Ebene Geometrie

1. **Gleich weit, aber nicht zu weit!**
   Gegeben sind die drei beliebigen Punkte A, B, C. Es sind jene Punkte zu konstruieren, die von B und C gleich weit entfernt sind und von A nicht weiter entfernt sind als der Punkt C.

2. **Verkürzte Rechteckseiten**
   Bei einem Rechteck werden alle Seiten um einen Viertel gekürzt. Um wie viel Prozent ist die Fläche des neuen Rechtecks kleiner als jene des alten?

3. **Gleichschenkliges Trapez**
   Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die beiden Parallelseiten a und c sowie den Flächeninhalt A. Wie lautet die Formel um daraus allgemein den Umfang des Trapezes auszurechnen?

4. **Gleich weit mit gegebenem Abstand**
   Gegeben sind die beiden sich schneidenden Geraden g und h. Es sind alle Punkte zu konstruieren, die von g und von h den Abstand 2 cm haben. Die gesuchten Punkte liegen logischerweise auf den Winkelhalbierenden zwischen g und h. Konstruiere zur Kontrolle diese Winkelhalbierenden.

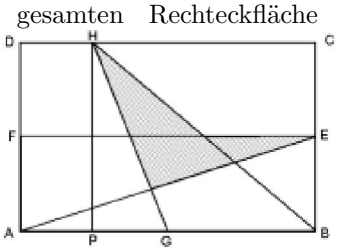
5. **Gleicher Abstand**
   Gegeben sind die drei, nicht parallelen Geraden f, g und h. Es ist jener Punkt P zu konstruieren, der von allen drei Geraden den gleichen Abstand hat. Welche geometrische Eigenschaft hat der Punkt P?

6. **Umkreis im Dreieck**
   Gegeben ist ein beliebiges Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C. Es ist jener Kreis zu konstruieren, der durch alle drei Punkte geht.

7. **Dreieck im Dreieck**
   Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ΔABC. Konstruiere innerhalb dieses Dreiecks ein zweites Dreieck ΔDEF mit den folgenden Eigenschaften:
   - Auf jeder Seite von ΔABC liegt eine Ecke von ΔDEF
   - Die Seiten von ΔDEF verhalten sich wie $2 : 3 : 4$.

8. **Rechteck**
   Es ist ein Rechteck mit den folgenden Eigenschaften zu konstruieren:
   - Die Diagonale ist 3 mal länger als die Breite
   - Die Länge misst 4 cm.

9. **Flächeninhalt**
   Gegeben ist das Rechteck $ABCD$. Die Punkte E, F, G liegen je auf der Mitte der entsprechenden Seite (vgl. Skizze). Die Punkte H und P teilen die Länge im Verhältnis $1 : 3$. Wieviele Prozent der gesamten Rechteckfläche bildet die punktierte Fläche?



10. **Vierwaldstättersee**
    Der Vierwaldstättersee bedeckt eine Fläche von 114 km^2. Wieviele cm^2 misst er auf einer Schweizerkarte mit dem Massstab 1 : 25'000?

11. **Elemente eines Dreiecks**
Von einem Dreieck kennt man die Seite $a = 16.9$ und die Winkel $\alpha = 63.4°$ und $\gamma = 48.2°$. Gesucht sind die anderen Seiten und Winkel des Dreiecks.

12. **Dreiecksaufgabe**
Ein Dreieck mit Umfang 100cm hat einen 40° und einen 60° Winkel. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

13. **Winkelhalbierende**
Von einem Dreieck kennt man die die beiden Winkel $\alpha = \beta = 47.3°$ sowie die Länge der Winkelhalbierenden $w_\alpha = 25.3$. Welche Länge haben die drei Seiten des Dreiecks?

14. **Elementare Dreiecksberechnungen**
Von einem Dreieck ABC sind die Seite $a = 148.2$ und die Winkel $\beta = 56°$, $\gamma = 90°$ gegeben. Gesucht sind die Seiten b und c, die Höhe h_c und der Inkreisradius ρ.

15. **Flächeninhalt**
Ein Dreieck ABC hat die Seiten $a = 5\ cm$, $b = 6.8\ cm$ und $c = 7.5\ cm$. Die Mittelsenkrechte auf a schneidet die Seite c im Punkt P und die Seite a im Punkt M. Erstelle eine Skizze. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks PMCA.

16. **Berechnungen an Dreiecken**
Gegeben ist das Dreieck $A(4/0)B(5/7)C(-4/4)$.
    (a) Wie gross ist die Fläche des Dreiecks?
    (b) Wie lauten die Koordinaten des Umkreismittelpunktes und wie gross ist der Umkreisradius?

17. **Berechnungen an Dreiecken**
Gegeben ist das Dreieck $A(0/4)B(-5/1)C(1/-4)$
    (a) Es soll gezeigt werden, dass die Höhe h_a von A auf die Seite $a = BC$ die Gleichung $y = \frac{6}{5}x + 4$ hat.
    (b) Wie lauten die Koordinaten des Höhenschnittpunktes des Dreiecks?

18. **Abstand Punkt / Gerade**
Wie gross ist der Abstand des Punktes $P(2/5)$ von der Geraden $y = \frac{1}{2}x + 1$?

19. **Berechnungen an Dreiecken**
Von einem Dreieck ABC sind die Ecken $A(\,4 \mid -7\,)$, $B(\,8 \mid -4\,)$ und $C(\,9 \mid 5\,)$ gegeben.
    (a) Wie gross sind die Seiten a, b und c?
    (b) Wie gross sind die Winkel α, β und γ?
    (c) Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt?
    (d) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?
    (e) Wie lang ist die Winkelhalbierende w_γ?
    (f) Wie gross ist der Umkreisradius?

20. **Berechnungen an Dreiecken**
Gegeben ist das Dreieck $A(0/0)B(6/-3)C(8/3)$.
    (a) Wie lautet die Gleichung der zu AB parallelen Geraden durch die Ecke C ?
    (b) Liegt der Punkt $P(2/0.8)$ innerhalb des Dreiecks?
    (c) Die Höhe h_c hat die Gleichung $y = 2x - 13$. Welche Koordinaten hat der Höhenfusspunkt H_c ?
    (d) Die Höhe h_c hat die Gleichung $y = 2x - 13$. Wie lauten die Koordinaten des Höhenschnittpunktes?
    (e) Wie lautet die Gleichung der Mittelsenkrechten m_b auf die Seite AC ?

21. **Billiard**
Eine Kugel befindet sich im Punkt $P(0/2)$. Sie wird so gegen die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ gestossen, dass die reflektierte Kugel auf eine Kugel trifft, die sich im Punkt $Q(3/6.5)$ befindet. Wie lauten die Koordinaten des Reflexionspunktes?

22. **Geometrisches Extremalproblem**
Welcher Punkt der Kurve $y = \sqrt{x}$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $P(2/0)$?

23. **Extremalprobleme in der Geometrie**
Viele geometrische Problemstellungen können auch als Extremalaufgaben interpretiert werden. So geht es beim Fällen einen Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g darum, denjenigen Punkt auf der Geraden zu finden, der von P den kleinsten Abstand hat. Als Beispiel betrachten wir die Gerade $g : y = 2x - 3$ und den Punkt $P(0/5)$. Es soll der Lotfusspunkt L bestimmt werden, indem man die zugehörige Extremalaufgabe löst. .

24. **Leitung eines Kraftwerkes**
Die Rohrleitung eines Kraftwerkes fällt um 360 m. Auf der Karte 1:25'000 misst die Leitung 3.2 cm. Welchen Neigungswinkel, welche prozentuale Steigung und welche Länge hat die Rohrleitung?

25. **Berechnungen auf dem Erdglobus**
Der Breitenkreis eines Punktes P auf der Nordhalbkugel hat den Radius 1000km. (Hinweis: Erdradius 6370 km)
    (a) Wie gross ist die geographische Breite des Punktes P?
    (b) Der Punkt Q liegt auf demselben Breitenkreis und hat von P die Entfernung 500km. Um wieviele Grade unterscheiden sich die geographischen Längen der beiden Punkte?

26. **Spiegeln eines Punktes an einer Geraden**
Gegeben ist der Punkt $P(\,1 \mid -1\,)$ und die Gerade $g(A(\,0 \mid 1\,)B(\,3 \mid 2\,))$. Wie lauten die Koordinaten des Punktes $\overline{P}$, den man durch Spiegelung von P an der Geraden g erhält?

27. **Berechnung eines allgemeinen Dreiecks**
Von einem Dreieck ABC kennt man die Seiten $a = 10$, $b = 8$ und den Winkel $\alpha = 57°$. Wie gross ist der Winkel β?

28. **Beziehungen zwischen den Seitenhalbierenden**
Gesucht ist ein Beweis, dass in jedem Dreieck für die Seitenhalbierende s_c gilt
$$2s_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2$$

29. **Punkte im Dreieck**
Gegeben ist das Dreieck $A(\,-5 \mid -20\,)B(\,16 \mid 8\,)C(\,10 \mid 16\,)$.
    (a) Welche Koordinaten hat der Höhenschnittpunkt des Dreiecks?
    (b) Welche Koordinaten hat der Inkreismittelpunkt des Dreiecks?

30. **Geteilter Winkel**
In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $c = 134.65\ cm$ und $\alpha = 78.5°$ wird die Kathete a in drei gleiche Stücke geteilt. Die Teilpunkte werden mit der Ecke A verbunden. In welche Teile wird dadurch der Winkel a geteilt?

31. **Katheten gesucht**
In einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Höhe $h_c = 31.4\ cm$ und die Winkelhalbierende $w_\gamma = 35.2\ cm$. Wie gross sind die Winkel α und β?

32. **Dreieck**
Im Dreieck ABC misst der Winkel $\beta = 45°$. M ist der Mittelpunkt der Seite b. Der Winkel BMC misst ebenfalls 45°. Wie gross sind die Winkel α und γ?

33. **Winkelhalbierende**
In einem Dreieck sind a = 8cm, b = 7cm und c = 12cm. Wie lang ist die Winkelhalbierende w_γ?

34. **Achsenkreis**
Der Mittelpunkt eines Kreises liegt auf der x-Achse. Der Kreis schneidet die Achsen in den Punkten P(0/9) und Q(27/0). Gesucht ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises.

35. **Gemeinsame Sehne**
Gegeben sind die beiden Kreise
K1: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ und
K2: $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$.

    (a) Es ist zu beweisen, dass beide Kreise gleich gross sind.

    (b) Wie lautet die Gleichung der Gerade s, die die gemeinsame Sehne der beiden Kreise enthält.

36. **Kreisberechnungen**
Die Mittelpunkte zweier Kreise mit Radius 5cm und 8cm sind 7cm voneinander entfernt. Wie gross ist die gemeinsame Fläche der beiden Kreise?

37. **Reguläres 6-Eck**
Gegeben ist ein reguläres 6-Eck mit der Seitenlänge 4 cm. Der In- und der Umkreis des 6-Ecks bilden einen Kreisring. Wie gross ist sein Flächeninhalt?

38. **Verlängerter Umfang**
Zeige, dass allgemein gilt:
Wird der Umfang eines beliebigen Kreises um a Zentimeter vergrössert, so nimmt auch der Radius um immer gleich viele Zentimeter zu.

39. **Dreieck drehen**
Gegeben ist ein Dreieck $A(\,0 \mid 0\,)$, $B(\,5 \mid 12\,)$ und $C(\,-3 \mid 4\,)$. Das Dreieck wird um den Punkt A im Gegenuhrzeigersinn um 22° 10' 15" gedreht. Wie lauten die kartesischen Koordinaten der Eckpunkte A', B' und C' des gedrehten Dreiecks?
Tipp: Polarkoordinaten verwenden

40. **Gedrehtes Quadrat**
Gegeben ist das Quadrat mit den Eckpunkten $A(\,5 \mid 6\,)$, $B(\,7 \mid 7\,)$, $C(\,6 \mid 9\,)$ und $D(\,4 \mid 8\,)$. Dieses Quadrat wird um $56°20'30''$ im Gegenuhrzeigersinn um den Nullpunkt des Koordinatensystems gedreht. Berechne die kartesischen Koordinaten der Punkte A', B', C' und D' des gedrehten Quadrates.
(Tipp: Polarkoordinaten verwenden!)

41. **gedreht und gestreckt**
Der Punkt $P(\,-2 \mid -5\,)$ wird vom Punkt $Z(\,-1 \mid 1\,)$ aus um den Faktor 4 gestreckt und anschliessend um $-314°$ (d.h. im Uhrzeigersinn) gedreht. Berechne die Koordinaten des Bildpunktes P'. (Tipp: Polarkoordinaten verwenden!)

42. **Drehstreckung**
Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten $A(\,5 \mid 6\,)$, $B(\,7 \mid 7\,)$ und $C(\,4 \mid 8\,)$. Durch eine Drehstreckung mit Zentrum $P(\,1 \mid 2\,)$ entsteht der Bildpunkt $A'(\,-7 \mid 2\,)$. Berechne die Bildpunkte B' und C'.

43. **Koordinatentransformation**
An Stelle eines (2-dimensionalen) kartesischen Koordinatensystems mit senkrecht stehenden x- und y-Achsen wird ein schiefes Koordinatensystem mit den Achsen u und v gewählt. u entspricht dabei der ursprünglichen y-Achse. Die Achse v schneidet die u-Achse im Ursprung unter einem Winkel von 45°. Leite die Umrechnungsformeln her, mit denen sich aus den (x/y)-Koordinaten die (u/v)-Koordinaten berechnen lassen.

44. **gedrehtes Koordinatensystem**
Ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem wird um 30° im Gegenuhrzeiger gedreht. Die neuen Achsen seien u und v. Beweise:
$u = x \cdot \cos 30° + y \cdot \sin 30°$
$v = -x \cdot \sin 30° + y \cdot \cos 30°$

45. **Neue Grad**
Ein Winkelmass, dass sich nie wirklich druchsetzen konnte, sind die sogenannten Neugrad, heute Gon genannt. Bei diesem Mass entspricht der Rechte Winkel 100^g, wobei das hochgestellte 'g' für Gon steht. Leite die Umrechnungsformeln her, wie aus Gon das Bogenmass eines Winkels berechnet werden kann und umgekehrt.

46. **Navitgationssystem**
Gemäss den Angaben seines Navigationssystems befindet sich ein Autofahrer an der Position 8° 12' 10" E und 46° 53' 18" N. Der Autofahrer ist mit der konstanten Geschwindigkeit von 60 km/h unterwegs und kann damit sein genau im Süden liegendes Ziel in eineinhalb Stunden erreichen. Welche Koordinaten (° ' ") hat sein Ziel? (Erdradius: 6370 km)

47. **Seefahrerei**
In der Seefahrerei wird der Kurs der Schiffe in Azimut angegeben. Dabei entspricht Azimut 0 oder auch Azimut 64 der Nordrichtung. Ein Schiff möchte einen Hafen erreichen, der sich von der aktuellen Position exakt mit dem Kurs 28 Azimut in 54 Minuten (konstante Geschwindigkeit) erreichen lässt. Wegen eines Defekts am Kompass, verfehlte es aber seinen Kurs und fuhr statt dessen einen Kurs, der um 4 Azimut backbord (links) vom geplanten Kurs lag. Zum Glück bemerkte der Kapitän den Irrtum nach einer halben Stunde Fahrt und reparierte den Kompass.

   (a) Wie lange dauert die restliche Fahrt in den Hafen noch?
   (b) Welchen Kurs muss der Kapitän dem Steuermann befehlen, um trotzdem noch den Hafen zu erreichen?

48. **Seerettung**
Ein in Seenot geratenes Fischerboot sendet ein Notsignal, welches von einem Frachter aufgefangen wird. Der Kapitän des Frachters erkennt, dass sich das Fischerboot auf Kurs 16 Azimut in einer Distanz von 19 Seemeilen befindet. Nach einer Fahrt von 30 min mit einer Geschwindigkeit von 15 Knoten fängt der Frachter ein neues Notsignal auf. Das Fischerboot wurde in der Zwischenzeit von einem starken Nordwind nach Süden abgetrieben und ist jetzt unter Kurs 18 Azimut erreichbar.

   (a) Wie weit wurde das Fischerboot abgetrieben?
   (b) Wie lange braucht der Frachter noch um auf direktem Weg das Fischerboot zu erreichen, wenn davon ausgegangen werden kann, dass das Fischerboot nun nicht mehr weiter abgetrieben wird?

360° = 64 Azimut (N: 0 Azimut, S: 32 Azimut...) / 1 Knoten = 1 Seemeile pro Stunde

49. **Artilleriepromille**
Bei der Artillerie werden die Himmelsrichtungen mit sogenannten Artilleriepromillen gemessen. Dabei entspricht 0000 Artilleriepromille der Nordrichtung und 1600 Artilleriepromille der Richtung Osten.
Ein Artilleriegeschütz muss ein Übungsziel Richtung 4040 Artilleriepromille in 4.6 km Entfernung treffen. Weil der Richter die vorgegebene Richtung nicht korrekt eingestellt hat, landet das Geschoss zwar exakt in 4.6 km Entfernung, aber 100 m rechts vom Ziel, in Schussrichtung betrachtet.
Wie viele Artilleriepromille hat der Richter aus Versehen eingestellt?

50. **Sinus**
Für welche Winkel b im Bogenmass mit $0 \leq b \leq 12$ gilt $\sin(b) = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

51. **Tangens**
Für welche Winkel α in Grad, Minuten und Sekunden gelten die folgenden Eigenschaften:

- $a = \text{Bogenmass}(\alpha)$
- $25 \leq a \leq 35$
- $\tan(a) = \pi$

Lösung zu: Ebene Geometrie

1. **Gleich weit, aber nicht zu weit!**
   1. Mittelsenkrechte m zwischen B und C konstruieren
   2. Kreis k um A mit Radius AC
   3. $k \cap m$ liefert die Schnittpunkte S_1 und S_2
   4. Die Strecke S_1S_2 ist die gesuchte Lösung.

2. **Verkürzte Rechteckseiten**
   43.75%
   $A' = \frac{9}{16}A = 0.5625A$

3. **Gleichschenkliges Trapez**
   $U = 2 \cdot \sqrt{\left[\frac{a-c}{2}\right]^2 + \left[\frac{2A}{a+c}\right]^2} + a + c$

4. **Gleich weit mit gegebenem Abstand**

   1. $s \perp g$ und $t \perp h$
   2. 2 cm auf den Senkrechten abtragen
   3. Parallelen p_1 und p_2 $\| g$
   4. Parallelen p_3 und p_4 $\| h$
   5. Die 4 Schnittpunkte der Parallelen sind die gesuchten Lösungspunkte.
   6. Zur Kontrolle die Winkelhalbierenden zwischen g und h konstruieren.

5. **Gleicher Abstand**
   Alle drei Winkelhalbierenden schneiden sich im Punkt P. P ist die gesuchte Lösung. Geometrisch ist P der Inkreismittelpunkt.

6. **Umkreis im Dreieck**
   Alle drei Mittelsenkrechten konstruieren. Diese schneiden sich in einem Punkt M. M ist der gesuchte Umkreismittelpunkt.

7. **Dreieck im Dreieck**
   Es ist zuerst ein ähnliches Dreieck D'E'F' zu konstruieren, bei dem lediglich D' auf AB und E' auf AC liegt. Durch zentrische Streckung von A aus kann das gesuchte Dreieck gefunden werden.

8. **Rechteck**
   Zuerst ein ähnliches Rechteck konstuieren, bei dem die Diagonale 3x länger ist als die Breite.
   Mit zentrischer Streckung die Länge auf die gewünschten 4cm bringen.

9. **Flächeninhalt**
   14.93%
   Die Lösung kann schrittweise durch Anwendung der Strahlensätze gefunden werden.

10. **Vierwaldstättersee**
    1824 cm^2
    Achtung: Der Masstab ist ein Längenverhältnis!

11. **Elemente eines Dreiecks**
    $\gamma = 68.4°$
    $b \approx 17.57$
    $c \approx 14.09$
    Winkelsumme und Sinussatz verwenden.

12. **Dreiecksaufgabe**
    Die Seiten messen:
    $a \approx 25.78$cm

$b \approx 34.73$cm
$c \approx 39.49$cm
Mit dem Sinussatz kann z.B. b und c durch a ausgedrückt werden. Mit dem Umfang lässt sich dann a und anschliessend b und c berechnen.

13. **Winkelhalbierende**
$a = b \approx 23.99$
$c \approx 32.54$
Das Dreieck ist gleichschenklig! Die gegebene Winkelhalbierende teilt den Winkel α in zwei gleichgrosse Teile. Sinussatz in den Teildreiecken verwenden.

14. **Elementare Dreiecksberechnungen**
$b = a \tan \beta \approx 219.71°$
$c \approx 265.02$
$h_c = a \sin \beta \approx 122.86$
$\rho = \frac{ab}{a+b+c} \approx 51.44$

15. **Flächeninhalt**
$10.66cm^2$

16. **Berechnungen an Dreiecken**

    (a) Dreiecksfläche: 30
    (b) Schnitt zweier Mittelsenkrechten liefert $(\,1 \mid 4\,)$.

17. **Berechnungen an Dreiecken**

    (a) Die Steigung der Seite $a = BC$ beträgt $-5/6$. Also steht die gegebene Gerade senkrecht auf dieser Seite. Zudem liegt der Punkt A auf der Geraden.
    (b) Zum Beispiel erhält man für h_c die Gleichung $y = \frac{-5}{3}x - \frac{7}{3}$. Schnitt der beiden Höhen liefert den Höhenschnittpunkt $H(\,-2.21 \mid 1.35\,)$.

18. **Abstand Punkt / Gerade**
Geometrische Lösung:
Lot l von $P(\,2 \mid 5\,)$ auf Gerade: $y = -2x + 9$
Schnitt der beiden Geraden liefert $x = 3.2$ und damit den Abstand ≈ 2.683.

19. **Berechnungen an Dreiecken**

    (a) $a = \sqrt{82}, b = 13, c = 5$
    (b) $\alpha \approx 30.5°, \beta \approx 133.2°, \gamma \approx 16.3°$
    (c) $S(\,7 \mid -2\,)$
    (d) Flächeninhalt 16.5
    (e) Winkelhalbierende $w_\gamma \approx 10.6$
    (f) Umkreisradius ≈ 8.9

20. **Berechnungen an Dreiecken**

    (a) $y = -0.5x + 7$
    (b) Punkt liegt nicht im Dreieck
    (c) $H_c(\,5.2 \mid -2.6\,)$

(d) $H(\,5.57 \mid -1.85\,)$
(e) $y = -\frac{8}{3}x + \frac{73}{6}$

21. **Billiard**
Der Punkt P gespiegelt an der Geraden ergibt den Punkt $\overline{P}(\,1.6 \mid -1.2\,)$. Der Schnittpunkt der Geraden $\overline{P}Q$ mit der Geraden $y = \frac{1}{2}x$ liefert den Reflexionspunkt $R(\,2 \mid 1\,)$.

22. **Geometrisches Extremalproblem**
Für die Abstandsfunktion $d(x)$ gilt
$$d(x) = x^2 - 3x + 4$$
Daraus folgt der Punkt $(\,1.5 \mid 1.22\,)$.

23. **Extremalprobleme in der Geometrie**
Ein Punkt, der auf der Geraden g liegt, hat die Koordinaten $(x|2x-3)$. Mittels Pythagoras folgt für die Abstandsfunktion $d(x)$
$$d(x)^2 = 5x^2 - 32x + 64$$
Der Abstand ist minimal für $x = 3.2$.

24. **Leitung eines Kraftwerkes**
Neigungswinkel: $\arctan \frac{360}{800} \approx 24.23°$
Prozentuale Steigung: $360/800 = 0.45 = 45\%$
Länge der Rohrleitung: 877m

25. **Berechnungen auf dem Erdglobus**

(a) $\varphi = \arccos \frac{r}{R} \approx 81°$
(b) $\frac{500}{2\pi r} \cdot 360 \approx 28.65°$

26. **Spiegeln eines Punktes an einer Geraden**
Gleichung der Geraden $g : y = \frac{1}{3}x + 1$
Gleichung der Normalen n zu g durch P: $y = -3x + 2$
Schnittpunkt $n \cap g$: $(\,0.3 \mid 1.1\,)$
Damit folgt $\overline{P}(\,-0.4 \mid 3.2\,)$.

27. **Berechnung eines allgemeinen Dreiecks**
$\beta \approx 42.14°$

28. **Beziehungen zwischen den Seitenhalbierenden**
Mit dem Cosinus-Satz folgt
$$s_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - 2b\frac{c}{2}\cos\alpha$$
$$s_c^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - 2a\frac{c}{2}\cos\beta$$
Addition der beiden Gleichungen und unter Berücksichtigung von $c = b\cos\alpha + a\cos\beta$ liefert die Formel.

29. **Punkte im Dreieck**

(a) Die Gleichungen der Höhen lauten
$$h_a : y = \frac{3}{4}x - 16.25$$
$$h_b : y = -\frac{5}{12}x + \frac{44}{3}$$
$$h_c : y = -\frac{3}{4}x + 23.5$$
Schnitt zweier Höhen liefert $H(\,26.5 \mid 3.625\,)$

(b) Analog zu den Höhen liefert der Schnitt zweier Winkelhalbierenden $I(\,11 \mid 8\,)$.

30. **Geteilter Winkel**
$\alpha_1 = 58.60°$
$\alpha_2 = 14.42°$
$\alpha_3 = 5.47°$
Zuerst müssen die beiden Katheten berechnet werden.

31. **Katheten gesucht**

$\alpha = 71.87°$
$\beta = 18.13°$

32. **Dreieck**
$\alpha = 30°$
Auf zwei Arten das Verhältnis a zu b ausrechnen und dann gleichsetzen, dadurch lässt sich der Winkel α bestimmen.

33. **Winkelhalbierende**
$w_\gamma = 4.49$cm
Zuerst mit dem Cosinussatz den Winkel γ ausrechnen. Anschliessend mit dem Sinussatz α und β bestimmen. Nochmal mit dem Sinussatz in einem der beiden Teildreiecke die gesuchte Winkelhalbierende berechnen.

34. **Achsenkreis**
$M(\,12 \mid 0\,)$; $r = 15$
Ansatz: y-Koordinate von M ist 0. Kreisgleichung verwenden und die beiden gegebenen Punkte P und Q einsetzen. Das entstehende Gleichungssystem auflösen.

35. **Gemeinsame Sehne**

(a) $r_1 = r_2 = 5$
Beide Kreise mit quadratischem Ergänzen in die Mittelpunktform bringen und Radien ablesen.

(b) $y = \frac{1}{3}x - 1$
Mittelpunkt M zwischen den beiden Kreismittelpunkten berechnen. Die Sehne geht durch M und hat als Steigung den negativen Kehrwert der Steigung der Gerade M_1M_2 (weil s darauf senkrecht stehen muss).

36. **Kreisberechnungen**
Mittels des Cosinus-Satzes lassen sich die benötigten Zentriwinkel berechnen. ≈ 43.73

37. **Reguläres 6-Eck**
$12.56cm^2$
Umkreisradius = 4 cm; Inkreisradius = $\sqrt{12}$ cm

38. **Verlängerter Umfang**
$U = 2\pi r \Rightarrow U + a = 2\pi r' \Rightarrow r' = \frac{U}{2\pi} + \frac{a}{2\pi} = r + const.$

39. **Dreieck drehen**
$A'(\,0 \mid 0\,)$
$B'(\,0.1 \mid 13\,)$
$C'(\,-4.29 \mid 2.57\,)$
Zuerst die Koordinaten von A, B und C in Polarkoordinaten umrechnen. Bei der Drehung bleiben die Radien erhalten und der Drehwinkel kann zum Polarwinkel addiert werden. Schlussendlich die Polarkoordinaten von A', B' und C' wieder in kartesische Koordinaten zurückrechnen.

40. **Gedrehtes Quadrat**
$A'(\,-2.222 \mid 7.487\,)$
$B'(\,-1.946 \mid 9.706\,)$
$C'(\,-4.165 \mid 9.982\,)$
$D'(\,-4.44 \mid 7.763\,)$
Kartesische Koordinaten der gegebenen Punkte in Polarkoordinaten umrechnen, anschliessend kann der Drehwinkel bei gleichbleibendem Radius addiert werden. Schlussendlich die Polarkoordinaten der Bildpunkte wieder umrechnen in kartesische Koordinaten.

41. **gedreht und gestreckt**
$P'(\,13.485 \mid -18.549\,)$
Zuerst ein neues Koordinatensystem einführen mit Z als Ursprung. In diesem Koordinatensystem P in Polarkoorinaten berechnen, Radius mit 4 multiplizieren und Drehwinkel addieren. Anschliessen wieder kartesische Koordinaten bestimmen und in ursprüngliches Koordinatensystem zurückverschieben.

42. **Drehstreckung**
$B'(\,-10 \mid 3\,)$
$C'(\,-8 \mid -1\,)$
Zuerst den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Punkt P verschieben. Anschliessend die verschobenen Koordinaten in Polarkoordinaten umrechnen.
Vom Punkt A' ebenfalls die verschobenen Koordinaten und davon die Polarform berechnen. Im Vergleich mit A kann der Streckungsfaktor und der Drehwinkel ermittelt werden.

43. **Koordinatentransformation**
$u = y$
$v = (x - y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$
Berechnung von v kann z.B. über rechtwinklige Dreiecke erfolgen.

44. **gedrehtes Koordinatensystem**
$u = r\cos\theta = r\cos(\phi - 30°) = r\cos\phi\cos 30° + r\sin\phi\sin 30° = x\cos 30° + y\sin 30°$
$v = r\sin\theta = r\sin(\phi - 30°) = r\sin\phi\cos 30° - r\cos\phi\sin 30° = -x\sin 30° + y\cos 30°$

45. **Neue Grad**
$B(g) = \dfrac{2\pi \cdot g}{400} = \dfrac{\pi \cdot g}{200} \qquad G(b) = \dfrac{400 \cdot b}{2\pi} = \dfrac{200 \cdot b}{\pi}$

46. **Navitgationssystem**
46° 4' 43.74" N
Breitengrad unverändert.

47. **Seefahrerei**

    (a) 28.6815 min
    Cosinussatz anwenden, Azimute in Grad umrechnen!

    (b) Kurs 32.19 Azimut
    Bei konstanter Geschwindigkeit kann ausschliesslich mit den Zeiten gerechnet werden.

48. **Seerettung**

    (a) 2.29 Seemeilen
    Azimut 16 ist direkt nach Osten, dadurch entsteht durch den Wind ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete gleich den nach einer halben Stunde Fahrzeit verbleibenden 11.5 Seemeilen. 2 Azimut entsprechen 11.25 Grad.

    (b) 46 min 54 s
    Die verbleibende Distanz beträgt 11.725 Seemeilen, dafür braucht der Frachter bei 15 Knoten Geschwindigkeit die angegebene Zeit.

49. **Artilleriepromille**
Der Richter hat 4062.14 Artilleriepromille eingestellt.
Mit Hilfe des Cosinussatzes lässt sich der Abweichwinkel in Grad bestimmen. Schlussendlich müssen die Grad noch in Artilleriepromille umgerechnet werden.

50. **Sinus**
$b_1 = \frac{\pi}{3}$
$b_2 = \frac{2\pi}{3}$
$b_3 = \frac{7\pi}{3}$
$b_4 = \frac{8\pi}{3}$

51. **Tangens**
$\alpha_1 = 1512°20'35.57''$
$\alpha_2 = 1692°20'35.57''$
$\alpha_3 = 1872°20'35.57''$