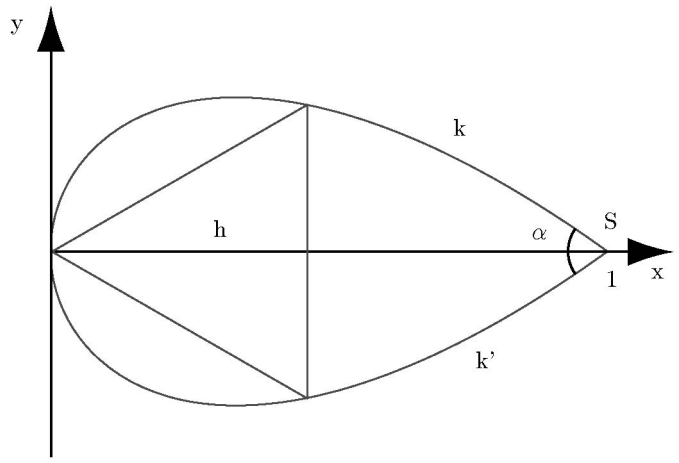
Matur-/Abituraufgaben Analysis

1. **Tropfen**
   Die folgende Skizze zeigt die Kurve k mit der Gleichung $y = (1-x)\sqrt{x}$ im Intervall $0 \leq x \leq 1$. Die Kurve k bildet zusammen mit ihrem Spiegelbild k' eine zur x-Achse symmetrische Figur.



   (a) Wie gross ist der Winkel α bei der Spitze S?

   (b) Welches ist die grösste Breite (parallel zur y-Achse gemessen) des Tropfens?

   (c) Bei der Rotation der Kurve k um die x-Achse entsteht ein 3-dimensionaler tropfenförmiger Körper. Wie gross ist sein Volumen?

   (d) Diesem Körper wird ein Kreiskegel mit der Spitze im Ursprung und der Höhe h auf der x-Achse einbeschrieben (vgl. Skizze). Für welche Höhe h wird das Volumen des Kegels maximal?

2. **Untersuchungen**
   Gegeben ist die Funktion $f(X) = (2x-1) \cdot e^{ax}$, mit $a \in I\!R$.

   (a) Gesicht sind die Nullstellen, Extremal- und Wendestellen der Funktion.

   (b) Wie gross ist die Fläche, die $f(x)$ mit der x-Achse einschliesst?

   (c) Für welchen Wert von u ($u < 0$) hat das Dreieck mit den Eckpunkten $O(\,0 \mid 0\,)$, $P(\,u \mid 0\,)$ und $Q(\,u \mid f(u)\,)$ maximalen Flächeninhalt?

3. **Kurvendiskussion, Rotationskörper und ein Extremum**
   Für jeden Parameterwert $a > 2$ ist durch $f(x) = \frac{x}{a-2}\sqrt{a-x}$ eine Kurve gegeben.

   (a) Diskutiere und skizziere die Kurve für $a = 3$. Verlangt sind Definitionsbereich, Nullstellen und Hochpunkt.

   (b) Die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit des Parameters a.

   (c) Bestimme $a > 2$ so, dass das Volumen des vorher berechneten Rotationskörpers extremal wird. Handelt es sich um ein Minimum oder um ein Maximum?

4. **Polynomfunktion 3. Grades**
   Eine Poynomfunktion 3. Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und geht durch die Punkte $A(\,-1 \mid 3\,)$ und $B(\,2 \mid 0\,)$.

   (a) Wie lautet die Funktionsgleichung?

   (b) Welche Gleichung hat die Wendetangente?

(c) Wie gross ist Fläche, die durch den Graph der Polynomfunktion und den Graph der Funktion $f(x) = -2x + x^2$ begrenzt wird?

(d) Für welchen x-Wert ist die y-Koordinatendifferenz der beiden Kurven am grössten? Wie gross ist diese Strecke?

5. **Kurvendiskussion, Tangenten und eine Fläche**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

(a) Untersuche den Graphen von f(x) auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Verhalten für grosse und kleine x-Werte, Punkte mit horizontaler Tangente, Wendepunkte.

(b) Bestimme die Gleichungen der Kurventangenten in den Punkten $P(\,-1\,|?\,)$ und $Q(\,1\,|?\,)$. Zeige, dass die beiden Tangenten senkrecht stehen, und berechne die Koordinaten ihres Schnittpunkts.

(c) Bestimme die reellen Parameter a und b so, dass $F(x) = \frac{ax+b}{e^x}$ eine Stammfunktion von f(x) ist. Der Graph von f(x) umschliesst zusammen mit den Koordinatenachsen ein im 2. Quadranten gelegenes Flächenstück. Berechne dessen Inhalt.

6. **Untersuchung von Kurveneigenschaften**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2e^x}{2 + e^x}$.

(a) Es soll der Definitionsbereich von f(x) und das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ untersucht werden.

(b) Wo hat die Tangente an die Kurve $y = f(x)$ die Steigung 0,5? Gesucht ist die Gleichung einer solchen Tangente. Unter welchem Winkel schneidet diese Tangente die Tangente im Punkt $P(\,0\,|?\,)$?

(c) Bestimme den Wendepunkt W von f(x).

7. **Flugzeugabsturz**
Ein Pilot absolviert mit seinem Flugzeug einen Übungsflug über dem Meer. Zu einem bestimmten Zeitpunkt T befindet er sich auf einem 45°-Steigflug exakt 3 km über dem Meeresspiegel. Etwas später, das Flugzeug ist soeben in waagrechter Fluglage genau 1 km (horizontal) weiter und 1 km (vertikal) höher als zum Zeitpunkt T, setzt der Motor aus. Der Pilot rettet sich mit dem Schleudersitz und die Maschine stürzt ins Meer. Der Auftreffpunkt des Flugzeuges auf der Meeresoberfläche befindet sich horizontal 2 km vom Standort zum Zeitpunkt T entfernt.

(a) Erstelle eine Skizze der Situation und der Flugbahn des Flugzeuges. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem.

(b) Nähere die Flugbahn durch eine Polynomfunktion von geeignetem Grad an.

(c) Berechne den Auftreffwinkel des abgestürzten Flugzeuges auf der Meeresoberfläche.

8. **Kurvendiskussion und die Fläche eines Dreiecks**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = t \cdot x + e^{-x}$ mit dem Parameter $t > 0$.

(a) f(x) ist auf Extremal- und Wendestellen (x-Koordinaten genügen) zu untersuchen. Für welche Werte von t hat die Funktion an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle?

(b) Wie lautet die Tangentengleichung im Schnittpunkt S der Kurve von f(x) mit der y-Achse? Für welchen Wert von t beträgt der Steigungswinkel dieser Tangente 45°? In welchem Punkt Q schneidet die Normale in S die x-Achse? Für welchen Wert von t beträgt die Entfernung zwischen S und Q $\sqrt{5}$ Längeneinheiten?

(c) Die Kurve von f(x) mit $t = 2$, die Geraden $y = 2x$, $x = -\ln 2$ und $x = b$ schliessen eine Fläche A ein. Beachte dabei, dass die Gerade $y = 2x$ die schiefe Asymptote der gegebenen Funktion f(x) ist. Berechne den Inhalt der Fläche A in Abhängigkeit von b. Bestimme den Grenzwert $\lim_{b\to\infty} A(b)$.

(d) Die Gerade $x = t$ schneidet die Gerade $y = tx$ im Punkt D und die Kurve von f(x) im Punkt E. Für welches t nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks DEF mit $F(\,0 \mid 0\,)$ einen Extremalwert an? Wie gross ist diese extremale Fläche? Zeige, dass es sich bei dieser Fläche um ein Maximum handelt.

9. **Kurven, senkrechte Tangenten und ein Rotationskörper**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{k^3} \cdot x \cdot (x - 7k)$ mit dem Parameter $k > 0$.

(a) Skizziere den Graph der beiden Kurven mit $k = 1$ und $k = 2$ im gleichen Koordinatensystem. Wie gross ist die ausschliesslich von diesen Kurven eingeschlossene Fläche.

(b) Für welchen Wert von k stehen die Tangenten in den beiden Nullstellen der Funktion $f(x)$ senkrecht aufeinander?

(c) Zeige, dass die von der Kurve und der x-Achse eingeschlossene Fläche unabhängig vom Parameter k ist.

(d) Die beschriebene Fläche rotiere um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

10. **Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

(a) Diskutiere die Funktion $f(x)$. Verlangt sind Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Asymptoten, Extremal- und Wendepunkte. Skizziere die Funktion.

(b) Der Punkt A sei die Nullstelle der Funktion und der Punkt B der Wendepunkt mit positiver x-Koordinate. Der Punkt C liege zwischen A und B auf dem Graph von $f(x)$. Bestimme C so, dass die Fläche des Dreiecks ABC maximal wird.

(c) Bestimme eine Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x)$.

(d) Der Graph von $f(x)$ schliesst zusammen mit der positiven x-Achse und der Gerade $x = \sqrt{3}$ im 1. Quadranten ein Flächenstück A ein. Das Flächenstück A soll von der Gerade $x = q$ halbiert werden. Wie ist q zu wählen?

Lösung zu: Matur-/Abituraufgaben Analysis

1. **Tropfen**

   (a) $\alpha = 90°$; Aus Steigung der Tangente an die Kurve bei $x = 1$ lässt sich der halbe gesuchte Winkel berechnen.

   (b) $d \approx 0.7698$; Der y-Wert des Hochpunktes entspricht der halben Tropfendicke.

   (c) $V \approx 0.2618$; Das Integral für den Rotationskörper ist $V = \pi \cdot \int_0^1 (1-x)^2 \cdot x\, dx$.

   (d) $h = 0.5$; Es ist das Maximum der Volumenformel $V(h) = \frac{1}{3} f^2(h) \cdot \pi \cdot h$ zu bestimmen.

2. **Untersuchungen**
   $f'(x) = 2e^{ax} + (2x-1)e^{ax} \cdot a$, $f''(x) = 2ae^{ax} + 2e^{ax}a + (2x-1)e^{ax}a^2$

   (a) $N_1(\,\frac{1}{2} \mid 0\,)$, Ex: $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{a}$; W: $x = \frac{1}{2} - \frac{2}{a}$

   (b) $\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{ax}\, dx = \frac{2}{a^2} \cdot e^{\frac{a}{2}}$ mit partieller Integration lösbar.

   (c) $u = \dfrac{(a-4) - \sqrt{16-a^2}}{4a}$

3. **Kurvendiskussion, Rotationskörper und ein Extremum**

   (a) $D = \{x / x \in I\!R \text{ und } x \leq 3\}$
   Nullstellen: $N_1(\,0 \mid 0\,)$; $N_2(\,3 \mid 0\,)$
   Hochpunkt: $H(\,2 \mid 2\,)$
   Ableitung: $y' = \sqrt{3-x} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

   (b) $A = \pi \cdot \int_0^a f^2(x)\, dx = \frac{a^4 \cdot \pi}{12(a-2)^2}$

   (c) $a = 4$

4. **Polynomfunktion 3. Grades**

   (a) $y = x^3 - 4x$
   Es sind die Bedingungen $f(0) = 0$; $f''(0) = 0$; $f(-1) = 3$ und $f(2) = 0$ zu berücksichtigen.

   (b) $y = -4x$

   (c) $A = \frac{37}{12}$
   Die Fläche besteht aus zwei Teilen: $\int_{-1}^{0} x^3 - x^2 - 2x\, dx + \int_0^2 -x^3 + x^2 + 2x\, dx$

   (d) Bei $x \approx 1.2152$ ist $\Delta y \approx 2.1126 = max$.
   Die Lösung ist das Maximum des Betrages der Differenzfunktion.

5. **Kurvendiskussion, Tangenten und eine Fläche**

   (a) Nullstellen: $x = 0$; $y = 1$
   Für $x \to \infty$ geht $f(x) \to 0$
   Für $x \to -\infty$ geht $f(x) \to -\infty$
   Horizontale Tangente: $P(\,0 \mid 1\,)$
   Wendepunkt: $W_1(\,1 \mid \frac{2}{e}\,)$
   Ableitungen: $y' = -\frac{x}{e^x}$; $y'' = \frac{x-1}{e^x}$

   (b) Tangente in $P_1(\,-1 \mid 0\,)$: $y = ex + e$
   Tangente in $P_2(\,1 \mid \frac{2}{e}\,)$: $y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$
   Für die Steigungen der beiden Tangenten gilt $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. Deshalb stehen sie senkrecht aufeinander.

(c) $a = -1;\ b = -2;\ A \approx 0.71828$
Leitet man die gegebene Stammfunktion ab, so kann diese mit der gegebenen Funktion $f(x)$ vergleichen werden.

6. **Untersuchung von Kurveneigenschaften**

(a) $D = I\!R$
Für $x \to \infty$ gilt $y \to 2$
Für $x \to -\infty$ gilt $y \to 0$

(b) Die Tangente hat bei $x = \ln 2$ die Steigung 0.5.
Tangentengleichung: $y = 0.5x + 1 - \frac{\ln 2}{2}$
$\alpha \approx 2.6026°$

(c) $W(\ln 2 \mid 1)$
Die Ableitungen sind $f'(x) = \frac{4e^x}{(2+e^x)^2}$ und $f''(x) = \frac{8e^x - 4e^{2x}}{(2+e^x)^3}$

7. **Flugzeugabsturz**

(a) Eine mögliche Variante: Ausgangspunkt $A(0 \mid 3)$, höchster Punkt $H(1 \mid 4)$, Auftreffpunkt auf der Meeresoberfläche $M(2 \mid 0)$.

(b) $y = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + x + 3$ (basierend auf obigem Koordinatensystem!)
Zur Berechnung sind die Bedingungen $f(0) = 0;\ f(1) = 4;\ f(2) = 0;\ f'(0) = 1$ und $f'(1) = 0$ zu berücksichtigen.

(c) $\alpha \approx 84.289°$

8. **Kurvendiskussion und die Fläche eines Dreiecks**

(a) Extremalstelle bei $x = -\ln t$. Für $t = e^{-1}$ ist die Extremalstelle bei $x = 1$. Die Funktion hat keinen Wendepunkt.

(b) Schnittpunkt $S(0 \mid 0)$. Tangentengleichung $y = (t-1)x + 1$
Für $t = 2$ ist der geforderte Schnittwinkel 45°.
$Q(t-1 \mid 0)$. Gleichung der Normale $y = -\frac{1}{t-1}x + 1$.
$t = 3$

(c) $A(b) = 2 - e^{-b}$
Der Grenzwert ist 2.

(d) maximale Fläche 0.1839. Die Dreiecksfläche $A = \frac{t \cdot e^{-t}}{2}$ ist zu maximieren. Dies liefert $t = 1$.

9. **Kurven, senkrechte Tangenten und ein Rotationskörper**

(a) $A = 31.5$. Schnittpunkte der Kurven $S_1(0 \mid 0)$ und $S_2(6 \mid -6)$

(b) $k = \pm\sqrt{7}$. Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 7k$. Um die Bedingung 'senkrecht' gerecht zu werden, müssen die Ableitungen in den Nullstellen die Gleichung $f'(0) = -\dfrac{1}{f'(7k)}$ erfüllen.

(c) Das bestimmte Integral $\int_0^{7k} \frac{1}{k^3}x^2 - \frac{7}{k^2}x\,dx$ ist unabhängig vom Parameter k.

(d) $V = \pi \int_0^{7k} f^2(x)\,dx \approx 560.233 \cdot \frac{1}{k} \cdot \pi$

10. **Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion**

(a) Definitionsbereich: $I\!R$; Punktsymmetrisch zu O; Nullstellen: $N(0 \mid 0)$; Asymptoten: $y = 0$; Extrema: $H(1 \mid 0.5)$, $T(-1 \mid -0.5)$; Wendepunkte: $W_1(-\sqrt{3} \mid -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $W_2(0 \mid 0)$, $W_3(\sqrt{3} \mid \frac{\sqrt{3}}{4})$

(b) $C(\,0.68125 \mid 0.4653\,)$
Steigung m der Geraden durch die Punkte A und B berechnen. Der Punkt C ist jener Punkt auf der Kurve, dessen Tangente die Steigung m hat. Dadurch wird der Abstand und somit auch die Fläche maximal.

(c) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) + c$

(d) $q = \pm 1$
Es ist die Gleichung $2 \cdot \int_0^q \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ zu lösen.