Integralrechnung

1. **bestimmte und unbestimmte Integrale**

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\ dx = ?$

   (b) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\ dx = ?$

   (c) $\displaystyle\int \frac{2x^3-12x^2+20x-2}{x^2-6x+9}\ dx = ?$

   (d) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\ dx = ?$ (Tipp: Formelbuch!)

2. **Bestimmtes Integral**
   $\int_0^4 \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 1\ dx = ?$

3. **Bestimmtes Integral**
   $\displaystyle\int_7^8 \frac{x}{x-5}\ dx = ?$

4. **Unbestimmtes Integral**
   Gesucht sind alle Stammfunktionen der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x}{-x^2+x+2}$

5. **Näherungsberechnung einer Fläche**
   Gegeben ist die folgende Funktion:

   $$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \qquad \text{Nullstellen: } N_1(-1/0)\ N_2(2/0)$$

   Die Funktion schliesst zusammen mit der x- und der y-Achse im ersten Quadranten eine Fläche ein. Berechne für diese Fläche einen Näherungswert durch Unterteilung in 1000 Teile (Rechteck-Approximation). Es ist sowohl eine obere wie auch eine untere Grenze verlangt.

6. **Näherungswert für Integral**
   Gesucht ist ein oberer und ein unterer Näherungswert, ermittelt mit 100 Teilschritten, für das folgende Integral:

   $$\int_0^{10} -\frac{1}{100}x^3\ dx \approx ?$$

7. **Oberer Näherungswert**
   Durch Unterteilung des folgenden Integrals in 10 Teilschritte soll ein oberer Näherungswert berechnet werden.

   $$\int_0^4 2x - \frac{x^2}{2}\ dx \approx ?$$

8. **Oberer und unterer Näherungswert**
   Für das folgende Integral ist ein oberer und ein unterer Näherungswert mit 1000 Teilen zu berechnen.

   $$\int\limits_0^1 2 - x^2\ dx = ?$$

9. **Oberer Näherungswert**
   Für das folgende Integral ist ein oberer Grenzwert mit 10 Teilen zu berechnen.

$$\int\limits_0^5 \ln(x+1)\,dx = ?$$

10. **unendliche Fläche?**
    Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}\ \ dx$

    (a) Gesucht sind die x-Koordinaten der Extremal- und Wendestellen der Funktion (ohne Verifizierung bei den Wendestellen).

    (b) Die Funktion umschliesst mit der x-Achse ein (unendliches) Flächenstück. Wie gross ist sein Flächeninhalt?

11. **Integralgleichung**
    Für welchen Wert b gilt die Gleichung:

$$\int_0^b \frac{2e^x}{2+e^x}\ \ dx = 10$$

12. **Fläche 6.75**
    Gesucht ist die Gleichung einer Funktion 3. Grades, die durch den Koordinatenursprung geht und die x-Achse bei $x = 3$ berührt. Zudem schliesst der Graph der Funktion mit der x-Achse im 1. Quadranten eine Fläche von 6.75 ein.

13. **Normale Normalen**
    Gegeben ist die Parabel $y = ax^2 - a$, mit $a > 0$. In den Nullstellen der Parabel werden die Normalen errichtet.

    (a) Wie lauten die Gleichungen der beiden Normalen?

    (b) Die beiden Normalen schliessen zusammen mit der Parabel eine Fläche ein. Für welche Werte von a ist diese Fläche $\frac{35}{12}$

14. **Trigonometrische Beziehung - und ein Integral**
    Beweise, dass $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$ ist und berechne damit das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx$$

15. **Integralgleichung**
    Es soll k berechnet werden aus der Gleichung

$$\int_1^{k^2} \frac{1}{x}\ dx = 8$$

16. **Integralgleichung**
    Aus der folgenden Gleichung soll x berechnet werden:

$$\int_{e^2}^{x} \frac{1}{3t}\ dt = 1$$

17. **Unbekannte kubische Funktion**
    Eine kubische Funktion geht durch den Nullpunkt. Sie hat an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt und bei $x = 2$ einen Wendepunkt. Zudem weiss man, dass sie zusammen mit der x-Achse eine Fläche von 9 Einheiten einschliesst. Wie lautet die Gleichung der Funktion?

18. **Rechteck unter Parabelbogen**
Gegeben ist die Parabel $y = -3x^2 + 12$. In der von der Parabel und der x-Achse begrenzten Fläche A befindet sich ein Rechteck. Eine Seite des Rechtecks liegt auf der x-Achse und die beiden nicht zu dieser Seite gehörenden Rechteck-Ecken liegen auf dem Parabelbogen. Wie ist die Länge und die Breite des Rechtecks zu wählen, damit der nicht im Innern des Rechtecks liegende Teil der Fläche A möglichst klein wird?

19. **Identische Flächen**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2}{t^2}x - \dfrac{1}{t^3}x^2 \quad t \in I\!R$.
Beweise, dass die Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse einschliesst, für alle Werte von t gleich gross ist.

20. **Flächenberechnung**
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = 2x - x^3$$

Wie gross ist die (gesamte) Fläche, die die beiden Funktionen miteinander einschliessen?

21. **Flächenverhältnis**
Gegeben ist die Funktion $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$.

    (a) Welche Fläche schliesst die Kurve mit der x-Achse ein?

    (b) In welchem Verhältnis teilt die Normale im Wendepunkt die in der ersten Teilaufgabe berechnete Fläche?

22. **Tangenten an Parabel**
Gegeben ist die Parabel mit der Funktion $y = ax^2 + 1$ und $0 < a < 1$.
Bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ werden die Tangenten an die Kurve gelegt. Die Gleichungen dieser Tangenten sind $t_1: \quad y = -2ax + 1 - a$ und $t_2: \quad y = 4ax + 1 - 4a$
Für welchen Wert von a hat die Fläche zwischen den beiden Tangenten und der Kurve einen Inhalt von $\frac{3}{2}$?

23. **Obere Grenze**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Für welche obere Grenze b (b > 0.5) ist die Summe aller Flächenstücke, die $f(x)$ mit der x-Achse im Intervall von 0.5 bis b einschliesst gerade exakt 4.5?

24. **Teilungsverhältnis**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x - x^3$.

    (a) Welchen Flächeninhalt A schliesst der Graph von $f(x)$ mit der positiven x-Achse ein?

    (b) Der Graph der Funktion $g(x) = 2x^2$ teilt die oben berechnete Fläche A in zwei Teilflächen A_1 und A_2. Welchem ganzzahligen Verhältnis entspricht $A_1 : A_2$?

25. **schneiden und berühren**
Gegeben sind die beiden Kurven $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = -x^3 + 2x^2$.

    (a) Es ist zu zeigen, dass sich die beiden Kurven bei $x = -1$ schneiden und bei $x = 2$ berühren.

    (b) Welchen Flächeninhalt hat das von $f(x)$ und $g(x)$ umschlossene Flächenstück?

26. **Für welchen Wert?**
Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = x^2 + x$ und $g(x) = ax^2$, jeweils mit dem gleichen $a > 1$.
Für welchen Wert des Parameters a hat die von $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossene Fläche den Inhalt 6?

27. **Fläche 8**
Es ist die Funkttion $f(x) = 4 - kx^2$ mit $k > 0$ gegeben. Wie ist der Parameter k zu wählen, damit die Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse einschliesst, 8 ist?

28. **Gewohnte Fläche**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Welche Fläche schliesst der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse ein? Die Nullstellen sind durch Probieren zu finden und anschliessend zu beweisen.

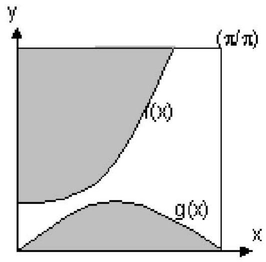
29. **Eingeschlossene Fläche**
Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$ und $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Gesucht ist die von $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossene Fläche A.

30. **Gleich grosse Flächenstücke**
Eine Funktion 3. Grades geht durch den Nullpunkt. Die Tangente an die Kurve im Nullpunkt hat die Steigung 36. Ferner berührt die Kurve bei $x = 6$ die x-Achse.

    (a) Wie lautet die Funktionsgleichung von $f(x)$.

    (b) h sei jene Gerade, die durch den Wendepunkt der Kurve und durch den Nullpunkt geht. Es ist zu zeigen, dass die Gerade h und die Kurve miteinander zwei Flächenstücke einschliessen, die gleich gross sind.

31. **Flächenberechnung**
Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$ und $g(x) = \sin x$. Wie gross ist die graumarkierte Fläche?



32. **Schnittpunkt im Wendepunkt**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$.

    (a) Berechne den Wendepunkt W der Funktion f(x).

    (b) Durch den Wendepunkt W und den Punkt $P(\,4 \mid 4\,)$ wird eine Parabel 2. Ordnung g(x) so gelegt, dass sie die gegebene Funktion f(x) im Wendepunkt W rechtwinklig schneidet. Wie lautet die Funktionsgleichung von g(x)?

    (c) Welche Fläche schliessen die beiden Kurven im ersten Quadranten ein?

33. **Flächenstück von geforderter Grösse**
Eine Polynomfunktion 3. Grades hat bei $x = 6$ eine Nullstelle. Ihr Graph berührt die x-Achse im Nullpunkt und schliesst mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 13.5 ein. Wie lautet die Funktionsgleichung der Polynomfunktion?

34. **Streifen der Breite 1**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6x - x^2$. Die Funktion begrenzt mit der x-Achse eine Fläche A. Ein zur y-Achse paralleler Streifen der Breite 1 soll so gelegt werden, dass er aus der Fläche A ein Flächenstück herausschneidet, dessen Flächeninhalt genau ein Sechstel der Fläche von A ist. Wo liegen der linke und der rechte Rand des Streifens?

35. **Fläche im ersten Quadranten**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x^2}$.
Gesucht ist die Fläche A zwischen dem Graphen von f(x) und der x-Achse im ersten Quadraten.

36. **Fläche Dreieck**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \sqrt{3 - x}$.

    (a) Wie gross ist das vom Graphen von f(x) und der x-Achse beschränkte endliche Flächenstück?

(b) Dem oben beschriebenen Flächenstück wird ein rechtwinkliges Dreieck einbeschrieben. Eine Ecke des Dreiecks liegt im Koordinatenursprung und eine Kathete auf der x-Achse. Wie gross kann die Fläche des Dreiecks höchstens werden?

37. **Geteilte Fläche**
Die Funktion $f(x) = 2x - x^3$ schliesst mit der positiven x-Achse eine Fläche A ein. In welchem Verhältnis teilt die Kurve von $g(x) = x^2$ diese Fläche?

38. **"normale" Fläche**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x - x^3$. Welche Fläche schliesst der Graph von f(x) mit der Normale im Wendepunkt von f(x) ein?

39. **Kubische Polynomfunktion**
Eine Polynomfunktion 3. Grades hat bei $x = 4$ eine Nullstelle und bei $P(\,2 \mid 1\,)$ einen Terrassenpunkt. Welche Fläche schliesst die Funktion mit den positiven Koordinatenachsen ein?

40. **Rotationskörper**
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = 2\sqrt{x} \qquad g(x) = \sqrt{5 - x}$$

Die Fläche die diese Kurven zusammen mit der x-Achse einschliessen rotiert um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

41. **Kreiskegel im Rotationskörper**
Gegeben ist die Kurve $y = 4 - 2\sqrt{x}$ für $x \geq 0$.

(a) Die Kurve schliesst mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Dieses Flächenstück rotiere um die x-Achse. Welches Volumen hat der entstehende Rotationskörper?

(b) Diesem Rotationskörper wird ein gerader Kreiskegel einbeschrieben, dessen Spitze im Koordinatenursprung liegt und der das grösstmögliche Volumen hat. Wie ist die Höhe x des Kegels zu wählen? Wie gross wird sein Volumen?

42. **Vase**
Eine 2 dm hohe Vase hat die Form eines Rotationskörpers. Dieser Rotationskörper entsteht durch Drehung der Kurve

$$y = \sqrt{\frac{e^{x-1} + e^{1-x}}{2}} \qquad 0 \leq x \leq 2$$

um die x-Achse.

(a) In welcher Höhe ist der Flächeninhalt des Querschnittes minimal?

(b) Wie viel Wasser fasst die Vase?

(c) Wie hoch steht das Wasser, wenn die Vase zu drei Viertel voll ist?

43. **Volumen einer Zwiebel**
Eine Zwiebel kann durch Rotation der Kurve $y = (5 - x) \cdot \sqrt{x}$ um die x-Achse dargestellt werden. Wie gross ist das 'Zwiebelvolumen'?

44. **Rotationskörper**
Das von der Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x - 5x^2$ und der x-Achse eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des entstandenen Rotationskörpers?

45. **Kriechgeschwindigkeit eines Käfers**
Ein Käfer bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{1}{1 + t}$$

$0 \leq t \leq 1$ Zeit in Stunden, v Geschwindigkeit in m/h.

(a) Welche Strecke legt der Käfer im Zeitintervall $[0, 1]$ zurück?

(b) Zu welcher Zeit ist der Absolutbetrag der Beschleunigung des Käfers nur noch halb so gross wie im Zeitpunkt $t = 0$?

46. **Asymmetrisch schwingender Körper**
Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines asymmetrisch schwingenden Körpers im Zeitpunkt t wird beschrieben durch

$$v(t) = \sin(t - \sin t)$$

(a) Gefragt ist eine Skizze des zugehörigen vt- und at-Diagramms.

(b) Gefragt ist eine Skizze des zugehörigen st-Diagramms im Fall $s(0) = 0$.

(c) Die Schwingung hat die Periode 2π. In welchen Zeitpunkten $0 \leq t < 2\pi$ ist die Beschleunigung des Körpers gleich 0 ?

(d) In welchen Zeitpunkten ist der Absolutbetrag der Beschleunigung am grössten bzw. am kleinsten?

(e) Welchen Weg legt der Körper im Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ zurück?

47. **Tageslichtdauer in Madrid**
Die Anzahl Stunden $h(t)$ pro Tag mit Tageslicht in Madrid in Abhängigkeit des Tages wird näherungsweise beschrieben durch

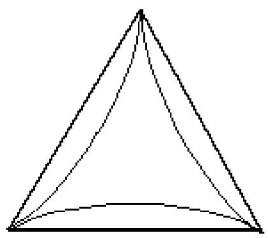
$$h(t) = 12 + 2.4 \sin[0.0172(t - 80)]$$

t bezeichnet die Anzahl Tage seit Jahresbeginn.
Wie gross ist die durchschnittliche Tageslichtdauer in Madrid

(a) im Januar

(b) über das ganze Jahr hinweg ?

48. **Gleichseitiges Dreieck mit Parabelbögen**
Einem gleichseitigen Dreieck werden drei Parabelbögen einbeschrieben (vgl. Skizze - nicht massstäblich!). Die Parabelbögen schneiden sich nur in den Ecken des Dreiecks und haben die grösstmögliche Fläche. Wie viele Prozent der Dreiecksfläche befinden sich nicht unter einem Parabelbogen?



49. **Umfahrungsstrasse**
Zwischen zwei Ortschaften $A(\,0 \mid 4\,)$ und $B(\,4 \mid 0\,)$ liegt die Ortschaft C (alle Angaben in Kilometer!). Die drei Dörfer sind durch eine geradlinige Strasse verbunden. Neu soll nun eine Umfahrungsstrasse um die Ortschaft C gebaut werden. Der zuständige Ingenieur hat berechnet, dass die Umfahrungsstrasse entlang der Kurve

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x + 4$$

führen muss. Durch die neue Strasse wird das Land zwischen der alten und der neuen Strasse nicht mehr nutzbar. Der Staat kauft daher den Eigentümern dieses Land für 200 Euro pro m^2 ab. Wieviel Geld muss der Staat dafür locker machen?

Lösung zu: Integralrechnung

1. **bestimmte und unbestimmte Integrale**

   (a) $\frac{1}{4}$
   Lösbar mit Substitution

   (b) $\mathrm{I} = 1 + e^x - \ln(1 + e^x) + c$
   Lösbar mit Substitution

   (c) $\mathrm{I} = x^2 + 4\ln(x - 3) - \dfrac{2}{x - 3} + c$
   Lösbar mit Partialburchzerlegung

   (d) $\mathrm{I} = x \tan x + \ln(\cos x) + c$
   Lösbar mit partieller Integration

2. **Bestimmtes Integral**
   0

3. **Bestimmtes Integral**
   ≈ 3.0273
   Lösbar mit partieller Integration.

4. **Unbestimmtes Integral**
   $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{2}{3} \cdot \ln(2 - x) - \frac{4}{3} \cdot \ln(x + 1) + c$
   Zuerst kann der Bruch mit Polynomdivision zerlegt werden. Der Restbruch lässt sich mit Partialbruchzerlegung integrieren.

5. **Näherungsberechnung einer Fläche**
   Obere Grenze: $\frac{1}{500} \cdot f(0) + \frac{1}{500} \cdot f(\frac{1}{500}) + \cdots + \frac{1}{500} \cdot f(\frac{999}{500}) = 2.002$
   Untere Grenze: $\frac{1}{500} \cdot f(\frac{1}{500}) + \frac{1}{500} \cdot f(\frac{2}{500}) + \cdots + \frac{1}{500} \cdot f(\frac{1000}{500}) = 1.998$

6. **Näherungswert für Integral**
   $O = -24.5025$ und $U = -25.5025$
   Approximation durch Rechtecke der Breite $\Delta x = \frac{1}{10}$

7. **Oberer Näherungswert**
   $O = \frac{2}{5} \cdot \left[f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f\left(\frac{6}{5}\right) + f\left(\frac{8}{5}\right) + f\left(\frac{10}{5}\right)\right] \cdot 2 = 6.08$
   Approximation durch Rechtecke mit der Breite $\Delta x = \frac{2}{5}$. Faktor 2 wegen Symmetrie!

8. **Oberer und unterer Näherungswert**
   $O \approx 1.6671665$
   $U \approx 1.6661665$

9. **Oberer Näherungswert**
   $O \approx 6.1812$

10. **unendliche Fläche?**

    (a) Hochpunkt bei x = 0; Wendepunkt bei x = 1

    (b) e
    $\int_{-1}^{\infty} \dfrac{x+1}{e^x}\, dx$
    Das Integral ist mit partieller Integration lösbar.

11. **Integralgleichung**
    b ≈ 6.0941
    Das Integral lässt sich mit Substitution lösen.

12. **Fläche 6.75**
$y = x^3 - 6x^2 + 9x$
Bedingungen: $f(0) = 0$; $f(3) = 0$; $f'(3) = 0$ und $\int\limits_0^3 ax^3 + bx^2 + cx + d\ dx\ = 6.75$

13. **Normale Normalen**

    (a) $n_1: \ y = \frac{1}{2a}x + \frac{1}{2a}$
    $n_2: \ y = -\frac{1}{2a}x + \frac{1}{2a}$

    (b) $a_1 = 2$; $a_2 = \frac{3}{16}$
    Die gesuchte Fläche setzt sich aus einem Dreieck und der Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse zusammen.

14. **Trigonometrische Beziehung - und ein Integral**
$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$ mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \sin 2x\, dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$

15. **Integralgleichung**
$k = e^4$

16. **Integralgleichung**
$x = e^5$

17. **Unbekannte kubische Funktion**
$y = \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 12x$
Folgende Bedingungen muss die gesuchte Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ erfüllen:

    - $f(0) = 0$
    - $f'(1) = 0$
    - $f''(2) = 0$
    - $\int_{N_1}^{N_2} f(x)\, dx = 9$ mit Nullstellen N_1, N_2

18. **Rechteck unter Parabelbogen**
Breite: 2.3; Länge: 8
Indem die Fläche des Rechtecks maximiert wird, wird die verbleibende Fläche unter der Parabel minimal.
$A_{\text{Rechteck}} = 2x \cdot (-3a^2 + 12) = max.$ mit x: Halbe Rechteckseite auf der x-Achse.

19. **Identische Flächen**
Das Integral $\int_0^{2t} \frac{2}{t^2}x - \frac{1}{t^3}x^2\ dx = \frac{4}{3}$ ist unabhängig vom Parameter t.

20. **Flächenberechnung**
$A = \frac{37}{12}$
$\int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx - \int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx$

21. **Flächenverhältnis**

    (a) A = 13.5
    $\int_0^6 -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2\ dx = 13.5$

    (b) Teilungsverhältnis 1 : 2
    Wendepunkt W(2/2); Tangentensteigung im Wendepunkt W $a_t = \frac{3}{2}$; somit Steigung der Normale $a_n = -\frac{1}{a_t} = -\frac{2}{3}$
    Gleichung der Normale: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$ Nullstelle bei x = 5
    Teilfläche links: $\int_0^2 -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2\ dx + \int_2^5 -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}\ dx = 4.5$

22. **Tangenten an Parabel**
$a = \frac{2}{3}$
Tangentenschnittpunkt bei $x = \frac{1}{2}$ unabhängig von a.
$A_1 = \int_{-1}^{0.5} ax^2 + 2ax + a\ dx = \frac{9}{8}a$
$A_2 = \int_{0.5}^{2} ax^2 - 4ax + 4a\ dx = \frac{9}{8}a$
$A_1 + A_2 = \frac{9}{4}a = \frac{3}{2}$

23. **Obere Grenze**
b=5.82..
Es sind zwei Teilflächen zu berechnen. Die erste im Intervall [0.5..1] ist unterhalb der x-Achse und misst 0.5. Dadurch kann die zweite im Intervall [1..b] gleich 4 gesetzt und die Integralgleichung gelöst werden.

24. **Teilungsverhältnis**

    (a) A = 2.25
    $\int_0^{\sqrt{3}} 3x - x^3\ dx$
    (b) 7 : 20
    Die beiden Teilflächen messen $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{3}$

25. **schneiden und berühren**

    (a) f(-1)=g(-1)=3; f(2)=g(2)=0 und f'(2)=g'(2)=-4
    (b) Beide Flächen sind 18.

26. **Für welchen Wert?**
$a = \frac{7}{6}$
Schnittpunkte bei: $x_1 = 0$ und $x_2 = \dfrac{1}{a-1}$

27. **Fläche 8**
$k = \frac{16}{9}$
Zu lösen: $2 \cdot \int\limits_0^{\sqrt{\frac{4}{k}}} 4kx^2\ dx\ =\ 8$

28. **Gewohnte Fläche**
$\int\limits_{-1}^{2} x^3 - 3x^2 + 4\ dx\ =\ \frac{27}{4}$

29. **Eingeschlossene Fläche**
$\int\limits_{2}^{7} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 7\ dx\ =\ \frac{125}{12}$

30. **Gleich grosse Flächenstücke**

    (a) $y = x^3 - 12x^2 + 36x$; genügt den Bedingungen $f(0) = 0$, $f'(0) = 36$, $f(6) = 0$ und $f'(6) = 0$.
    (b) Beide Flächenstücke haben den Inhalt 64.
    Zuerst müssen der Wendpunkt $W(\,4 \mid 16\,)$ und die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 8$ berechnet werden. Somit hat die Gerade h die Gleichung $y = 4x$. Anschliessend muss gezeigt werden, dass gilt:
    $$\int_0^4 f(x) - h(x)\ dx = \int_4^8 h(x) - f(x)\ dx$$

31. **Flächenberechnung**
   $A_{total} \approx 5.618$
   Obere Fläche: $\pi \cdot \sqrt{3\pi - 3} - \int_0^{\sqrt{3\pi-1}} \frac{1}{3}x^2 + 1\,dx$
   Untere Fläche: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

32. **Schnittpunkt im Wendepunkt**

   (a) $W(\,0 \mid 2\,)$
   (b) $f(x) = -\frac{1}{24}x^2 + \frac{2}{3}x + 2$; mit den Bedingungen $f(4) = 4$; $f(0) = 2$ und $f'(0) = \frac{2}{3}$
   (c) $A = \frac{76}{9}$; relevante Schnittpunkte bei $x = 0$ und $x = 4$

33. **Flächenstück von geforderter Grösse**
   $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$
   Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
   Bedingungen: $f(6) = 0$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$ und das Integral $\int_0^6 ax^3 + bx^2 + cx + d\ dx = 13.5$

34. **Streifen der Breite 1**
   1. Lösung: Untere Grenze ≈ 0.792; obere Grenze ≈ 1.792
   2. Lösung: Untere Grenze ≈ 4.2078; obere Grenze ≈ 5.2078
   Zuerst müssen die Nullstellten bestimmt werden ($x_1 = 0$; $x_2 = 6$). Die Fläche A hat den Inhalt 36. Anschliessend ist das Integral $\int_a^{a+1} 6x - x^2\ dx$ nach a aufzulösen.

35. **Fläche im ersten Quadranten**
   8
   Die untere Grenze ist 0 und die obere Grenze ist ∞. Das Integral lässt sich mit Substitution lösen.

36. **Fläche Dreieck**

   (a) $\dfrac{12 \cdot \sqrt{3}}{5} \approx 4.156$
   Die Integrationsgrenzen sind 0 und 3, das Integral kann mit partieller Integration gelöst werden.
   (b) $A_{\text{max}} \approx 2.23$
   Die beiden Katheten des Dreiecks sind x und $x \cdot \sqrt{3-x}$.

37. **Geteilte Fläche**
   Teilungsverhältnis $5 : 7$

38. **"normale" Fläche**
   $A = 1.5625$
   Normale: $y = -\frac{1}{2}x$

39. **Kubische Polynomfunktion**
   $A = 4$
   $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$

40. **Rotationskörper**
   $V = \pi \cdot \int_0^1 4x\ dx + \pi \cdot \int_1^5 (5-x)\ dx = 10\pi \approx 31.142$

41. **Kreiskegel im Rotationskörper**

   (a) $\pi \int\limits_0^4 f(x)^2\ dx\ \approx 33.51$

(b) $x = 1$ Volumen: $V \approx 4.1887$
$V = \frac{1}{3} f(x)^2 \cdot \pi \cdot x = max.$

42. **Vase**

(a) x=1

(b) $\pi \int_0^2 f(x)^2 \, dx \ \approx 7.384$ Liter

(c) 1.5581 dm

43. **Volumen einer Zwiebel**
$V = \pi \cdot \int_0^5 [(5 - x) \cdot \sqrt{x}]^2 \, dx \ \approx 163.62$

44. **Rotationskörper**
$V \approx 12.1769$
Nullstellen bei $x = 0$ und $x = \ln 5$

45. **Kriechgeschwindigkeit eines Käfers**

(a) 0.69 m

(b) 0.41 h

46. **Asymmetrisch schwingender Körper**

(a) –

(b) –

(c) $t_1 = 0, t_2 \approx 2.28, t_3 \approx 3.97$

(d) $t_{min} = t_1, t_2, t_3; t_{max} \approx 3.1$

(e) $s(0, 2\pi) = 2 \int_0^\pi v(t)dt \approx 2.75$

47. **Tageslichtdauer in Madrid**

(a) Numerisches Verfahren liefert

$$\frac{1}{31} \int_0^{31} h(t)dt \approx 9.88^\circ$$

(b) Analog für das ganze Jahr $\approx 12^\circ$.

48. **Gleichseitiges Dreieck mit Parabelbögen**
$33\frac{1}{3}\%$
Zuerst muss für einen der Parabelbögen die Gleichung ermittelt werden. Dazu soll ein Koordinatensystem eingeführt werden, z.B. mit dem Nullpunkt in der Mitte der Basis. Die Länge der Dreiecksseite kann beliebig gewählt werden. Die Winkelhalbierende in jeder Dreiecksecke ist zugleich Tangente an die entsprechenden Parabeln (d.h. Winkel 30°).
Mit Integralrechnung kann dann die Fläche zwischen einer Parabel und der Basis ausgerechnet werden. Diese Fläche mal 3 im Verhältnis zur Dreiecksfläche ergibt das Resultat.

49. **Umfahrungsstrasse**
$426'666'666.6$ Euro
Fläche im Bereich 0AB unter der Kurve: $A = \int_0^4 \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x + 4 \, dx = \frac{152}{15}$
Die oben berechnete Fläche minus die Dreiecksfläche 0AB ist mit den Kosten zu multiplizieren (Massgrössen!).