .

Aufgabe 1
Nach welchen Kriterien werden die Strecken und Orte ausgewählt, welche bei einem Schritt in Betracht bezogen (d.h. verglichen) werden ?

Aufgabe 2
Formulieren Sie den Algorithmus mit eigenen Worten. Brauchen Sie dabei fünf bis zehn kurze Sätze!

Aufgabe 3
Erarbeiten Sie nach Ihren gefundenen Regeln den Fahrplan für den nachfolgenden Graphen. Zeichnen Sie dabei jeden Schritt auf!



Gruppe 1: Lösungen

Aufgabe 1

Für einen neuen Schritt betrachtet man jene Orte und Strecken, welche durch eine einzige Verbindungsstrecke von den bereits berücksichtigten Orten ausgehen.

Aufgabe 2

1. Anweisung

Nur der Startpunkt selbst gilt am Anfang als erschlossen.

2. Anweisung

Für einen neuen Schritt betrachtet man jene Orte und Strecken, welche durch eine einzige Verbindungsstrecke von den bereits erschlossenen Orten ausgehen. Man sucht unter den so gefundenen neuen Orten denjenigen, der die kürzeste Distanz zum Startort hat. Dieser eine Ort gilt nun auch als erschlossen. Seine Distanz zum Startort wird hingeschrieben und der zuführende Pfeil ist ausgezogen dargestellt.

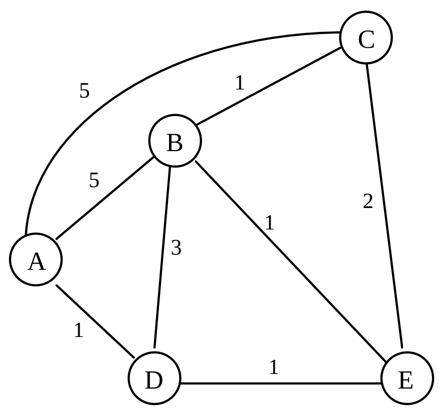
3. Anweisung

Man berechnet nun erneut die kürzeste Verbindung für jeden noch nicht erschlossenen Knoten. Es gibt jeweils nur 2 Möglichkeiten: es bleibt für den betrachteten Knoten alles wie es ist, oder aber, seine Distanz zum Startort ist kürzer via den neu erschlossenen Knoten von *Anweisung 2*. Im letzteren Fall ist dann auch sein kürzester Pfad zum Startort entsprechend anzupassen.

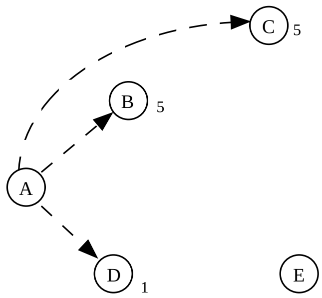
Man wiederholt nacheinander die *2.* und die *3. Anweisung* bis alle Orte erschlossen sind.

Aufgabe 3

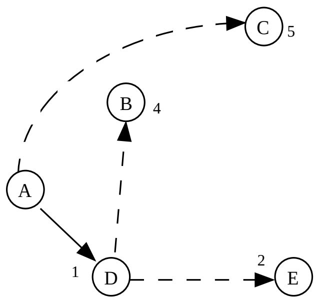
Ausgangslage



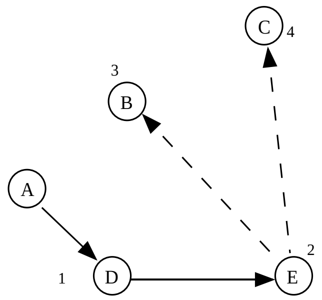
1. Schritt



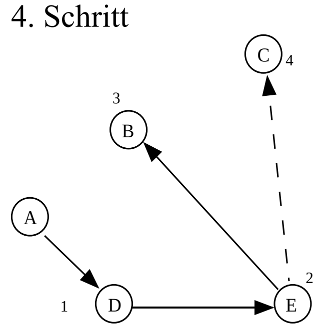
2. Schritt



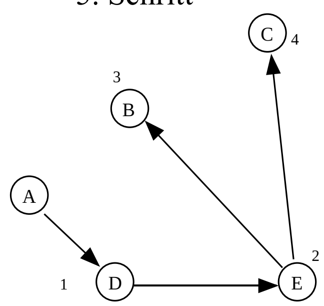
3. Schritt



4. Schritt



5. Schritt



Per Flugzeug in die Ferien (..aber mit beschränktem Umsteigen!)

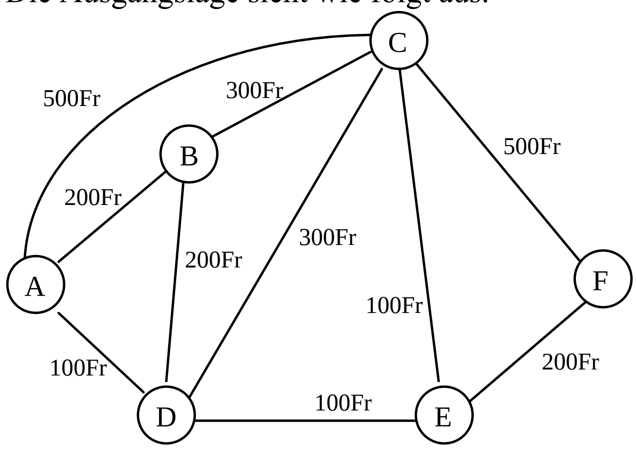
Sie haben bei einem Wettbewerb gewonnen und können eine um 70% verbilligte Ferienreise vorbereiten. Sie können aus den Ferienorten B, C, D, E und F auslesen. Für den definitiven Entscheid wohin Sie fliegen wollen, lassen Sie sich noch Zeit. Die Fluggesellschaften geben nur die Preise für die einzelnen Flugstrecken-Abschnitte an. Sie sollten aber bereits jetzt die günstigsten Flugrouten zu den möglichen Destinationen aussuchen. Der Sponsor der Reise macht Ihnen aber eine Auflage: Bei jedem Zwischenhalt an einem Flugplatz müssen Sie an einer lokalen Werbeveranstaltung teilnehmen.
Da sie vermutlich ohnehin viel Gepäck bei sich haben, interessiert Sie folglich welches die günstigsten Reiserouten sind, falls sie nicht, 1-mal, 2-mal etc. umsteigen wollen.

Anleitung für ein methodisches Vorgehen nach Bellman-Ford [2]

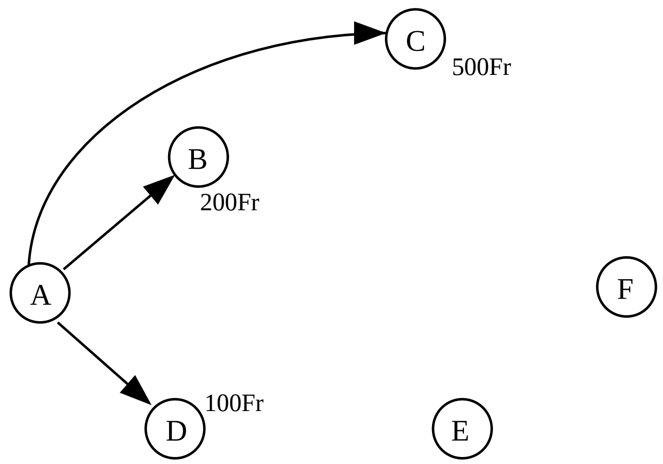
1. Solange wir noch nichts über den gesamten Flugpreis zu einem Ferienort wissen, nehmen wir an, es sei zu teuer.
2. Wir beziehen Ort um Ort schrittweise in unsere Betrachtungen ein (siehe Graphen). Wir schreiben dann gerade zu jedem Ort die entsprechenden Reisekosten hin.

Beispiel

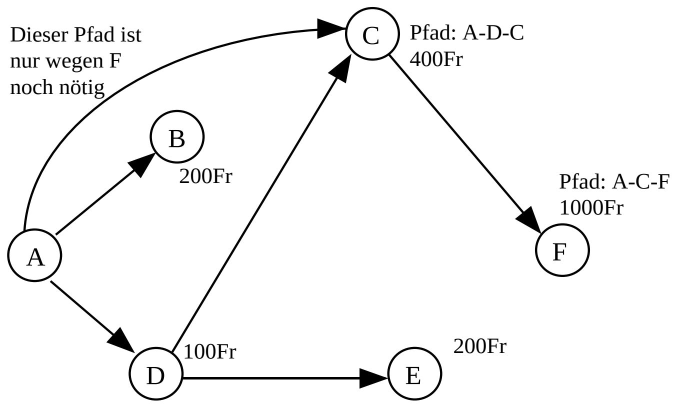
Die Ausgangslage sieht wie folgt aus.



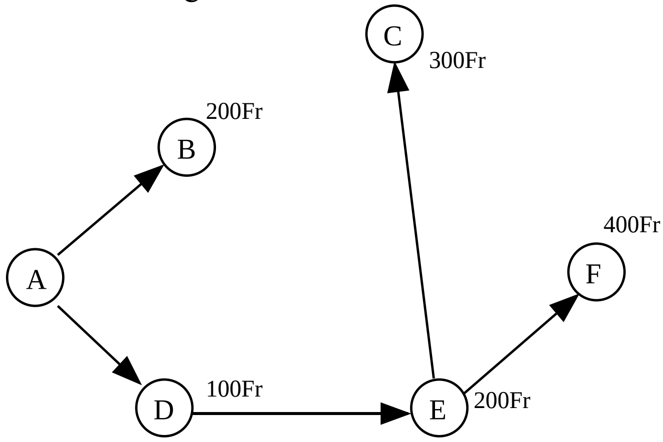
1. Schritt: ohne Umsteigen



2. Schritt: 0- oder 1-mal umsteigen (Nur der günstigere Pfad wird berücksichtigt)



3. Schritt: 0- bis maximal 2-mal umsteigen



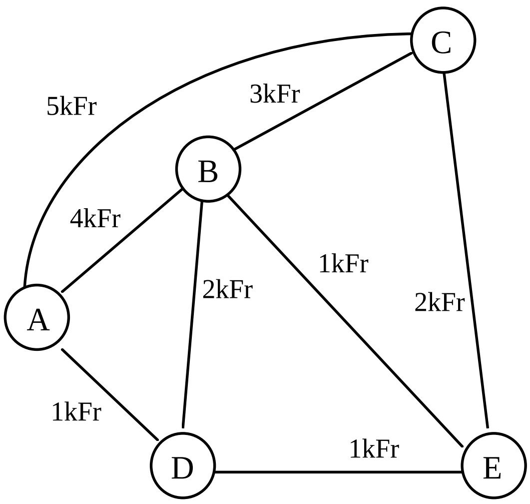
Kontrollaufgaben für das Selbststudium

Finden Sie heraus nach welchen Regeln der Algorithmus die Pfade sucht und zusammenstellt. Dann lösen Sie die nachfolgenden Kontrollaufgaben .

Aufgabe 1
Nach welchen Kriterien werden die Strecken und Orte ausgewählt, welche bei einem Schritt in Betracht gezogen (d.h. verglichen) werden ?

Aufgabe 2
Formulieren Sie den Algorithmus mit eigenen Worten. Brauchen Sie dabei drei bis fünf kurze Sätze!

Aufgabe 3
Erarbeiten Sie nach Ihren gefundenen Regeln den Flugplan für 0-3 faches Umsteigen für den nachfolgenden Graphen. Zeichnen Sie dabei jeden Schritt auf!



Gruppe 2: Lösungen

Aufgabe 1

Für einen neuen Schritt betrachtet man jene Orte und Strecken, welche durch eine einzige Verbindungsstrecke von den bereits berücksichtigten Orten ausgehen.

Aufgabe 2

1. Anweisung

Nur direkt mit dem Startpunkt verbundene Strecken werden im Startschritt berücksichtigt. Man behält für jeden Ort nur noch die kürzeste Strecke und ihren Preis.

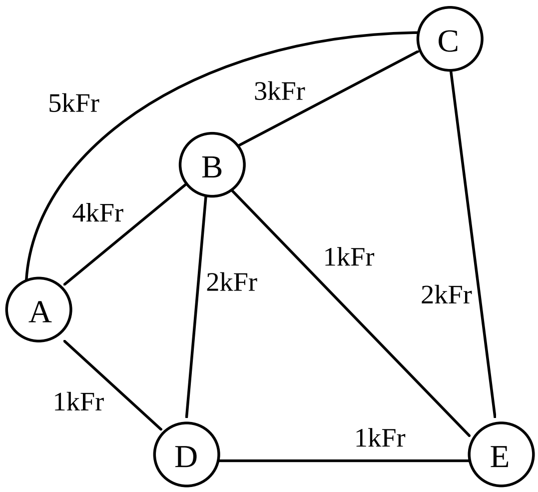
2. Anweisung

Für einen neuen Schritt betrachtet man jene Orte und Strecken, welche durch eine einzige Verbindungsstrecke von den bereits berücksichtigten Orten ausgehen. Man sucht für jeden neu erschlossenen Ort jetzt nur noch die kürzeste Strecke und ihren Preis (dabei reicht es, wenn man nur die kumulierten Strecken und Preise zu den Orten vergleicht, von welchen aus ein neuer Ort erschlossen wurde).

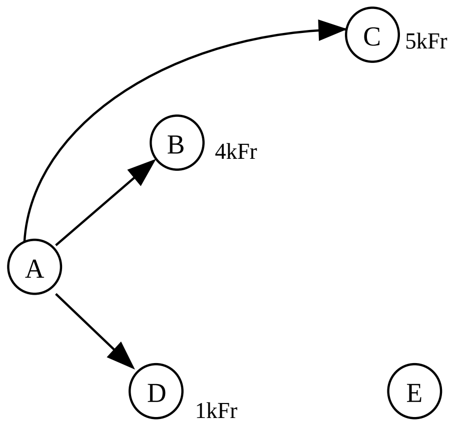
Man wiederholt die *2. Anweisung* bis alle Orte erschlossen sind.

Aufgabe 3

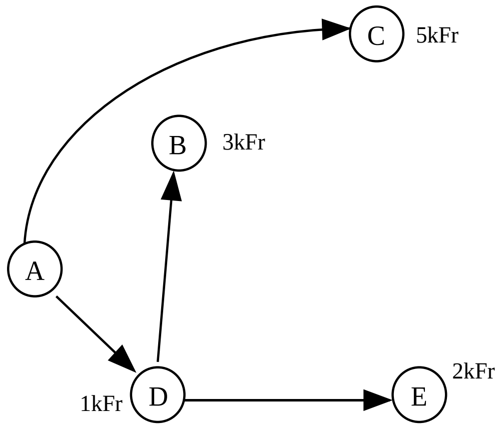
Ausgangslage



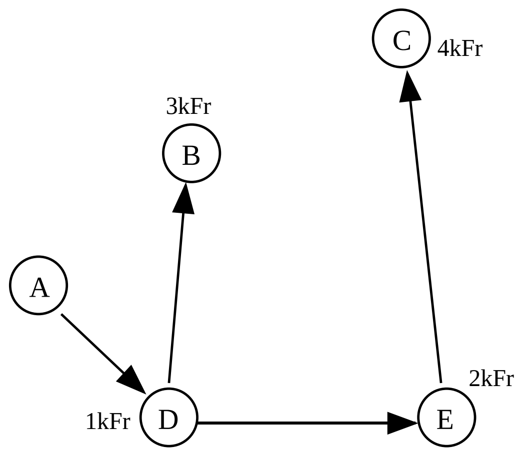
1. Schritt



2. Schritt



3. Schritt



Das hierarchische Bewässerungssystem

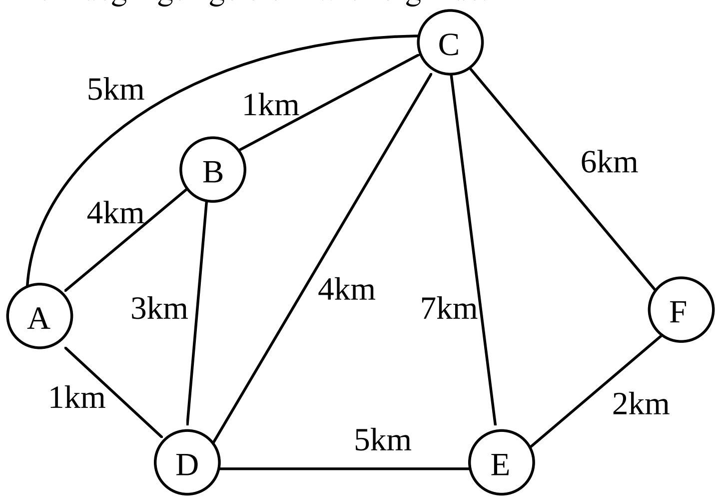
Lieber Ägyptischer Ingenieur: Im Auftrage des Pharaos sollen Sie ein Bewässerungssystem für die grosse Ebene von "Datt el flat" planen. In einem einzigen Garten wird man den enorm tiefen Brunnen bauen müssen. Alle anderen Gärten sind mit Kanälen zu erschliessen. Sie sollen mit der insgesamt kürzest möglichen Kanalstrecke auskommen. Jeder Ort soll dabei nur von einem Kanal beliefert werden.

Anleitung für ein methodisches Vorgehen nach Kruskal [3]

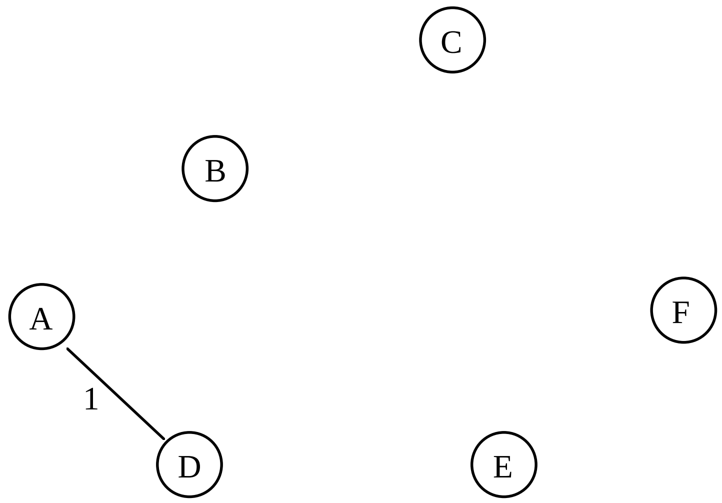
1. Sie suchen die kürzeste noch unberücksichtigte Strecke zwischen zwei Gärten.
2. Den verbindenden Kanal bauen Sie aber nur, wenn die beiden Orte nicht schon über andere Kanäle miteinander verbunden sind.
3. Wenn alle Gärten erschlossen sind, haben Sie es geschafft: Der Pharao wird Sie mit Gold überhäufen und dann den Brunnen an einem Ort seiner Wahl graben lassen.

Beispiel 1

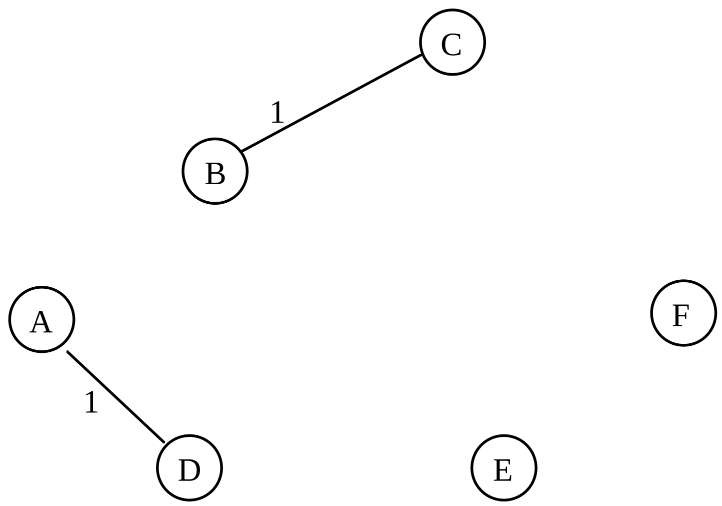
Die Ausgangslage sieht wie folgt aus.



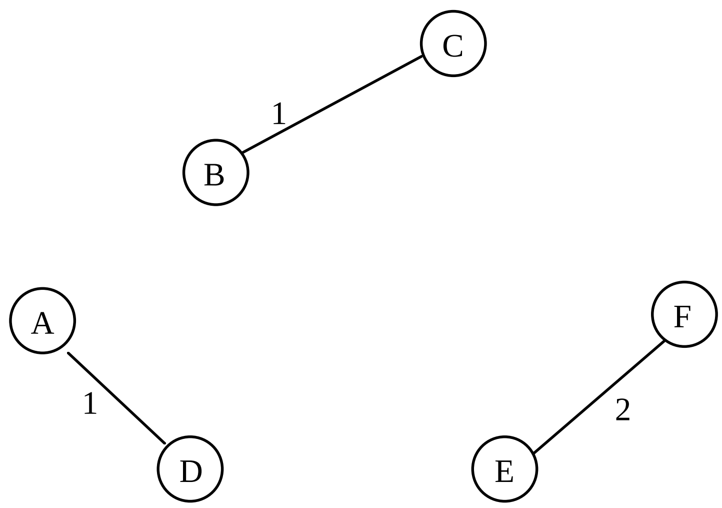
1. Schritt



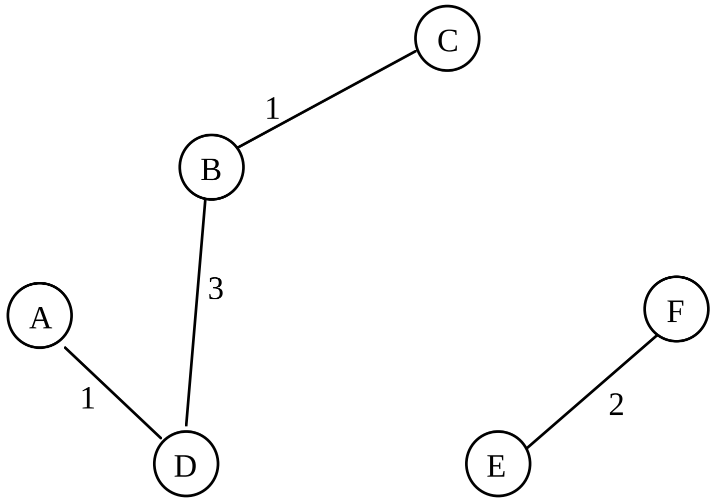
2. Schritt



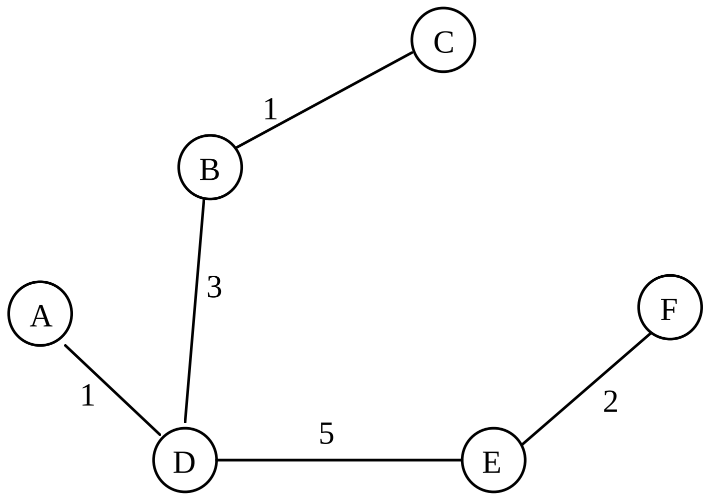
3. Schritt


C
1
B
A
F
1
2
D
E

4. Schritt



5. Schritt



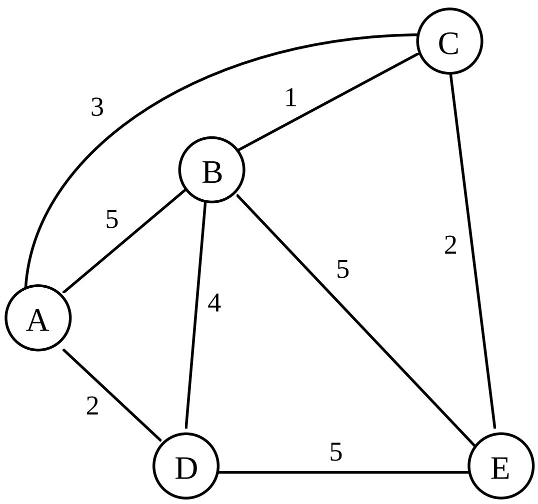
Kontrollaufgaben für das Selbststudium

Finden Sie heraus nach welchen Regeln der Algorithmus die Pfade sucht und zusammenstellt. Dann lösen Sie die nachfolgenden Kontrollaufgaben .

Aufgabe 1
Nach welchen Kriterien werden die Strecken ausgewählt, welche bei einem Schritt in Betracht gezogen werden ?

Aufgabe 2
Formulieren Sie den Algorithmus mit eigenen Worten. Brauchen Sie dabei drei bis fünf kurze Sätze!

Aufgabe 3
Erarbeiten Sie nach Ihren gefundenen Regeln den Bewässerungsplan für den nachfolgenden Graphen. Zeichnen Sie dabei jeden Schritt auf!



Gruppe 3: Lösungen

Aufgabe 1

Für einen neuen Schritt sucht man jene Verbindungsstrecke, welche am kürzesten ist und noch nie betrachtet wurden.

Aufgabe 2

1. Anweisung

Suche jene Verbindungsstrecke, welche am kürzesten ist und noch nie berücksichtigt wurde.

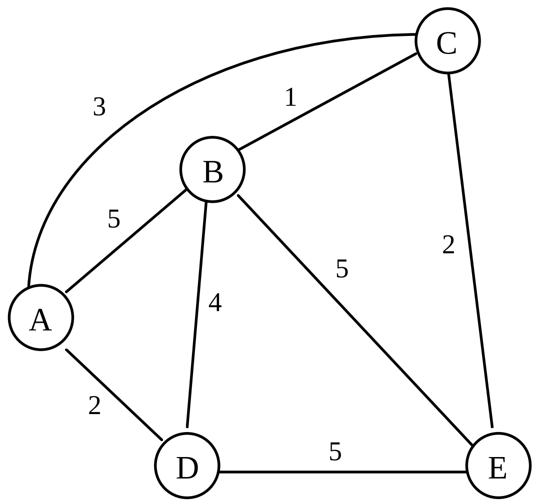
2. Anweisung

Die gefundene Verbindungsstrecke gilt nun als bereits berücksichtigt. Der Kanal wird aber nur gebaut, wenn die beiden zu verbindenden Orte nicht schon zum selben Kanalbaum gehören.

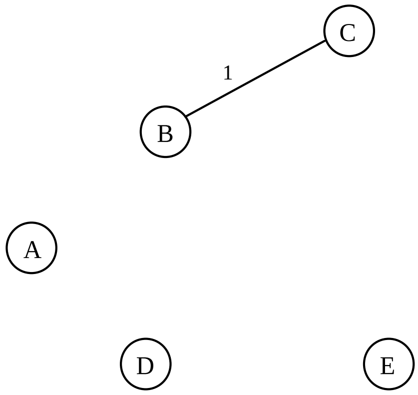
Man wiederholt nacheinander die *1.* und die *2. Anweisun*g bis alle Orte erschlossen sind.

Aufgabe 3

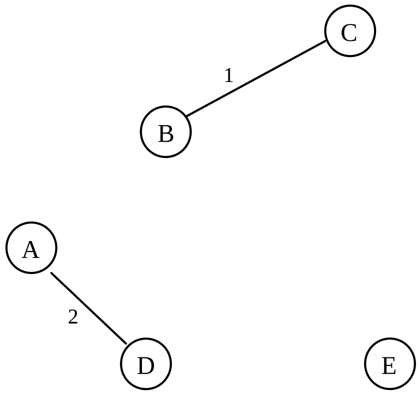
Ausgangslage



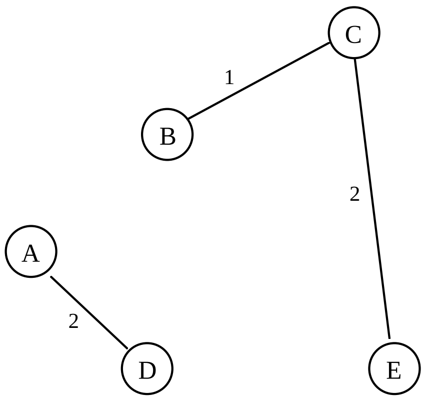
1. Schritt



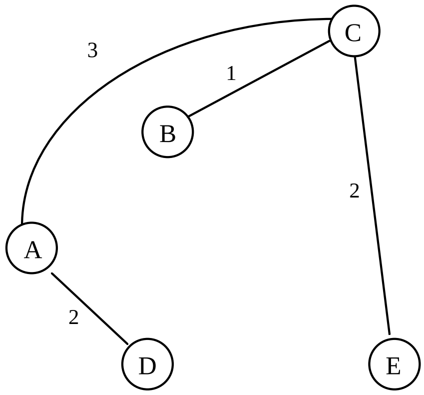
2. Schritt



3. Schritt



4. Schritt



Die hierarchische Oel- Pipeline

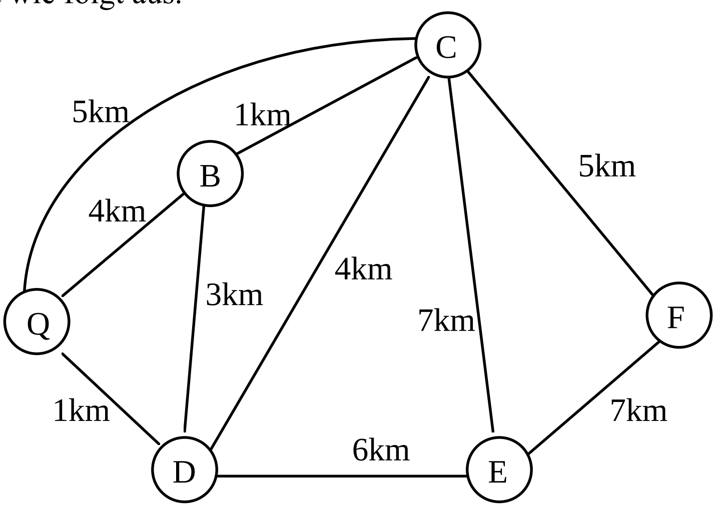
In Saudiarabien sollen Sie eine grosse Oel-Pipeline für die Ebene von "Cam El Flat" planen. Ausgehend von der Ölquelle sollen alle wichtigen Häfen erschlossen werden. Die gesamte Pipeline muss natürlich so kurz wie möglich sein. Zudem soll jeder Hafen nur von einer Pipelinestrecke beliefert werden.

Anleitung für ein methodisches Vorgehen nach Prim [4]

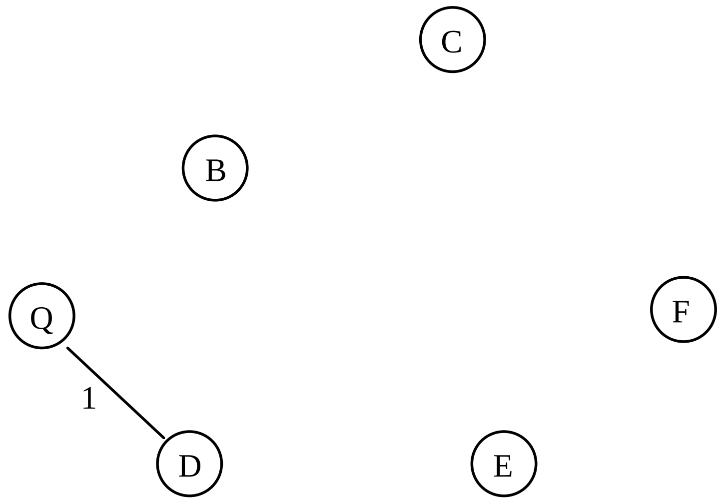
1. Sie suchen den naheliegendsten Hafen bei der Ölquelle Q und erschliessen ihn mit der Pipeline.
2. Jeweils der zur Pipline naheliegendste Hafen kann erschlossen werden.
3. Wenn alle Häfen von der Pipeline erschlossen sind, erhalten Sie ihr Leben lang Kamele (oder Äquivalentes) und Rohöl à discretion.

Beispiel 1

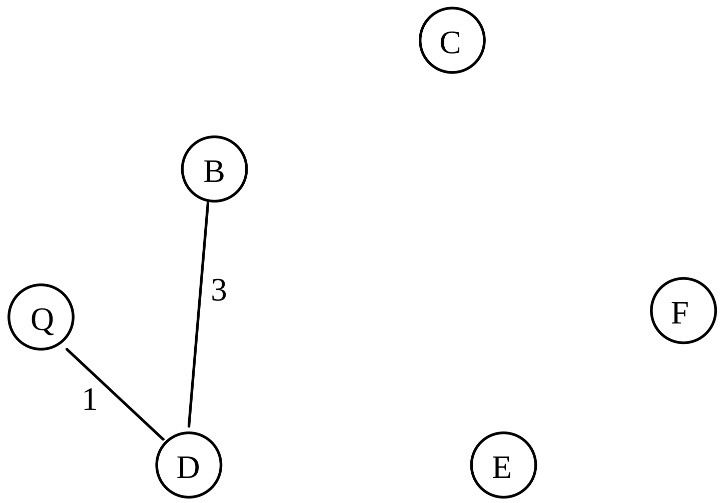
Die Ausgangslage sieht wie folgt aus.



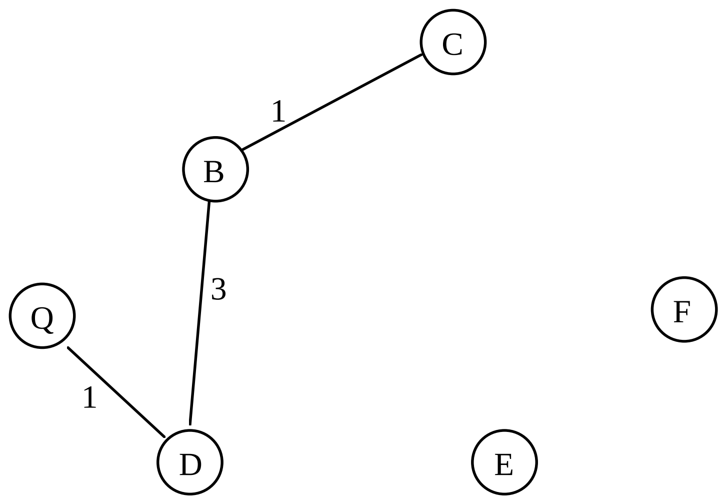
1. Schritt



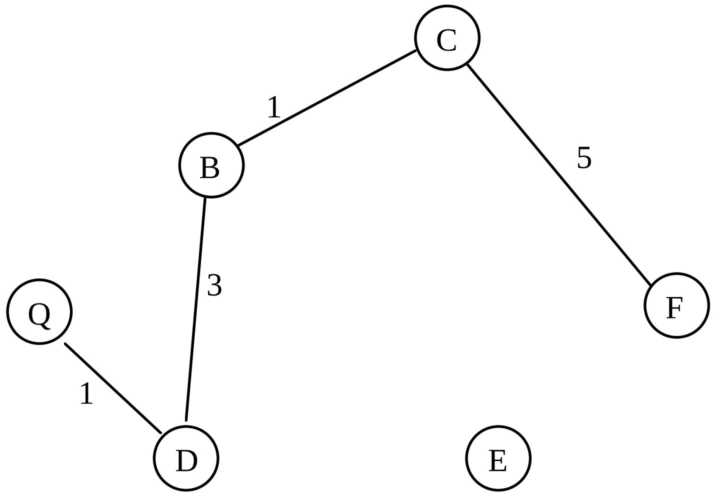
2. Schritt



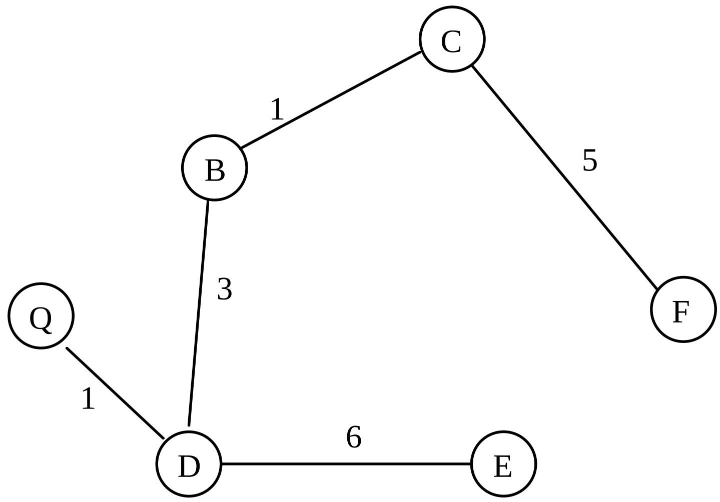
3. Schritt



4. Schritt



5. Schritt



Kontrollaufgaben für das Selbststudium

Finden Sie heraus nach welchen Regeln der Algorithmus die Pfade sucht und zusammenstellt. Dann lösen Sie die nachfolgenden Kontrollaufgaben .

Aufgabe 1

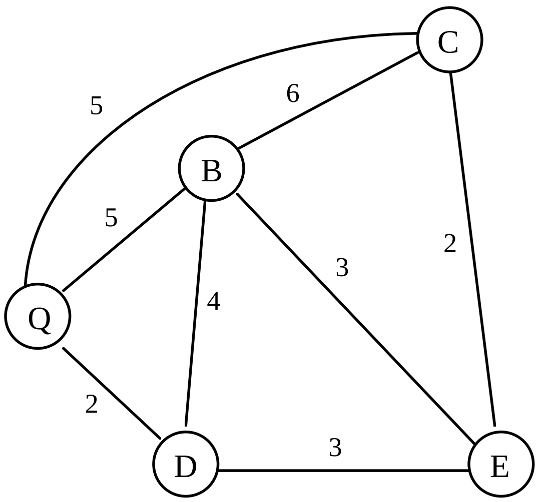
Nach welchen Kriterien werden die Strecken ausgewählt, welche bei einem Schritt in Betracht bezogen werden ?

Aufgabe 2

Formulieren Sie den Algorithmus mit eigenen Worten. Brauchen Sie dabei drei bis fünf kurze Sätze!

Aufgabe 3

Erarbeiten Sie nach Ihren gefundenen Regeln den Pipelineverlauf für den nachfolgenden Graphen. Zeichnen Sie dabei jeden Schritt auf!



Gruppe 4: Lösungen

Aufgabe 1

Für einen neuen Schritt betrachtet man jene Häfen und Strecken, welche durch eine einzige Verbindungsstrecke von den bereits erschlossenen Orten ausgehen.

Aufgabe 2

1. Anweisung

Für einen neuen Schritt betrachtet man jene Häfen und Strecken, welche durch eine einzige Verbindungsstrecke von den bereits erschlossenen Häfen ausgehen.

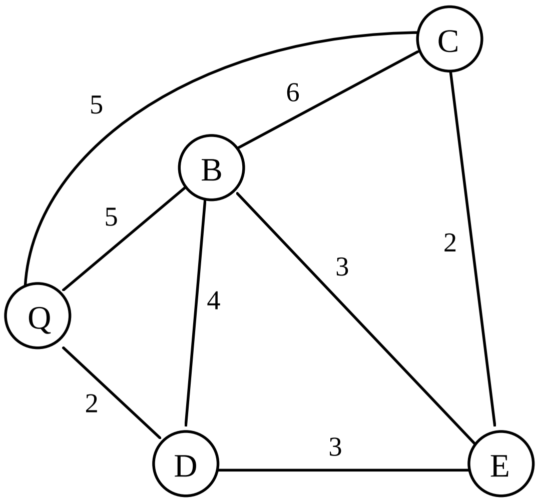
2. Anweisung

Man sucht unter diesen Häfen denjenigen, der die kürzeste Distanz zur Pipeline hat. Dieser eine Ort wird nun auch über die gefundene kürzeste Strecke durch ein neues Pipelinestück erschlossen.

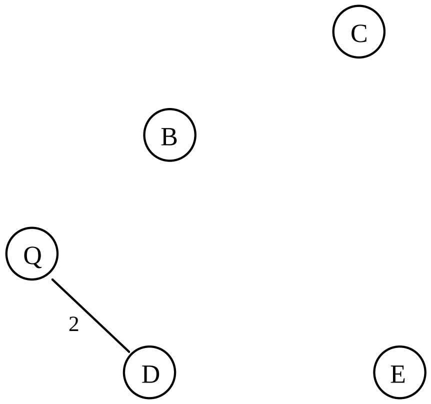
Man wiederholt nacheinander die *1.* und *2. Anweisung* nacheinander bis alle Häfen von der Pipeline erschlossen sind.

Aufgabe 3

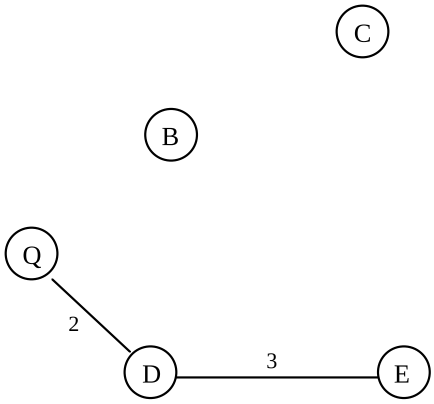
Ausgangslage



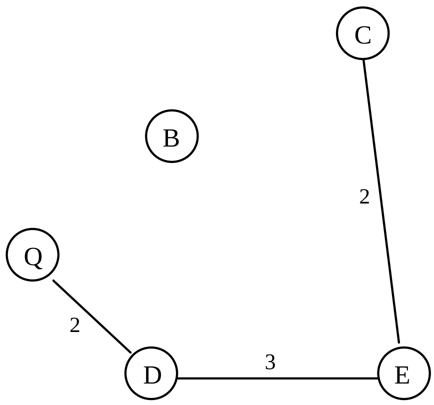
1. Schritt



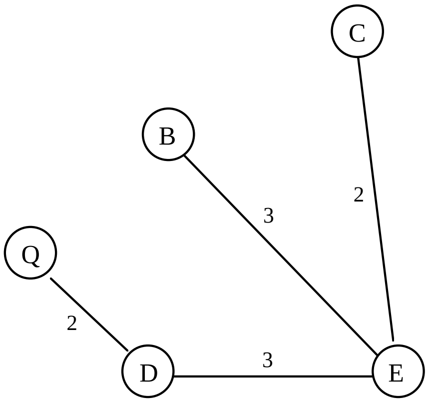
2. Schritt



3. Schritt



4. Schritt


C
B
2
3
Q
2
3
D
E

Mini-Didaktik

1. Einfache Erklärung des Vorgangs

Notieren Sie sich, wie Sie den Routing-Vorgang erklären wollen. Wenn Sie damit Schwierigkeiten haben, überlegen Sie sich was Sie beim Lernen ihres Routing-Algorithmus zuerst gemacht haben. Was haben Sie am schnellsten verstanden und wie kann man darauf aufbauen.

2. Hilfsmittel

Oft kann man anhand konkreter Beispiele einen Sachverhalt besser erklären. Denken Sie sich ein eigenes einfaches Beispiel aus, das alle Punkte beinhaltet, welche Sie darstellen und vermitteln wollen. Achten Sie darauf, dass das Beispiel nicht zu kompliziert wird und Sie nicht die Uebersicht verlieren. Im Notfall nehmen sie das Beispiel aus ihrer Wissenserwerbsphase. Doch nur bei eigenen Beispielen weiss man nachher, ob man den Stoff auch richtig verstanden hat.

3. Zusammenfassung

Fassen Sie am Schluss nochmals zusammen. Nur das Wichtigste: 2 - 3 Sätze.

4. Fragen

Planen Sie eine Zeitreseve ein, falls Ihre "Schülerinnen" und "Schüler" Fragen haben.

Falls Sie mit der Vorbereitung Ihres Unterrichts Probleme haben, können Sie die Lehrerin oder den Lehrer fragen, ob sie/er Ihnen hilft. Jedoch nur im Notfall. Sie/Er kann nicht allen zur gleichen Zeit helfen.

Anhang 1: Lehrer-Lernkontrolle

Es folgt eine Auswahl von Testfragen. Falls die Schüler Erfahrungen in einer Programmiersprache haben, ist es empfehlenswert, einen der Routingalgorithmen implementieren zu lassen. Es zeigt sich dann sehr schnell, ob die Schüler einen Algorithmus begriffen haben oder nicht.

Frage 1

Wir haben hier zwei Algorithmen kennen gelernt, die den kürzesten Pfad zwischen zwei Knoten in einem Graphen finden: Dijkstra's und Bellman-Ford's.
Die beiden Algorithmen nach Prim und nach Kruskal finden einen "Minimum Spanning Tree", also einen minimalen überspannenden Baum in einem Graphen.
Es gibt sogenannte "Greedy" (gierige) Strategien. Diese Art von Algorithmen sucht (ganz kurzsichtig vor lauter Gierde) in jedem Schritt nach der gerade besten Möglichkeit. Im Allgemeinen finden solche Algorithmen nur ein lokales und nicht ein globales Optimum. Die hier vorgestellten Algorithmen finden allerdings alle auch die global optimale Lösung.
Es gibt auch sogenannte "Breadth-first" (Breite-zuerst) Strategien. Diese Art von Algorithmen untersucht in jedem Schritt alle verfügbaren Pfade (in voller "Breite") gleichzeitig. In jedem solchen Zwischenschritt sieht man allerdings nur den bis dahin bekannten Teil der Pfade.
Welche der vier Algorithmen arbeiten mit der genannten Greedy-Strategie? Welcher Algorithmus verwendet primär eine "Breadth-first" Strategie?

Frage 2

Beschreiben Sie möglichst formal die Algorithmen von Dijkstra und Bellman-Ford unter Verwendung der nachfolgenden Begriffe.

w	=	Bezeichnung für einen beliebigen Knoten des Graphen.
N	=	Menge aller Knoten des Graphen
s	=	Startknoten
M	=	Menge aller Knoten des Graphen, welche vom Algorithmus bereits erschlossen sind
d_{ij}	=	Kostenparameter vom Knoten i zum Knoten j. $d_{ii} = 0$ und $d_{ij} = \infty$ wenn die beiden Knoten nicht direkt miteinander verbunden sind; $d_{ij} \geq 0$ wenn die beiden Knoten direkt miteinander verbunden sind.
D_n	=	Kosten des günstigsten Pfades, welcher dem Algorithmus gerade bekannt ist, vom Ausgangsknoten s zum Knoten n .
h	=	maximale Anzahl Teilstrecken eines Pfades, welche der Algorithmus gerade berücksichtigt.
$D_n^{(h)}$	=	Kosten des günstigsten Pfades vom Ausgangsknoten s zu einem Knoten n, wobei die maximale Anzahl Teilstrecken auf h beschränkt ist.

Lösungen für den Lehrer

Lösung zu Frage 1

Greedy sind Dijkstra's und Prim's Algorithmen (übrigens: Dijkstra ging von Prim's Algorithmus aus). Selbst Kruskal's Algorithmus gilt als greedy, weil er in jedem Schritt sich für die jeweils kürzesten (d.h. momentan optimalen) Strecken entscheidet.
Der Algorithmus nach Bellman-Ford verwendet die Breadth-first Strategie.

Lösung zu Frage 2

Die Beschreibung für den Algorithmus von Dijkstra:

1. Initialisierung:

   $M = \{s\};$

   $D_n = d_{sn}$ für $n \neq s$.

2. Suche w□M so, dass $\boxed{\qquad\qquad}$ und füge w zu M.

3. $D_n = \min[D_n, D_w + d_{wn}]$ $\forall$ n□M.

Wiederhole die Schritte 2 und 3 bis N□M.

Die Beschreibung für den Algorithmus von Bellman und Ford:

1. Initialisierung:

   $D_n^{(0)} = \infty, \forall\ n \neq s.;$

   $D_s^{(h)} = 0, \forall\ h.$

2. Für alle nacheinanderfolgenden h>0 (Iteration):

   $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

Anhang 2: Verwendete Quellen

[1] E. Dijkstra "A Note on Two Problems in Connection with Graphs", Numerical Mathematics, Okt. 1959

[2] L. Ford, D. Fulkerson, "Flows in Networks", Princeton Press, 1962

[3] J.B. Kruskal, "On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem", Proceedings of the American Mathematical Society, 7, 1956

[4] R.C. Prim, "Shortest Connection Networks and Some Generalizations", Bell System Technical Journal, 36, 1957

[5] R. Sedgewick, "Algorithms", 2nd. Ed., Addison Wesley, 1988

[6] A. S. Tanenbaum, "Computer Networks", 2nd. Ed. Prentice-Hall, 1989

[7] W. Stallings, "Data and Computer Communications", 4th Ed. Macmillan, 1994

[8] T.H. Cormen et Al., "Introduction to Algorithms", McGraw-Hill, 1990

[9] D. Bertsekas, R. Gallager, "Data Networks", 2nd Ed. Prentice-Hall, 1992