

## Heiratsproblem

Eine Einführung in Algorithmik



1. Zuordnungsprobleme
2. Das Heiratsproblem:
  - stabile Heirat
  - Finden einer Mann- bzw. Frau-optimalen Lösung

Rolf Bruderer bruderer@computerscience.ch

## Zuordnungsprobleme

etwas alltägliches



**Sitzordnung am Geburtstagsfest:**  
Wer sitzt neben wem?



**Zimmereinteilung im Zeltlager:**  
Wer ist mit wem im Zelt?



**Teameinteilung im Sport:**  
Wer ist in welcher Mannschaft?

## Zuordnungsprobleme

in der Schule



- Stundenpläne
- Klasseneinteilungen
- Zimmerpläne
- Gruppeneinteilungen

- Schüler in Klassen
- Klassen zu Zimmer
- Lehrer zu Klassen
- Klassen in Gruppen
- ...

Tag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1. Klasse	Mathematik	Deutsch	Englisch	Religion	Sport
2. Klasse	Mathematik	Deutsch	Englisch	Religion	Sport
3. Klasse	Mathematik	Deutsch	Englisch	Religion	Sport
4. Klasse	Mathematik	Deutsch	Englisch	Religion	Sport
5. Klasse	Mathematik	Deutsch	Englisch	Religion	Sport
6. Klasse	Mathematik	Deutsch	Englisch	Religion	Sport

## Zuordnungsprobleme

im Fussball



- Wer spielt gegen wen?
- Wer spielt zuerst zu Hause?



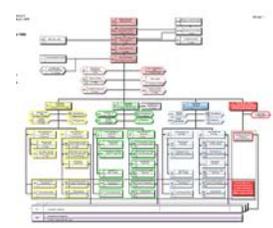

- Mannschaften in Gruppen
- Spiele auf Spieltage
- Schiedsrichter zu Spielen

## Zuordnungsprobleme

im Beruf



- Wer arbeitet mit wem?
- Wer ist für was zuständig?
- Wer ist in welchem Büro?



- Zusammenstellen von Projektteams
- Ferienplanung
- Projekte auf Teams verteilen
- Schichteinteilung
- ...

## Heiratsproblem



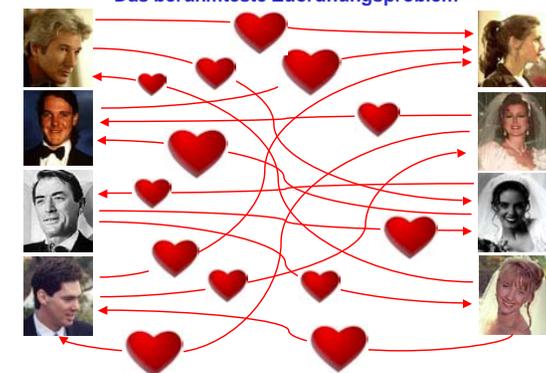
## Heiratsproblem

Ziele

- Jeder weiss, was ein **Heiratsproblem** ist.
- Ihr könnt selbst erklären, was man dabei unter einer "**stabilen Heirat**" versteht.
- Ihr kennt den **Algorithmus zum Finden einer Mann- oder Frau-optimalen stabilen Heirat**.
- Ihr könnt diesen Algorithmus **in eigenen Worten formulieren**.
- Ihr könnt diesen Algorithmus **von Hand durchführen**.

## Heiratsproblem

Das berühmteste Zuordnungsproblem



Wer soll mit wem heiraten?

### Heiratsproblem

Zuordnungsproblem zwischen 2 Mengen

Frauen

← →

Männer

Algorithmiker

← →

Programmiererinnen

Stellenangebote

← →

Bewerbungen

Praktikumplätze

← →

Studentinnen

Trainer

← →

Fussballmannschaften

Beide Mengen seien jeweils gleich gross!

### Heiratsproblem

Alle Beteiligten haben ihre Vorlieben

Jede und jeder hat eine Präferenzliste:



Am Liebsten hätte ich ja den **Brad**.  
Der **Johnny** ist auch nicht schlecht.  
Wenn die nicht wollen, dann nehme ich halt den **Hansruedi**.

1. Brad
2. Johnny
3. Hansruedi

↑  
Präferenzliste

### Heiratsproblem

Heirat darf nicht "instabil" sein ...































instabil = ein Mann und eine Frau haben sich gegenseitig lieber, als ihren Ehepartner.

### Heiratsproblem

... sonst wird geschieden.















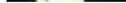
















### Heiratsproblem

Gesucht: "stabile Heirat"

Eine Heirat heisst **stabil**, wenn sie **nicht instabil** ist.

**Gibt es immer eine stabile Heirat?**  
**Ja, wenn jede & jeder eine vollständige Präferenzliste hat.**

Nr	Name	Partner	Präferenzen
1	Julia		4 1 2 3
2	Trudi		1 4 2 3
3	Anna		4 1 2 3
4	Heidi		1 3 2 4

Nr	Name	Partner	Präferenzen
1	Romeo		2 1 4 3
2	Bob		4 2 1 3
3	John		3 1 2 4
4	Peter		3 2 1 4

**Sonst nicht unbedingt!**

### Heiratsproblem

die Single-Party: ein Rollenspiel



**Mann / Algorithmiker:**  
 Stehen im Raum.  
 Wenn sich mehrere Frauen um ihn streiten, so entscheidet er, wer bei ihm bleibt.

**Frau / Programmierer:**  
 Machen ihrem Lieblings-Mann einen Antrag.  
 Wird sie zurückgewiesen, so streicht sie ihn von ihrer Liste und sucht weiter.

### Heiratsproblem

Algorithmus zum Finden einer stabilen Heirat

Solange es noch eine unverheiratete Frau gibt:

Unverheiratete Frau macht oberstem Mann auf ihrer Präferenzliste einen Heirats-Antrag:

er ist unverheiratet → sie heiraten.

er hat sie lieber → er scheidet sich von seiner Frau und sie heiraten.

sonst → sie streicht ihn von ihrer Liste.

*(Gale & Shapley, 1962)*

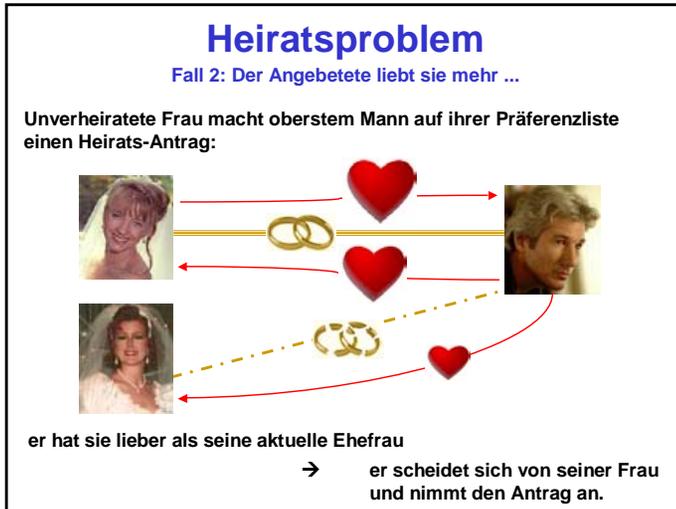
### Heiratsproblem

Fall 1: Der Angebotete ist noch unverheiratet

Unverheiratete Frau macht oberstem Mann auf ihrer Präferenzliste einen Heirats-Antrag:



er ist unverheiratet → sie heiraten.



### Heiratsproblem

Der Algorithmus ist ungerecht!

Bei diesem Algorithmus werden die Frauen bevorzugt.

Man kann sogar beweisen:  
Der Algorithmus findet eine **Frau-optimale Lösung**.

Das heisst, jene **stabile Heirat**, bei welcher die Frauen am **zufriedensten sind**.

Hätten wir anstatt den Frauen, die Männer auslesen lassen, so würden wir eine **Mann-optimale stabile Heirat** finden.