Differentialgleichungen für den Fall des Falles

H.R. Schneebeli

Version vom 21. Januar 2018

Zusammenfassung

Wie bewegt sich ein Körper, der in der Nähe der Erdoberfläche fällt? Diese Frage wurde zu verschiedenen Zeiten verschieden – offenbar nicht immer richtig – beantwortet. Das Problem des fallenden Körpers bietet die Gelegenheit, Modellbildung mit Differentialgleichungen kennen zu lernen. Beim Lösen der Musterprobleme werden drei verschiedene Methoden erprobt:

- Lösen eines diskreten Ersatzproblems: Eulerverfahren
- Umwandeln in eine Kette von algebraischen Problemen: Taylorentwicklung
- Zurückführen auf ein Integrationsproblem: analytische Lösung

Jeder Abschnitt wird durch Übungsaufgaben ergänzt, die den Erfahrungshorizont erweitern sollen. Insbesondere wird sich zeigen, dass sogar in einfachen physikalischen Modellen das Vorbild 'Natur' keineswegs dafür sorgt, dass die Lösungen der Modellgleichungen eindeutig sein müssen. Damit wird die Frage nach Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen bei Differentialgleichungen angetippt.

Bemerkungen

1. *Der Text richtet sich in erster Linie an Lehrpersonen.* Es wird in grossen Zügen und knapp skizziert, wie *Modellbildung mit Differentialgleichungen* in einer Maturitätsschule eingeführt werden könnte. Didaktische Anforderungen an einen Lehrtext zum Selbststudium wurden kaum beachtet. Ich verwende in der Folge meine eigene Notation. Sie müsste übernommen oder an andere Konventionen angepasst werden.
2. *Die Aufgaben* sollten im Unterricht unmittelbar verwendbar sein.

   Etliche der Aufgaben sind als *Lernaufgaben* eher offen gestellt. Sie sollen einen Denkprozess auslösen, der im Idealfall die Lernenden herausfordert, ihre Neugierde weckt und eigene Ideen auf die Probe stellt. Es ist realistisch, davon auszugehen, dass dosierte individuelle Hilfe, Tipps oder Erklärungen zuhanden der Lernenden in diesem Prozess nötig sein werden, aber erst, wenn ihre eigenen Anstrengungen nicht zum Ziel führen. Es lohnt sich, verschiedene Ansätze und Erfahrungen aus der Klasse nachträglich zu kommentieren.

   Im Gegensatz dazu lösen *reine Übungsaufgaben* die autonome Abarbeitung eines bekannten Lösungsschemas aus. Danach genügt es, den Lernenden die Standardantwort mitzuteilen und die Korrektur an sie zu delegieren oder Probleme zu beheben.
3. *Der Einsatz geeigneter Software im Sinne der Gerüstdidaktik* ist zweckmässig, weil damit die Aufmerksamkeit auf *wesentliche Phänomene und Begriffe* fokussiert werden kann, indem Berechnungen hinter den Kulissen stattfinden. Zudem werden *virtuelle Experimente* durch den Computereinsatz erleichtert.
4. Der Text gründet auf eigener Unterrichtserfahrung im Ergänzungsfach *Anwendungen der Mathematik* und im Schwerpunktsfach *Physik und Anwendungen der Mathematik*. Er wurde mehrfach überarbeitet.

1 Bewegungsgleichungen - Differentialgleichungen

Es ist für Anwendungen der Analysis in der Physik wesentlich, den Begriff der Ableitung physikalisch zu interpretieren und zwar ohne den Umweg ueber die oft einzig verwendete Interpetation als Tangentensteigung beim Funktionsgraphen.

Wir betrachten eine Masse m, gedacht als Punktmasse, die sich auf der ruhenden x-Achse bewegt. Die *Positionsfunktion* $x : t \mapsto x(t)$ gibt für jeden Zeitpunkt t die zugehörige Position $x(t)$ der Masse an. Wer die Positionsfunktion kennt, kann daraus andere interessante Grössen ermitteln, etwa die Geschwindigkeit, die Beschleunigung oder die auf die Masse einwirkenden Kräfte.

Die *Momentangeschwindigkeit* wird definiert als Grenzwert von mittleren Geschwindigkeiten über Zeitintervalle, die nach 0 streben. Das lässt sich mit Newtons Notation für die Ableitung so ausdrücken:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Die erste Ableitung der Positionsfunktion nach der Zeit beschreibt die zugehörige Momentangeschwindigkeit als Funktion der Zeit $v : t \mapsto \dot{x}(t)$.

Eine entsprechende Überlegung zeigt: Wenn die Momentangeschwindigkeit einer Punktmasse durch eine Zuordnung $v : t \mapsto v(t)$ gegeben ist, so definiert deren momentane Änderungsrate, also deren zeitliche Ableitung, die *Momentanbeschleunigung* $a : t \mapsto \dot{v}(t)$. Das ist nun die *zweite Ableitung der Positionsfunktion* $a : t \mapsto \ddot{x}(t)$.

Nach *Newtons Kraftgesetz* finden wir den Grund für die Beschleunigungen in den jeweils wirkenden Kräften $F(x, \dot{x}) = m\ddot{x}$. Newton hat nun diese Betrachtungsweise umgekehrt: Jede Kraft F, die auf eine Masse $m > 0$ wirkt, äussert sich durch eine Beschleunigung $\ddot{x} = \frac{1}{m}F$. Diese Beziehung ist ein Beispiel für eine *Differentialgleichung* zur Beschreibung der Positionsfunktion $x : t \mapsto x(t)$. Das physikalische Modell wird formuliert, indem die Abhängigkeit der wirkenden Kraft von den übrigen Grössen wie Position x, Geschwindigkeit $\dot{x}$ und Zeit t als eine Funktion $F : (x, \dot{x}, t) \mapsto F(x, \dot{x}, t)$ beschrieben wird. Die Rekonstruktion der Bahnkurve und der Bewegung des Massenpunktes auf seiner Bahn nennt man 'Lösen' der Differentialgleichung. Das ist nun ein rein mathematisches Problem.

Wir sehen also, dass es zwei verschiedene Betrachtungsweisen für Bewegungsgesetze gibt, eine 'integrale' oder *globale,* bei der die Positionsfunktion als Ganzes vorgelegt ist und aus der wir durch Differentiation die Geschwindigkeitsfunktion oder die Beschleunigungsfunktion gewinnen und das Wirken der Kräfte herleiten können. Bei der zweiten, 'differentiellen' Beschreibung wird durch die Kraftwirkung einzig die *momentane, lokale* Geschwindigkeitsänderung bestimmt. Es stellt sich dann die Frage, ob wir zu jeder 'differentiellen' Form einer Bewegungsgleichung eine 'integrale' finden können und ob diese Aufgabe eindeutig lösbar sei.

Betrachten wir ein einfachstes Beispiel, das *Trägheitsgesetz:* Bewegt sich ein Massenpunkt kräftefrei, so bewegt er sich geradlinig und gleichförmig. Es gibt also im allgemeinen viele verschiedene Positionsfunktionen, welche zum einen und demselben 'differentiellen' Bewegungsgesetz $\quad \ddot{x} = 0 \quad$ passen.

Differentialgleichungen gehören zu den grundsätzlich wichtigen Ausdrucksmitteln bei der mathematischen Modellbildung. Die Entwicklung des eigentlichen Modells bis hin zum Formulieren der Differentialgleichung ist weniger ein mathematisches Problem, als eine Aufgabe, die Fachkenntnisse der Anwender (Physikerin, Ingenieur, Biologe, Chemikerin, . . .) verlangt. Die Mathematik wird wesentlich gebraucht zum Untersuchen der Differentialgleichungen mit dem Ziel, die gewünschte Information über die Lösungen zu erhalten. Manchmal lassen sich Differentialgleichungen mit formal exakten Methoden nicht lösen. Dann helfen gelegentlich

Näherungsrechnungen, vor allem numerische Simulation weiter. Der Anwender wird schliesslich prüfen, inwiefern die Eigenschaften und Voraussagen des Modells mit Erfahrungen aus der Wirklichkeit übereinstimmen. Mathematische Modellbildung ist keine innermathematische Angelegenheit. Die Modelle werden durch experimentell bestimmte Daten an die Wirklichkeit gekoppelt. Die Verifikation der Modelle verlangt, dass Modellvoraussagen an der Wirklichkeit geprüft werden. Das erfordert in der Regel weitere Experimente und Messungen.

2 Differentialgleichungen, Beispiele und Lösungsmethoden

Wer einen schweren, frei fallenden Körper beobachtet, wird bemerken, dass dessen Geschwindigkeit beim Fallen zunimmt. Schon diese Beobachtung korrigiert eine Lehrmeinung des Aristoteles. Er vertrat die Ansicht, dass Körper im freien Fall ihrem natürlichen Orte zustreben und sich dabei je nach der Mischung aus den vier Elementen mit einer spezifischen aber konstanten Geschwindikgeit bewegen. Wer Schneeflocken beim Absinken betrachtet, oder Regentropfen, wird diese Meinung vielleicht teilen. Allerdings ist sie schon von späteren Vertretern der aristotelischen Schule, den Peripatetikern, revidiert worden. Deren Modell für den freien Fall behauptete: *Fällt ein Körper aus dem Ruhezustand, so ist seine Geschwindigkeit in jedem Punkt der Bahn proportional zur bisher durchfallenen Wegstrecke.*

Diese Aussage lässt sich in die Form einer Differentialgleichung kleiden. Wir wählen dazu eine Koordinatenachse, nennen wir sie x-Achse, deren Nullpunkt die Startposition des fallenden Körpers angibt und deren positiver Teil vertikal nach unten gerichtet ist. Dann lässt sich das Modell der Peripatetiker in Newton's Notation so beschreiben:

$\dot{x}(t) = \alpha \cdot x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und für eine geeignete Konstante α.

Allgemein gilt jede differenzierbare Funktion $x : t \mapsto x(t)$ als *Lösung einer Differentialgleichung* $\dot{x} = f(x, t)$, falls sie in ihrem Definitionsbereich die 'Einsetzprobe' in der Differentialgleichung für alle t im Definitionsbereich der Funktion $x : t \mapsto x(t)$ besteht.

Wird zudem für ein t_0 im Definitionsbereich von x eine Anfangsbedingung $x(t_0) := x_0$ erfüllt, so liegt eine Lösung eines *Anfangswertproblems* vor.

Wir werden im folgenden die Differentialgleichung $\dot{x} = \alpha \cdot x$ mit der allgemeinen Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ behandeln und einige Lösungsverfahren testen. Beim Modellieren von Fallbewegungen treten aber auch andere Arten von Differentialgleichungen auf, dank denen sich die Erfahrungen verbreitern und vertiefen lassen.

Galileo Galilei hat eine Generation vor Newton gelebt. Er hat bemerkt, dass die peripatetische Vorstellung über den freien Fall nicht mit der Beobachtung zu vereinbaren ist. Diese Einsicht ergibt sich auch, indem die Differentialgleichung $\dot{x} = \alpha \cdot x$ gelöst wird. Differentialgleichungen sind ein Schlüssel zur neueren Physik.

Jeder der drei folgenden Unterabschnitte handelt von einer Methode zum Lösen von Differentialgleichungen.

2.1 Ein einfaches numerisches Verfahren, Eulers Methode

Angenommen, wir kennen die Position x eines Körpers und seine Geschwindigkeit v in einem Zeitpunkt t_0. Dann sind wir in der Lage, für einen andern Zeitpunkt t_1 einen Näherungswert für die Position $\tilde{x}(t_1)$ anzugeben, sofern nur die Geschwindigkeit zwischen t_0 und t_1 fast konstant bleibt. Unter dieser Bedingung gilt $\tilde{x}(t_1) - x(t_0) = (t_1 - t_0)v$. Die Bedingung ist für stetige Funktionen v umso leichter zu erfüllen, als der Betrag von $\Delta t = t_1 - t_0$ klein gehalten wird.

Auf dieser Einsicht beruht das von Euler verwendete, einfache numerische Verfahren, das die Differentialgleichung diskretisiert und durch eine Differenzengleichung ersetzt. Im vorliegenden Beispiel wählen wir eine kleine, positive Zahl Δt und berechnen iterativ

$$\tilde{x}(\Delta t) = x(0) + \Delta t \cdot v(0) = x_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

$$\text{und mit } t_k := k \cdot \Delta t$$

$$\tilde{x}(t_{k+1}) = \tilde{x}(t_k) + \Delta t \cdot \tilde{v}(t_k) = \tilde{x}(t_k)(1 + \alpha \cdot \Delta t).$$

Aufgaben

1. Die Differentialgleichung $\dot{x} = x$ ist näherungsweise mit Eulers Methode zu lösen je für die beiden Anfangsbedingungen (a) $x(0) = 0$ und (b) $x(0) = 1$.
   Welches sind die Näherungswerte für $\tilde{x}(1)$, wenn die Schrittweite Δt die Werte 1.0, 0.1, 0.01, 0.001, annimmt? Was fällt auf?

2. Die Differentialgleichung $\dot{x} = x$ ist mit Eulers Methode algebraisch zu behandeln je für die beiden Anfangsbedingungen (a) $x(0) = 0$ und (b) $x(0) = 1$. Welcher Term beschreibt die Eulernäherung $\tilde{x}(1)$, wenn die Schrittweite $\Delta t = 1/n$ gewählt wird und die rekursive Beschreibung in eine direkt berechenbare Formel umgesetzt wird? Welche Grenzwerte ergeben sich in den beiden Fällen (a) und (b) für $n \to \infty$?

Anstelle einer Lösung für diese beiden Aufgaben behandeln wir das allgemeinere Problem $\dot{x} = \alpha \cdot x$ und $x(0) = x_0$ algebraisch. Um $\tilde{x}(t)$ algebraisch zu berechnen, wählen wir $\Delta t = t/n$. Ferner verwenden wir die Abkürzung $\tilde{x}_k$ für $\tilde{x}(k \cdot \Delta t)$. Dann wird

$$\tilde{x}_1 = x_0 + \alpha x_0 \cdot \Delta t = x_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

und

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \alpha \cdot \tilde{x}_k \cdot \Delta t = \tilde{x}_k(1 + \alpha \cdot \Delta t) = x_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)^{k+1}$$

Somit ist $\tilde{x}_n = x_0(1 + \alpha \cdot t/n)^n$ ein Näherungswert für $x(t)$. Ein Grenzübergang mit $n \to \infty$ liefert

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{x}_n(t) = x_0 \exp(\alpha \cdot t).$$

Die 'Einsetzprobe' zeigt, dass dieser Grenzwert die Differentialgleichung tatsächlich erfüllt.

Wie verhält sich nun die gefundene Lösung im Vergleich zur Wirklichkeit? Für die von Galileo gestellte Aufgabe mit $x_0 = 0$ bewegt sich – gemäss der Berechnung – gar nichts! Falls die Gleichung $\dot{x} = \alpha \cdot x$ mit $x(0) = 0$ nur eine einzige Lösung besitzt, ergibt sich also ein Widerspruch zur Erfahrung. In der einen oder andern Form wurde dies offenbar auch Galileo klar. Jedenfalls hat er die überlieferte Lehrmeinung revidiert zur Aussage: *Die Momentangeschwindigkeit eines frei fallenden Körpers ist stets proportional zur Fallzeit.* Diese Aussage entspricht einer *Differentialgleichung* wie folgt: Wenn der Körper zur Zeit t_0 aus der Ruhe fallen gelassen wird, so heisst dies: Es gibt eine Konstante g und für alle Zeiten $t \geq t_0$ gilt die Beziehung $\dot{x}(t) = g \cdot (t - t_0)$.

Aufgaben

3. Es sei $f : t \mapsto f(t)$ eine auf $[a, b]$ definierte, stetige Funktion. Welche Näherungslösung liefert das Eulerverfahren für die Differentialgleichung $F'(t) = f(t)$ mit der Anfangsbedingung $F(a) = 0$ und der Schrittweite $\Delta t = (b - a)/n$?
Besonderes Beispiel: Welche Lösung liefert das Eulerverfahren für die Gleichung $\dot{x} = g \cdot t$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$?

4. (a) Die Differentialgleichung $\dot{x} = \beta \cdot \sqrt{x}$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und einer Konstanten β soll näherungsweise mit der Methode von Euler gelöst werden. Welche Funktion liefert das Verfahren als Grenzwert? Erfüllt diese Funktion die Differentialgleichung?

   (b) Ein Körper, der zur Zeit $t \leq \tau$ auf der Höhe 0 ruht und zur Zeit τ fallen gelassen wird, erreicht zur Zeit $t > \tau$ die Koordinate $x(t) \geq 0$ mit der Geschwindigkeit $\dot{x}(t) \geq 0$. Dabei hat sich seine potentielle Energie $E_{\text{pot}} := m \cdot g \cdot x(t)$ in kinetische Energie $E_{\text{kin}} := \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x}(t))^2$ umgewandelt.
   Nach diesen Überlegungen lässt sich aus dem Energieerhaltungssatz für den freien Fall eine Differentialgleichung herleiten. Wie lautet sie?

   (c) Begründen Sie, warum beim freien Fall ohne Luftwiderstand eine Differentialgleichung der Art $\dot{x} = \beta \cdot \sqrt{x}$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und einer Konstanten $\beta > 0$ erfüllt wird?

   (d) Für jedes reelle τ wird eine Funktion $x_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abschnittsweise definiert:
   - für $t \leq \tau$ ist $x_\tau(t) := 0$
   - für $t > \tau$ ist $x_\tau(t) := \frac{1}{4}\beta^2 \cdot (t - \tau)^2$.

   Untersuchen Sie, ob jede der Funktionen x_τ die Einsetzprobe in der Differentialgleichung $\dot{x} = \beta \cdot \sqrt{x}$ besteht.

   (e) Kommentieren Sie die Aussage: *Falls in der physikalischen Welt der Determinismus gilt, so hat jede Differentialgleichung aus der Physik bei gegebenen Anfangswerten immer genau eine Lösung.*

2.2 Potenzreihen, Newtons bevorzugte Methode

Newton hat bemerkt, dass es für viele (alle?) Funktionen Potenzreihendarstellungen gibt, die wenigstens in der Nähe eines Punktes konvergieren. Angenommen, die gesuchte Lösung zum Problem $\dot{x} = \alpha \cdot x$ mit $x(0) = x_0$ ist als Potenzreihe darstellbar, die in der Nähe von 0 konvergiert. Dann lässt sich die Differentialgleichung umschreiben als

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n t^{n-1} = \alpha \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n).$$

Wenn nun eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ in der Nähe von 0 konvergiert und eine Funktion f darstellt, so sind alle Koeffizienten a_n durch die Ableitungen von f an der Stelle 0 gemäss $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ *eindeutig* festgelegt.

Zwei konvergente Potenzreihen $\sum a_n t^n$ und $\sum b_n t^n$ stellen genau dann dieselbe Funktion dar, wenn für alle n gilt $a_n = b_n$. Somit sind wir in der Lage, Gleichungen zwischen Potenzreihen durch eine unendliche Folge von Gleichungen zwischen ihren Koeffizienten zu ersetzen. Im vorliegenden Beispiel ergibt sich der Reihe nach

$$x_1 = \alpha \cdot x_0, \;\; 2x_2 = \alpha \cdot x_1, \;\; \ldots \;\; kx_k = \alpha \cdot x_{k-1}.$$

Dies führt zusammen mit der Anfangsbedingung $x_0 = x(0)$ auf die Reihendarstellung

$$x\,:\,t \mapsto x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n.$$

Wir erkennen darin die für alle t konvergente Exponentialreihe, $x(t) = x_0 \exp(\alpha \cdot t)$.

Wir finden also dieselbe Lösung wieder, die wir mit dem Eulerverfahren entdeckt haben. Gegenüber dem Eulerverfahren hat die Potenzreihenmethode den Vorteil, dass in unserem Beispiel die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen wurde unter der Annahme, dass die Lösung überhaupt eine Potenzreihendarstellung besitzt. Wir wissen, dass diese Annahme nicht für alle Funktionen zutrifft. So hat die Funktion $x_\tau : t \mapsto x_\tau(t)$ von Aufgabe 4(c) keine Potenzreihendarstellung an der Stelle $t = \tau$.

Aufgaben

5. Die Funktion f besitze die Potenzreihendarstellung $f(t) = \sum a_n t^n$. Lösen Sie die Differentialgleichung $F' = f$ unter der Anfangsbedingung $F(0) = 0$ mit der Potenzreihenmethode.
   Behandeln Sie das besondere Beispiel $\dot{x} = gt$ mit $x(0) = x_0$ mit dieser Methode.

6. Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = \beta \cdot \sqrt{x}$ mit $x(0) = 0$ mit der Potenzreihenmethode.
   Hinweis: Statt die gegebene Gleichung zu verwenden, können die Potenzreihen für die Gleichung $(\dot{x})^2 = \beta^2 \cdot x$ benutzt werden.
   Was fällt auf beim Vergleich der Lösungen von Aufgabe (6) und Aufgabe (4)?

2.3 Separation der Variablen

Dieses Verfahren ist eine Art Rechentrick, der die Lösung von Differentialgleichungen vom Typ

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \cdot g(t)$$

auf zwei Teilprobleme verschiebt:

- eine formale Integration, welche die Differentialgleichung in eine analytische Relation zwischen der Variablen t und der gesuchten Funktion $x : t \mapsto x(t)$ überführt.

- eine formale Auflösung der analytischen Beziehung nach der gesuchten Funktion x.

Beide Teilaufgaben, die formale Integration und die formale Lösung einer nichtlinearen Gleichung, sind nur in Ausnahmefällen durch konkrete Berechnungen mit 'elementaren Funktionen' ausführbar. 'Separation der Variablen' war zu einer Zeit wichtig, als die Fähigkeit zu ausgedehntem numerischem Rechnen nur sehr beschränkt vorhanden war.

Bemerkung: Der Wunsch, 'geschlossene Lösungen' für eine Differentialgleichung zu erhalten, ist in dieser historischen Perspektive verständlich. Leider ändert das nichts an der Tatsache, dass solche 'geschlossenen Lösungen' oft gar nicht oder nur dank vereinfachenden Annahmen und Kompromissen beim Modellieren erhältlich sind. Trotz formal exakter mathematischer Methoden sind Diskrepanzen zwischen Modell und Wirklichkeit eher zu erwarten als vermeidbar.

Angenommen, die zu lösende Differentialgleichung sei von der Art

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \cdot g(t).$$

Ist nun $f(x(t)) \neq 0$ für alle t, so folgt aus dieser Gleichung

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{f(x(\tau))} = \int_0^t g(\tau)d\tau,$$

falls beide Integrale existieren. Wie eine Variablensubstitution im Integral auf der linken Seite zeigt, erfüllt die Lösung $x : t \mapsto x(t)$, die der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ gehorcht, die Beziehung

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_0^t g(\tau)d\tau.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung definiert ein Integral eine Funktion der Art $J : t \mapsto J(x(t))$, auf der rechten Seite steht eine Integralfunktion $I : t \mapsto I(t)$. Gelingt es nun, die beiden Integrale, durch welche die Funktionen I und J definiert sind, formal zu bestimmen, so erhalten wir eine explizit mit elementaren Funktionen dargestellte Gleichung der Art $J(x) = I(t)$. Falls diese Gleichung nach x aufgelöst werden kann, liegt eine explizite Darstellung der Funktion $x : t \mapsto x(t)$ vor, und unser Ziel ist erreicht.

Betrachten wir das Beispiel $\dot{x} = \alpha \cdot x$ mit $x(0) = x_0$: Dann liefert die 'Separation der Variablen' die Gleichung

$$\int_0^t \frac{\dot{x}}{x} d\tau = \int_0^t \alpha \cdot d\tau$$

oder ausintegriert:

$$\ln(|x(t)|) - \ln(|x_0|) = \alpha \cdot t$$

und nach $x(t)$ gelöst: $x(t) = x_0 \exp(\alpha \cdot t)$. Der Fall $x_0 = 0$ muss speziell behandelt werden (siehe Aufgabe 9).

Aufgaben

7. Es sei v eine auf $[a, b]$ definierte, stetige Funktion. Versuchen Sie, die Gleichung $\dot{x} = v(t)$ mit Separation der Variablen zu lösen.
   Was liefert das Verfahren im Fall $\dot{x} = g \cdot t$?

8. Es sei $\dot{x} = \beta \cdot \sqrt{x}$, $x(0) = x_0$ und β eine Konstante. Welche Lösung liefert 'Separation der Variablen' in diesem Beispiel?
   Ist es zulässig, in der Lösung $x_0 = 0$ einzusetzen?
   Welche Aussage macht das Verfahren für $x_0 = 0$?

9. Ein Eindeutigkeitsbeweis für die Aufgabe $\dot{x} = \alpha \cdot x$ mit $x(0) = x_0$.
   Für jede differenzierbare Funktion y definieren wir die Funktion Q mit demselben Definitionsbereich wie y gemäss $Q(t) = y(t)\exp(-\alpha \cdot t)$. Dann ist Q gleich oft differenzierbar wie die Funktion y.
   Begründen Sie: 'Genau dann, wenn y die Differentialgleichung $\dot{x} = \alpha \cdot x$ löst, ist $\dot{Q}$ die Nullfunktion.'
   Mit welcher Überlegung folgt nun die Eindeutigkeit der Lösung?

3 Differentialgleichungen und Modelle für Fallbewegungen

Galileos verbessertes Fallgesetz war ein Erfolg, eine Idealisierung zwar, die aber für schwere Körper und kleinere Fallstrecken gut zu gebrauchen war. Wir werden in diesem Abschnitt das einfache Modell Galileis für die Fallbewegung weiterentwickeln. Bewegt sich ein Körper in der Luft, im Wasser oder einem beliebigen Medium, so wirken Erdanziehung, Auftrieb und eine geschwindigkeitsabhängige Widerstandskraft und bestimmen die Bewegung. Als Beispiele denken wir etwa an die Bewegung eines Fallschirms oder eines Ballons oder die Bewegung eines Fasses, das im Meer versenkt wird.

Wir betrachten einen Körper, etwa eine Kugel, der in einem ruhenden, Medium fällt. Die Erdanziehung G, die Dichte des Mediums und damit auch die Auftriebskraft A sollen von der Ortskoordinate x unabhängig sein. Wir wählen wieder eine x-Achse, die zum Erdmittelpunkt zeigt. Die Widerstands- oder Reibungskraft, die der Körper bei der Geschwindigkeit v erfährt, soll mit $R(v)$ bezeichnet werden. Auf das interessante, aber heikle Problem der Modellierung der Funktion R treten wir nicht ein. Wir halten uns an zwei Musterfälle: *laminare* beziehungsweise *turbulente* Strömung.

- Für die Bewegung einer Kugel in einer 'zähen' Flüssigkeit (*laminare Strömung*) hat *Stokes* ein Widerstandsgesetz der Form $R(v) = K_1 \cdot v$ angegeben. In der Konstanten $K_1 < 0$ gehen die Materialeigenschaften des Mediums und die Geometrie des Körpers ein.

- *Newton* hat ein Gesetz für den Widerstand in einer *turbulenten Strömung* postuliert. Es lautet: $R(v) = K_2 \cdot v^2$. Wiederum ist $K_2 < 0$ eine Konstante, welche die Geometrie des Körpers und Eigenschaften des Mediums zusammenfasst. Die Erfahrung zeigt, dass dieses Gesetz Newtons mit guter Näherung verwendet werden kann, falls die Geschwindigkeit des Körpes gegenüber dem Medium sich deutlich von der Schallgeschwindigkeit [d.h. Mach 1] unterscheidet, (z.B. $|v| < 0.8$ Mach).

Beispiele: Für ein Nebeltröpfchen ist Luft ein 'zähes' Medium, für ein Hagelkorn ist sie es nicht. Welches der beiden Gesetze zur Anwendung kommt, entscheidet man in der Praxis durch Experimente oder anhand der Grösse der sogenannten *Reynoldszahl.* Diese hängt ab von der Grösse der betrachteten Körper und vom Medium.

Die Bewegungsgleichung für den Körper mit der Masse m ergibt sich aus dem Kraftgesetz

$$m\dot{v} = A + G + R(v).$$

Da die x-Achse zum Erdmittelpunkt zeigt, ist die Gewichtskraft $G := g \cdot m > 0$ und die Auftriebskraft $A \leq 0$. Die beiden Kräfte A und G sollen als Konstante betrachtet werden. Daher fassen wir deren Wirkung zusammen zu $C := A + G$. Mit den Abkürzungen $c := C/m$ und $k_i := K_i/m$ erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{v} &= c + k_1 \cdot v\,, && \text{wenn das Gesetz von Stokes angenommen wird.} \\ \dot{v} &= c + k_2 \cdot v^2\,, && \text{wenn Newtons } v^2\text{-Gesetz gültig ist.} \end{aligned}$$

Wir gehen davon aus, dass die Werte der Konstanten c, k_1, k_2 berechnet oder experimentell bestimmt werden können.

3.1 Die Modellgleichung $\mathbf{\dot{v} = c + k_1 \cdot v}$ mit $\mathbf{c > 0, k_1 < 0}$

Aufgaben

10. Benutzen Sie ein Programm (allenfalls ein selbst geschriebenes), welches das Anfangswertproblem
$$\dot{v} = c + k_1 \cdot v \quad \text{mit } v(0) = v_0$$
näherungsweise mit Hilfe des Eulerverfahrens bestimmt. Die Konstanten c, k_1, die Schrittweite h und v_0 sollen wählbar sein. Als Ausgabe wird der Graph der Näherungslösung $\tilde{v} : t \mapsto \tilde{v}(t)$ gewünscht. Experimentieren Sie mit verschiedenen Startwerten und verschiedenen Schrittweiten und notieren Sie ihre diesbezüglichen Beobachtungen.

11. Bestimmen Sie eine Näherungslösung für die Gleichung $\dot{v} = c + k_1 \cdot v$ unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ mit einem Potenzreihenansatz. Dabei soll es genügen, die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihe zu bestimmen. Was ist am Ergebnis bemerkenswert?

12. Es sei $v_0 = 0$, $k_1 < 0$, $c > 0$. Dann machen sorgfältig interpretierte Versuche mit dem in Aufgabe 10 benutzten Programm oder physikalische Intuition plausibel, dass die Funktion v monoton wächst, bis sich zwischen Erdanziehung und Widerstandskarft ein Gleichgewicht einstellt. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit v_∞ ist also charakterisiert durch $\dot{v}_\infty = c + k_1 \cdot v_\infty = 0$ also $v_\infty = -c/k_1$.

    (a) Zeigen Sie, dass die Konstante v_∞ eine Lösung der Modellgleichung ist.

    (b) Welches ist die Gleichgewichtsgeschwindigkeit für ein Nebeltröpfchen von 10^{-5}m Radius in ruhender Luft von 20° [C]? Wie hängt diese Gleichgewichtsgeschwindigkeit allgemein vom Radius des Tröpfchens ab?
    Hinweis: Nach dem Gesetz von Stokes ist die Widerstandskraft für eine Kugel $R(v) = -6\pi\eta r v$, wobei $\eta = 1.82 \cdot 10^{-5}$ $[\mathrm{N\,s\,m^{-2}}]$ die Viskosität der Luft bei 20° [C] bezeichnet, die Dichte von Wasser ist 1000 $[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$, die Erdbeschleunigung $g = 9.81$ $[\mathrm{m\,s^{-2}}]$.

    (c) Angenommen, es sei $c + k_1 \cdot v \neq 0$ für alle t , dann lässt sich 'Separation der Variablen' auf die Gleichung $\dot{v} = c + k_1 \cdot v$ anwenden. Lösen Sie die Differentialgleichung mit dieser Methode und untersuchen Sie die Abhängigkeit der Lösungen von der Grösse von v_0 im Vergleich zu v_∞. Bestimmen Sie auch die zugehörigen Positionsfunktionen.

    (d) Eine Methode zur Beseitigung von giftigen Abfällen besteht darin, die Giftstoffe zu verbrennen und allfällige Rückstände mit Zement in Fässern zu vergiessen. Diese Fässer werden anschliessend im Meer versenkt. Wir interessieren uns für die Aufprallgeschwindigkeit eines solchen Fasses auf dem Meeresgrund.
    Daten: Fassvolumen 0.25 $[\mathrm{m^3}]$, Dichte des Fassinhaltes 2000 $[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$
    Dichte des Seewassers 1050 $[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$
    Widerstandsfunktion $R(v) = k_1 \cdot v$, mit $-7.5 \geq K_1 := m \cdot k_1 \geq -10$ $[\mathrm{N\,s\,m^{-1}}]$, einem experimentell bestimmten Wert.

       - Welche Grenzgeschwindigkeiten stellen sich in den Extremfällen ein?
       - Stellen Sie eine Tabelle her für die Sinkgeschwindigkeiten des Fasses in 10, 100, 200, 500, 1000 [m] Tiefe bei einem mittleren Wert für K_1.
       - Welche Kritik verdient diese Modellrechnung?

3.2 Die Modellgleichung $\mathbf{\dot{v} = c + k_2 \cdot v^2}$ mit $\mathbf{c > 0, k_2 < 0}$

Aufgaben

13. Benutzen oder erstellen Sie ein Programm, welches das Anfangswertproblem

$$\dot{v} = c + k_2 \cdot v^2 \quad \text{mit } v(0) = v_0$$

näherungsweise mit Hilfe des Eulerverfahrens bestimmt und die Näherungslösung graphisch darstellt.

Experimentieren Sie mit verschiedenen Startwerten und verschiedenen Schrittweiten und notieren Sie ihre diesbezüglichen Beobachtungen. Von besonderem Interesse sind hier auch Experimente mit relativ grossen Schrittweiten, bei denen die Diskretisierungsfehler offensichtlich werden. Das diskretisierte Modell bietet Gelegenheit, chaotisches Verhalten eines Modellsystems zu entdecken.
Für die Näherungslösungen der Differentialgleichung muss die Schrittweite $h > 0$ so klein gewählt werden, dass sich die Diskretisierung nicht merklich auswirkt, aber so gross, dass sich die Rundungsfehler aus den vielen einzelnen Eulerschritten nicht anhäufen. Suchen Sie experimentell eine 'optimale' Schrittweite h.

14. Lösen Sie die Gleichung $\dot{v} = c + k_2 \cdot v^2$ unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ näherungsweise mit einem Potenzreihenansatz, wobei nur die ersten vier Koeffizienten exakt zu bestimmen sind. Welche Verbesserungen zum Gesetz von Galilei ergibt sich aus dem so ermittelten Anfangsstück der Potenzreihendarstellung, falls $|k_2| \ll |c|$ ist? Was ist bemerkenswert am Ergebnis?

15. Es sei $v_0 = 0$, $k_2 < 0$, $c > 0$. Dann machen Versuche mit dem in Aufgabe 13 benutzten Programm oder physikalische Intuition plausibel, dass die Funktion v monoton wächst, bis sich zwischen Erdanziehung und Widerstandskraft ein Gleichgewicht einstellt. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit v_∞ ist also charakterisiert durch $\dot{v}_\infty = c + k_2 \cdot v_\infty^2 = 0$ also $v_\infty = \sqrt{-c/k_2}$.

    (a) Zeigen Sie, dass die Konstante v_∞ eine Lösung der Modellgleichung ist.

    (b) Welches ist die Gleichgewichtsgeschwindigkeit für ein Hagelkorn von 10^{-2} [m] Radius in ruhender Luft von 1.2 [$\mathrm{kg\,m^{-3}}$] Dichte? Wie hängt diese Gleichgewichtsgeschwindigkeit allgemein vom Radius des Hagelkorns ab?
    Hinweis: Nach Newtons Widerstandsgesetz gilt allgemein für die Widerstandskraft $R(v) = -\frac{1}{2} c_w \rho S \cdot v^2$, wobei S die Querschnittsfläche des fallenden Körpers bezeichnet, der sogenannte Widerstandsbeiwert c_w eine Konstante ist, welche durch die Geometrie des fallenden Körpers bestimmt wird und ρ die Dichte des Mediums bezeichnet. Für ein kugelförmiges Hagelkorn vom Radius r wird $c_w = 0.47$ und $S = \pi r^2$. Die Dichte von Eis ist mit 1000 [$\mathrm{kg\,m^{-3}}$] hinreichend genau angegeben. Die Erdbeschleunigung misst g = 9.81 [$\mathrm{m\,s^{-2}}$].

    (c) Lösen Sie die Modellgleichung unter der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ unter der Annahme, dass $c + k_2 \cdot v^2 \neq 0$ gilt mit 'Separation der Variablen' und diskutieren Sie die Lösungen für verschiedene Startwerte v_0 im Vergleich zu v_∞.

    (d) Wir betrachten einen Fallschirm, der die Form einer nach unten geöffneten Halbkugel (mit einer kleinen Öffnung beim Pol) besitzt und rechnen mit $c_w = 1.2$. Wie gross muss der Durchmesser dieser Halbkugel sein, damit der Fallschirm einer

Masse von 100 [kg] in Luft der Dichte $\rho = 1.2$ [kg m^{-3}] die Grenzgeschwindigkeit von 5 [m s^{-1}] verleiht?
Welche Aufprallgeschwindigkeit erfährt jemand, der aus 1 [m] Höhe auf den Fussboden springt?

(e) Grenzgeschwindigkeit bei variabler Dichte.
Ein Körper der Masse m, der aus grösserer Höhe abstürzt, erreicht die Grenzgeschwindigkeit praktisch bereits nach kurzer Fallzeit. Allerdings ist nun die Luftdichte *nicht* konstant. Wir erhalten mit $k_2 = -\frac{1}{2m}c_w\rho S$ die dichte- und somit höhenabhängige Näherungsformel für die Grenzgeschwindigkeit

$$v_\infty = \sqrt{-\frac{c}{k_2}} = \sqrt{\frac{2mc}{c_w\rho S}} = V\rho^{-1/2}.$$

Dabei bezeichnet die Proportionalitätskonstante V die Grenzgeschwindigkeit [m/s] in Luft der Dichte $1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.
Bleiben wir bei unserer Konvention über die Wahl der x-Achse, so gilt für die Dichte ρ in einer Modellatmosphäre mit konstanter Temperatur $T = 0°$ [C] die Differentialgleichung

$$\rho'(x) = 1.25 \cdot 10^{-4}\rho(x)$$

unter der Anfangsbedingung $\rho(0) = 1.25\,[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}]$ auf Meereshöhe.
In der meteorologischen Forschung werden Radiosonden mittels Ballonen in grosse Höhen getragen. Während des Aufstiegs werden Messdaten zur Erde übertragen. Eine Bodenstation bestimmt die Position der Sonde. Nach dem Platzen des Ballons stürzt die Sonde zur Erde. Früher wurde der Fall der Sonde durch einen Fallschirm gebremst. Seit einigen Jahren sind so leichte Sonden im Einsatz, dass man sich überlegt, ob der Fallschirm noch nötig sei. Bei Experimenten wurden frei fallende Sonden mit Radargeräten verfolgt, allerdings konnte die Fallgeschwindigkeit wegen des Horizontes nur in grösserer Höhe gemessen werden. In 10 [km] Höhe (d.h. $x = -10^4$) wurde eine Grenzgeschwindigkeit von 20 [m/s] bestimmt. Welche Funktion beschreibt die Grenzgeschwindigkeit der abstürzenden Sonde als Funktion der x-Koordinate? Mit welcher Grenzgeschwindigkeit wird die Sonde auf Meereshöhe eintreffen? Welche Energie wird beim Aufprall am Boden freigesetzt, falls die Sonde eine Masse von 0.2 [kg] aufweist? Wie viel Energie wurde beim Absturz aus 16 [km] Höhe in Wärme umgewandelt?

3.3 Im freien Fall durch die Schallmauer

Am 14.10.2012 hat der Fallschirmspringer Felix Baumgartner als erster Mensch im freien Fall die Schallmauer durchbrochen und weitere Rekorde aufgestellt. Die Zeitschrift *Der Spiegel* (2012) veröffentlichte ein Minutenprotokoll zum Experiment. Im Internet lassen sich weitere Dokumente (Texte, Bilder, Videos) zu diesem Ereignis finden. Der Hauptsponsor hat folgenden Text abgegeben.

Aus 39'000 Meter ist er abgesprungen, mit 1'342,8 km/h (Mach 1,24) ist er zurück zur Erde gerast, zumindest drei Weltrekorde hat er aufgestellt: Felix Baumgartner hat mit seinem Rekordsprung vom Rande des Weltalls die Mission Red Bull Stratos erfolgreich abgeschlossen. Der Salzburger Extremsportler landete kurz nach 21:00 Uhr (MESZ) sicher in der Wüste von New Mexiko. Zuvor versetzte der 43jährige ein weltweites Millionenpublikum in Staunen: In

39'045 Metern Höhe verliess Baumgartner seine Kapsel, erreichte nach wenigen Sekunden 1'342,8 km/h und durchbrach somit als erster Mensch im freien Fall die Schallmauer. Nach 4 Minuten und 20 Sekunden zog Baumgartner die Reissleine und landete sicher wenige Kilometer ausserhalb der Missionsbasis in Rosswell. Mit der erfolgreich beendeten Mission Red Bull Stratos stellte der Extremsportler mindestens drei neue Weltrekorde auf:

1. *Den höchsten Absprung (39'045 Meter)*
2. *Die Höchstgeschwindigkeit während eines Freifalls (1'342,8 km/h, Mach 1,24)*
3. *Den höchsten bemannten Ballon-Flug (39'045 Meter)*
4. *Der Rekord für den längsten freien Fall geht laut offizieller Stellen ebenfalls an Baumgartner, da der bisherige Rekordhalter Joe Kittinger (Freund und Mentor von Felix Baumgartner Anm.) bei seinem 4 Minuten und 36 Sekunden langen Sprung einen Stabilisierungs-Fallschirm verwendete.*

Baumgartner zeichnete seinen Sprung mit einer Helmkamera auf. Das Video ist zugänglich unter http://www.spiegel.de/wissenschaft/weltall/felix-baumgartner-startet-sprung-aus-der-stratosphaere-a-861172.html,(3.1.2013).

Felix Baumgartner über seinen Rekordspung: Wenn man am Rande des Weltalls steht, merkt man erst, wie klein man ist. Ich bin einfach heilfroh, lebend zurück bei meiner Familie und meinen Freunden zu sein.

Aufgaben zu Baumgartners Rekordsprung

16. Angenommen, eine Testmasse $m > 0$ befindet sich in 39 km Höhe und beginnt im Vakuum zur Zeit $t := 0$ aus der Ruhe alleine unter der Erdanziehung zu fallen. Die Masse beschleunigt und erreicht zur Zeit t_1 die Maximalgeschwindigkeit Baumgartners v_B.

    [Hinweis: Vereinfachend kann die Erdbeschleunigung im Bereich der Fallbewegung als Konstante $g = 9.75\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ angenommen werden.]

    (a) Wie gross ist t_1 und auf welcher Höhe $h(t_1)$ befindet sich die Testmasse?

    (b) Baumgartner erreichte die Maximalgeschwindigkeit v_B in der Atmosphäre auf einer Höhe h_B zur Zeit t_B.
    Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsfunktion der Testmasse im Vakuum und jene Baumgartners im gleichen $(t|v)$-Diagramm schematisch und qualitativ richtig. Begünden Sie die beiden folgenden Ungleichungen: Es gilt $h(t_1) > h_B$ und $t_1 < t_B$

17. Angenommen, bei der Vorbereitung zu Felix Baumgartners Rekordsprung sollte der freie Fall rechnerisch simuliert werden. Warum ist eine Simulation schon vor dem Experiment sinnvoll oder gar notwendig? Warum könnte die Simulation als numerische Lösung einer Differentialgleichung formuliert werden? Welche Vereinfachungen gegenüber der Wirklichkeit sind allenfalls notwendig, welche Daten fehlen? Welche Folgerungen ergeben sich aus der Erwartung $v_B > \text{Mach}\,1$ für die Simulation?

18. Die Positionsdaten und die Momentangeschwindigkeit Baumgartners wurden beim Rekordsprung mit GPS bestimmt und aufgezeichnet. Ob die GPS-Daten je öffentlich werden, ist fraglich.

Wie lassen sich aus den Sekundenwerten $\vec{x}(t)$ und $\vec{v}(t)$ für Position und Geschwindigkeit im Raum die auf den Springer wirkenden Kräfte zu den Zeiten t (in Sekundenintervallen) angenähert ermitteln?

19. Welche Tatsachen können die GPS-Daten über Baumgartners Sprung zeigen, die einer eindimensionalen Simulation des Sprunges verschlossen bleiben? Warum sind diese Erkenntnisse nicht beliebig auf andere Sprünge aus extremer Höhe übertragbar? Inwiefern ergänzen sich das virtuelle Experiment [Simulationsrechnung mit dem Massenpunktmodell] und das Realexperiment in diesem Beispiel?