Lineare Algebra

1. **Chemische Reaktionen**
   Bei einer hypothetischen Reaktion zwischen Molekülen A und Molekülen B geht pro Zeiteinheit der Bruchteil $p = 0.3$ der Moleküle A in Moleküle B und der Bruchteil $q = 0.4$ der Moleküle B in Moleküle A über.

   (a) Die Anfangskonzentrationen betragen $c_A = 1$, $c_B = 0$. Wie kann die Reaktion als dynamisches System beschrieben und wie können die Konzentrationen nach 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 Zeiteinheiten berechnet werden?
   Gesucht ist auch eine Skizze der beiden Konzentrationskurven in demselben Koordinatensystem (Konzentration als Funktion der Zeit).

   (b) Stellt sich ein Gleichgewicht ein und falls ja, bei welchen Konzentrationen?

2. **Populationsmodelle**
   In einem Populationsmodell werden drei Stadien unterschieden. Die Populationsentwicklung wird durch eine Übergangsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 2 & v \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

   beschrieben.

   (a) Für welche Werte von v gibt es eine stabile Population, die sich von Generation zu Generation nicht verändert?

   (b) Für welche Werte von v kann die Entwicklung der Population rückwärtsverfolgt werden?

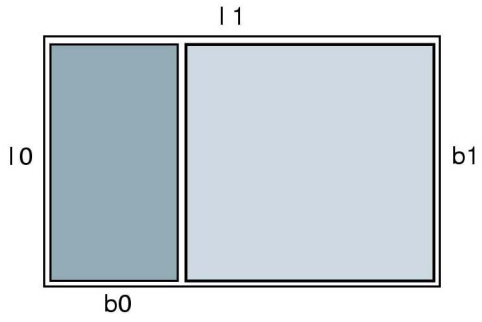
3. **Einkaufswagen im Supermarkt**
   Die 600 Einkaufswagen eines Supermarktes stehen vor Ladenöffnung alle auf einem für sie reservierten Platz vor dem Eingang (E). Während eines Einkaufstages wechseln die Wagen ständig ihre Plätze. Die meisten Leute lassen den Wagen auf dem Parkhof (H) stehen. Ein anderer Teil der Wagen wird direkt nach den Kassen im Innern (I) stehengelassen. Die wenigsten Leute bringen ihren Wagen wieder zum Eingang zurück. Daher müssen die herumstehenden Wagen von einer eigens dafür abgestellten Arbeitskraft in gewissen Abständen wieder zum Eingang zurückgebracht werden.

   Der Supermarkt versucht nun Einsparungen zu erzielen, indem er die Wagen günstig an den verschiedenen Standorten deponiert. Aufgrund von Zählungen hat sich eine Tabelle ergeben, die Aufschluss über die Häufigkeiten für einen Ortswechsel gibt:

	E	H	I
E	0.3	0.2	0.3
H	0.6	0.6	0.7
I	0.1	0.2	0.0

   Besteht eine Möglichkeit durch eine geschickte Stationierung der Einkaufswagen den Arbeitsanfall massiv zu reduzieren? Falls ja, wieviele Einkaufswagen müssen an den einzelnen Standorten deponiert werden?

4. **Übergangsmatrizen**
   Gegeben ist ein Rechteck mit Länge l_0 und Breite b_0. An die längere Seite des Rechtecks wird ein Quadrat angesetzt; dadurch entsteht ein Rechteck mit Länge l_1 und Breite b_1. Wiederholt man diesen Vorgang mit dem neuen Rechteck, so entsteht eine Folge von immer grösser werdenden Rechtecken.



(a) Welche Matrix beschreibt den Übergang von $(\, l_n \mid b_n \,)$ zu $(\, l_{n+1} \mid b_{n+1} \,)$?

(b) Kann eine Aussage über das Verhältnis Länge zu Breite der so langfristig entstehenden Rechtecke gemacht werden?

5. **Mobilitätsverhalten**
Ein Land ist in drei demographische Regionen aufgeteilt: A, B und C. Untersuchungen des Mobilitätsverhaltens der Bevölkerung haben zum folgenden Modell geführt:

> Im Laufe eines Jahres ziehen von der Bevölkerung von A 5% nach B und 5% nach C, von der Bevölkerung von B 15% nach A und 10% nach C, und von der Bevölkerung von C 10% nach A und 5% nach B. Das Modell geht davon aus, dass die Gesamtbevölkerung weder zunimmt noch abnimmt. Die Einwohnerzahlen zu Beginn des Jahres 1995 sind: 3'500'000 Einwohner in A, 4'750'000 Einwohner in B und 8'940'000 Einwohner in C.

Die nachfolgenden Fragen sind aufgrund dieses Modells zu beantworten:

(a) Wieviele Einwohner hat es Ende 1998 in jeder der drei Regionen?

(b) Wieviele Einwohner werden im Laufe des Jahres 1998 zügeln?

(c) Wieviele Einwohner von A sind 1995 aus A weggezogen, aber im Laufe des Jahres 1997 wieder nach A zurückgekehrt?

(d) Langfristig stellt sich ein stabiles Verhältnis zwischen den Einwohnerzahlen der drei Regionen ein. Wieviel Prozent der Gesamtbevölkerung wohnen langfristig in jeder Region?

6. **Funktionstüchtigkeit eines Gerätes**
Ein Gerät befindet sich stets in einem der drei Zustände *betriebsbereit*, *defekt* oder *in Reparatur*. Der Zustand des Gerätes wechselt von Zeiteinheit zu Zeiteinheit zufällig gemäss folgenden Regeln:

- Ist das Gerät betriebsbereit, so ist es nach einer Zeiteinheit mit Wahrscheinlichkeit 0.8 immer noch betriebsbereit, mit Wahrscheinlichkeit 0.2 defekt.
- Ist das Gerät defekt, so ist es nach einer Zeiteinheit mit Wahrscheinlichkeit 0.1 immer noch defekt. Mit Wahrscheinlichkeit 0.9 befindet es sich in Reparatur.
- Befindet sich das Gerät in Reparatur, so befindet es sich nach einer Zeiteinheit mit Wahrscheinlichkeit 0.6 immer noch in Reparatur, mit Wahrscheinlichkeit 0.3 ist es wieder betriebsbereit und mit Wahrscheinlichkeit 0.1 wurde die Reparatur nicht richtig ausgeführt und das Gerät ist wieder defekt.

(a) Wie lautet die Übergangsmatrix dieses dynamischen Systems?

(b) Das Gerät sei betriebsbereit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es nach 7 Zeiteinheiten defekt sein?

(c) Das Gerät sei betriebsbereit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Gerät langfristig defekt sein?

7. **Mixed Crap Spiel**
Mixed Crap ist eine neue Version des Crap-Spiels. Man würfelt gleichzeitig mit einem normalen Würfel mit den Augenzahlen 1,2,3,4,5,6 und einem Tetraederwürfel mit den Augenzahlen 1,2,3,4. Ist die Augensumme 3, 6, oder 9, so hat man sofort gewonnen. Ist die Augensumme 4 oder 8, so hat man sofort verloren. Andernfalls wird die gewürfelte Augensumme S notiert und es wird weiter gewürfelt, bis die notierte Augensumme S oder die Augensumme 6 gewürfelt wird. Wiederholt sich die Augensumme S, so hat man gewonnen. Bei der Augensumme 6 hat man verloren.

   (a) Wie können die Spielregeln des Mixed Crap Spiels in ein dynamisches System übersetzt werden? (mögliche Zustände, Anfangszustand, Zustandsgraph, Übergangsmatrix)

   (b) Es sollen der Spielverlauf während den ersten 8 Runden untersucht und die folgenden Fragen beantwortet werden:
   - Gewinnt oder verliert man langfristig beim Mixed Crap?
   - Wieviele Prozent der Spiele dauern länger als 8 Runden?
   - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man genau im 5. Wurf gewinnt?
   - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel bereits in den ersten drei Runden entschieden wird?

8. **Dynamische Systeme**
Eine Autovermietungsfirma besitzt Agenturen in den Städten A, B und C. Alle drei Agenturen vermieten Wagen und die Kunden können die Wagen bei irgendeiner der drei Agenturen zurückbringen. Aus der nachstehenden Matrix können die Wahrscheinlichkeiten entnommen werden, mit denen die Kunden ihre Wagen in den verschiedenen Städten zurückgeben:

Miete bei			
A	B	C	Rückgabe bei
0.8	0.3	0.2	A
0.1	0.2	0.6	B
0.1	0.5	0.2	C

   (a) Ein Wagen wird zweimal vermietet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er vom zweiten Kunden bei der Agentur in A zurückgegeben, wenn ihn der erste Kunde bei der Agentur in B gemietet hat?

   (b) Welcher Prozentsatz der Wagen wird bei der Agentur in A zurückgegeben?

   (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bei der Agentur in C gemieteter Wagen fünfmal hintereinander auch bei der Agentur in C zurückgegeben wird?

   (d) Ein Wagen wird bei der Agentur in B zurückgebracht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde der Wagen bei der Agentur in A gemietet?

9. **Multiplikation Matrix mal Vektor**
Untenstehend ist das Kernstück eines Programm zur Berechnung des Produktes $\vec{s}$ einer nxn-Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit einem Vektor $\vec{x} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ gegeben.

```
FOR i=1 TO n
    s(i)=0
    FOR j=1 TO n
        s(i)=s(i)+a(i,j)*x(j)
    NEXT j
NEXT i
```

Dieses Programm benötigt n^2 Multiplikationen von Zahlen. Das Programm soll so abgeändert werden, dass es ohne unnötige Multiplikationen das Produkt einer Matrix mit einem Vektor berechnet, wenn die Matrix nur oberhalb der Diagonale Einträge ungleich 0 aufweist.

10. **Ergänzung eines Quadrates**
Vom Quadrat $ABCD$ kennt man die Ecken $A(\,0 \mid 0\,)$ und $B(\,2 \mid 3\,)$. Welche Koordinaten haben die Ecken C und D ?

11. **Abbildung einer Kurve**
Gegeben ist die Menge C aller Punkte $(\,x \mid y\,)$ in der Ebene, welche die Gleichung $x^2+2xy+y^2-8=0$ erfüllen. Wie lautet die Gleichung der Bildmenge $\overline{C}$ nach der Rotation um $(\,0 \mid 0\,)$ um den Winkel $\alpha=-45°$? Welche Punktmenge in der Ebene stellt C dar?

12. **Spiegelung an einer Ebene**
Gegeben ist im Raum die erstprojizierende Ebene durch die Punkte $(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$ und $(\,1 \mid 1 \mid 0\,)$. Welche Matrix beschreibt die Spiegelung an dieser Ebene?

13. **Abbildungen der Ebene**
Durch die Matrizen
$$\begin{pmatrix} k & 1-k \\ k-1 & 2-k \end{pmatrix}$$
werden für beliebige reelle Werte des Parameters k Abbildungen f_k der Ebene beschrieben.
    (a) Für welche Werte von k liegt das Bild des Punktes $P(\,-1 \mid 0\,)$ auf der x-Achse?
    (b) Welche Fixpunkte haben die Abbildungen f_k?
    (Fixpunkte:= Punkte, die bei der Abbildung unverändert bleiben)
    (c) Für welche Werte von k besitzt f_k eine Umkehrabbildung, d. h. kann die Abbildung f_k rückgängig gemacht werden?

14. **Lineare Abbildungen**
Spiegelungen an Geraden durch den Nullpunkt $(\,0 \mid 0\,)$ werden durch Matrizen der Gestalt
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
beschrieben. Welche Steigung hat die Gerade in Abhängigkeit des Winkel α?
Hinweis: Die folgende Formel ist unter Umständen hilfreich:
$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

15. **Rotation eines Dreiecks**
Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks $A(\,4 \mid 0\,)$,$B(\,8 \mid 2\,)C(\,6 \mid 7\,)$ nach Drehung um $M(\,2 \mid 3\,)$ um den Winkel $\alpha=57°$ im Gegenuhrzeigersinn?

Lösung zu: Lineare Algebra

1. **Chemische Reaktionen**

   (a) Die Übergangsmatrix des zugehörigen dynamischen Systems lautet

   $$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

   Sukzessive Multiplikation der Übergangsmatrix mit dem Konzentrationsvektor (c_A, c_B) liefert den Verlauf der Konzentrationen.

   (b) Ein allfälliges Gleichgewicht stellt einen Fixpunkt des dynamischen Systems dar. Ein Fixpunkt lässt sich näherungsweise durch die Berechnung sehr vieler Übergänge berechnen oder exalt durch Lösen des resultierenden linearen Gleichungssystems. Ein Gleichgewicht stellt sich ein bei $c_A \approx 0.57$ und $c_B \approx 0.43$ bzw. exakt beim Verhältnis 4:3.

2. **Populationsmodelle**

   (a) Die Berechnung des Fixpunktes des dynamischen Systems führt zu einem linearen Gleichungssystem und $v = 1/2$.

   (b) Die Population kann rückwärts verfolgt werden, wenn die Übergangsmatrix umkehrbar ist, also die Determinante der Matrix ungleich Null ist.
   $v \neq 2$

3. **Einkaufswagen im Supermarkt**
   Gesucht ist eine stabile Verteilung der Einkaufswagen, also ein Fixpunkt des dynamischen Systems. Die Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems liefert für die Einkaufswagen die Verteilung $(\,143 \mid 369 \mid 88\,)$ an den Standorten E, H und I.

4. **Übergangsmatrizen**

   (a) Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) Verhältnis $l : b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 2$

5. **Mobilitätsverhalten**
   Übergangsmatrix und Startvektor

   $$\begin{pmatrix} 0.90 & 0.15 & 0.10 \\ 0.05 & 0.75 & 0.05 \\ 0.05 & 0.10 & 0.85 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3'500'000 \\ 4'750'000 \\ 8'940'000 \end{pmatrix}$$

   (a) $\approx 7'091'000, 3'318'000, 6'782'000$

   (b) $\approx 2'605'000$

   (c) 37'625

   (d) Lösen des Gleichungssystems $A\vec{x} = x$ liefert $54\frac{1}{6}\%, 16\frac{2}{3}\%, 29\frac{1}{6}\%$

6. **Funktionstüchtigkeit eines Gerätes**

   (a) Übergangsmatrix

   $$\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.9 & 0.6 \end{pmatrix}$$

(b) 0.51

(c) 0.15

7. **Mixed Crap Spiel**

   (a) –

   (b)
   - Langfristig gewinnt man bei Mixed Crap.
   - 3.57 %
   - 0.0182
   - 0.7995

8. **Dynamische Systeme**

   (a) 0.4

   (b) 0.56

   (c) 0.00032

   (d) 0.243

9. **Multiplikation Matrix mal Vektor**

```
FOR i=1 TO n
    s(i)=0
    FOR j=i TO n
        s(i)=s(i)+a(i,j)*x(j)
    NEXT j
NEXT i
```

10. **Ergänzung eines Quadrates**
    $C(-1 \mid 5)$, $D(-3 \mid 2)$

11. **Abbildung einer Kurve**
    $\overline{C} : x^2 = 4$, zwei parallele Geraden

12. **Spiegelung an einer Ebene**
    $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. **Abbildungen der Ebene**

    (a) $k = 1$

    (b) Fixpunkte haben die Form $(x \mid x)$.

    (c) Die Determinante hat den Wert 1, also besitzt die Abbildung für jeden Wert von k eine Umkehrabbildung.

14. **Lineare Abbildungen**
    Die Spiegelachse ist eine Fixgerade der Abbildung. Mit dem Ansatz $y = mx$ folgt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} \cos\alpha \cdot x & + & \sin\alpha \cdot mx & = & x \\ \sin\alpha \cdot x & - & \cos\alpha \cdot mx & = & mx \end{array}$$

    Daraus folgt $m^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

15. **Rotation eines Dreiecks**
$\overline{A}(\,5.6 \mid 3.0\,)\overline{B}(\,6.1 \mid 7.5\,)\overline{C}(\,0.8 \mid 8.5\,)$